Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Чалых, Преобразования Дарбу для многомерных операторов Шрёдингера, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 2, 167–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm33>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 13:25:28

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДАРБУ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ОПЕРАТОРОВ ШРЁДИНГЕРА

О. А. ЧАЛЫХ

Рассмотрим конечный набор A различных гиперплоскостей в $\mathbb{C}^n$, каждая из которых определяется уравнением вида

$$\alpha(x) = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0, \quad a_i \in \mathbb{C},$$

и предполагается неизотропной, т.е. нормаль $\alpha^\perp = (a_1, \dots, a_n)$ имеет ненулевой квадрат: $(\alpha^\perp, \alpha^\perp) = a_1^2 + \dots + a_n^2 \neq 0$. Пусть каждой гиперплоскости $\alpha \in A$ приписана кратность $m_\alpha \in \mathbb{Z}_+$. Такой конфигурации гиперплоскостей сопоставим следующий оператор Шрёдингера в $\mathbb{C}^n$:

$$L_A = \Delta - u(x),$$

где

$$u(x) = \sum_{\alpha \in A} \frac{m_\alpha(m_\alpha + 1)(\alpha^\perp, \alpha^\perp)}{(\alpha(x))^2}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Мы хотим описать те из операторов L_A , которые связаны с оператором Лапласа $L_0 = \Delta$ некоторым преобразованием Дарбу. Под этим мы понимаем наличие дифференциального оператора $D(x, \partial/\partial x)$ такого, что

$$L_A \circ D = D \circ L_0.$$

В размерности $n = 1$ это эквивалентно тому, что оператор L_A получается из L_0 конечным числом классических преобразований Дарбу (см., например, [1]). Отметим, что существование сплетающего оператора D эквивалентно наличию у L_A собственной функции ψ вида $\psi(k, x) = P(k, x) \exp(k_1 x_1 + \dots + k_n x_n)$, где $P(k, x)$ — полином по $k = (k_1, \dots, k_n)$, $L_A \psi = k^2 \psi$: чтобы получить ψ , надо подействовать оператором D на $\exp(k, x)$.

Для того, чтобы сформулировать соответствующие условия на конфигурацию, разложим потенциал $u(x)$ в ряд Лорана по нормали к гиперплоскости $\alpha \in A$, т.е. по степеням $z = \alpha(x)$: $u = m_\alpha(m_\alpha + 1)(\alpha^\perp, \alpha^\perp)z^{-2} + \sum_{i \geq 0} c_i z^i$, где c_i — функции на гиперплоскости $\alpha(x) = 0$. Можно показать, что также как и в одномерном случае [1], необходимым условием существования сплетающего оