Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. О. Чехов, Н. В. Пузырникова, Интегрируемые системы на графах, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 5, 181–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm329>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 14:45:02

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ НА ГРАФАХ

Л. О. ЧЕХОВ, Н. В. ПУЗЫРНИКОВА

Статистические и интегрируемые системы на графах представляют собой удобный объект исследования. Спектральные задачи для операторов второго порядка допускают целый ряд точных утверждений [1]–[3]. В то же время нелинейные интегрируемые системы были построены только на решетках $\mathbb{Z}$ ((L, A) -пары типа цепочки Тоды) и $\mathbb{Z}^2$ ((L, A, B) -тройки), см. [4]. В недавней работе Кричевера и Новикова [5] на графе Γ_3 (бесконечное однородное дерево с вершинами валентности три) была построена деформация произвольного оператора L четвертого порядка в виде (L, A, B) -тройки, $\dot{L} = LA - BL$, которая сохраняет спектральные данные нулевого уровня $L\psi = 0$. (Никаких локальных изоспектральных деформаций операторов L второго порядка на деревьях обнаружить не удалось.)

В этой работе интегрируемая система Кричевера–Новикова обобщается на случай произвольного графа Γ . Рассматриваются операторы L , действующие на пространстве функций ψ_P , зависящих от вершин графа Γ . Расстояние $d(X_1, X_2) \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ на дереве без циклов измеряется в длинах ребер, входящих в путь, соединяющий вершины X_1 и X_2 . Порядком уравнения $L\psi = 0$, где $(L\psi)_P = \sum_X b_{P,X}\psi_X$, называется максимальный диаметр $\max_P d(X_1, X_2) : b_{P,X_1} \neq 0, b_{P,X_2} \neq 0$ или $b_{X_1,X_2} \neq 0$. Рассмотрим сначала произвольный граф без петель.

ТЕОРЕМА. *Вещественный самосопряженный оператор L четвертого порядка на графе Γ без петель обладает изоспектральной деформацией одного уровня энергии $L\psi = 0$ в виде (L, A, B) -тройки ($B = A^t$)*

$$(1) \quad \dot{L} = LA + A^t L,$$

где A – оператор второго порядка,

$$(2) \quad (A\psi)_X = \sum_{X': d(X,X')=1} a_{X,X'}\psi_{X'} + s_X\psi_X,$$

тогда и только тогда, когда оператор L ,

$$(3) \quad (L\psi)_X = \sum_{X'': d(X,X'')=2} b_{X,X''}\psi_{X''} + \sum_{X': d(X,X')=1} r_{X,X'}\psi_{X'} + \rho_X\psi_X,$$

такой, что все $b_{X,X''} > 0$, представим в виде

$$(4) \quad L = Q^t Q + u_X,$$

где Q – оператор второго порядка,

$$(5) \quad (Q\psi)_X = \sum_{X': d(X,X')=1} q_{X,X'}\psi_{X'} + v_X\psi_X.$$

При этом коэффициенты $q_{X,X'}$ определены однозначно, а коэффициенты v_X содержат свободный параметр – значение v_{X_0} в некоторой избранной точке X_0 .

(На дереве Γ_3 произвольный оператор четвертого порядка L (3) допускает представление (4), а потому имеет изоспектральную деформацию (1) [5].)

Из требования того, что деформация (1) оператора L с помощью оператора A второго порядка представляет собой снова оператор четвертого порядка, следует, что для любых четырех

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00151).

различных вершин $X_1, \dots, X_4$ таких, что $d(X_i, X_j) = 2$, $i \neq j$ (заметим, что тогда существует единственная вершина X_0 такая, что $d(X_i, X_0) = 1$, $i = 1, \dots, 4$), коэффициенты b_{X_i, X_j} (всегда предполагающиеся симметричными по своим индексам, см. (3)) должны удовлетворять соотношениям

$$(6) \quad b_{X_1, X_2} b_{X_3, X_4} = b_{X_1, X_3} b_{X_2, X_4} = b_{X_1, X_4} b_{X_2, X_3}.$$

Из условий (6) следует взаимно однозначное соответствие между q_{X_i, X_0} и b_{X_i, X_j} , где X_i , $i = 1, \dots, n$, – все вершины, отстоящие от вершины X_0 на единичное расстояние. В одну сторону, $b_{X_i, X_j} = q_{X_i, X_0} q_{X_j, X_0}$. В другую сторону, с учетом соотношений (6),

$$b_{X_k, X_l} = \frac{b_{X_1, X_k} b_{X_1, X_l} b_{X_2, X_3}}{b_{X_1, X_2} b_{X_1, X_3}} \quad \text{при } k, l > 1, \quad k \neq l,$$

а

$$q_{X_k, X_0} = \frac{b_{X_1, X_k} \sqrt{b_{X_2, X_3}}}{\sqrt{b_{X_1, X_2} b_{X_1, X_3}}}, \quad k > 1, \quad q_{X_1, X_0} = \sqrt{\frac{b_{X_1, X_2} b_{X_1, X_3}}{b_{X_2, X_3}}}.$$

Коэффициенты $a_{X, X'}$ оператора деформации (2) выражаются однозначным образом (с точностью до общей мультипликативной константы) через $q_{X, Y}$. Для любых трех точек X_1, X_2, X_3 таких, что $d(X_i, X_{i+1}) = 1$, $i = 1, 2$, имеем

$$(7) \quad \frac{a_{X_1, X_2}}{q_{X_2, X_1}} = \frac{a_{X_1, X_3}}{q_{X_3, X_1}} \quad \text{и} \quad a_{X_3, X_2} = -a_{X_2, X_1} \frac{q_{X_2, X_3}^2}{q_{X_1, X_2} q_{X_3, X_2}}$$

(в частности, при $X_1 = X_3$ получим $a_{X_1, X_2} = -a_{X_2, X_1} q_{X_2, X_1}^2 / q_{X_1, X_2}^2$).

Замечание 1. Оператор деформации (2) задается также в терминах коцикла

$$\chi_{X_1, X_2} = - \frac{\prod_{i=1}^{n_2} (b_{X_1, X'_i})^{1/n_2}}{\prod_{j=1}^{n_1} (b_{X'_j, X_2})^{1/n_1}},$$

обобщающего коцикл, предложенный в [5]. Здесь X_1 и X_2 – две соседние вершины с соответствующими полными валентностями $n_1 + 1$ и $n_2 + 1$, а $\{X''_j\}$ и $\{X'_i\}$ – наборы вершин, соседних соответственно вершинам X_1 и X_2 и не совпадающих с X_1, X_2 .

Явные формулы для деформации имеют вид:

$$(8) \quad \begin{aligned} \dot{b}_{X_i, X_j} &= r_{X_i, X_0} a_{X_0, X_j} + a_{X_0, X_i} r_{X_0, X_j} + b_{X_i, X_j} (s_{X_i} + s_{X_j}), \\ \dot{r}_{X_1, X_2} &= \sum_{X''} b_{X_1, X''} a_{X'', X_2} + \sum_{X'} b_{X_2, X'} a_{X', X_1} + \rho_{X_1} a_{X_1, X_2} + \rho_{X_2} a_{X_2, X_1} \\ &\quad + r_{X_1, X_2} s_{X_2} + r_{X_2, X_1} s_{X_1}, \\ \dot{\rho}_X &= \sum_{X'} r_{X, X'} (a_{X', X} + a_{X, X'}) + 2\rho_X s_X. \end{aligned}$$

ЛЕММА. Деформация (8) с учетом (7) сохраняет условия (6) (и, следовательно, условие факторизации (4)).

Замечание 2. На произвольном графе (с петлями) факторизация (4) и, одновременно, деформация (1) существуют, если и только если коцикл χ_{X_1, X_2} когомологичен нулю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Новиков С. П. // УМН. 1997. Т. 52. № 6. С. 178–179. [2] Novikov S. P. Schrödinger operators on graphs and symplectic geometry // Специальный выпуск института Филдса (Торонто, 1999), посв. 60-летию В. И. Арнольда. [3] Чехов Л. О. // УМН. 1999. Т. 54. № 6. С. 109–148. [4] Новиков С. П., Дынников И. А. // УМН. 1997. Т. 52. № 5. С. 175–234. [5] Кричевер И. М., Новиков С. П. // УМН. 1999. Т. 54. № 6. С. 149–150.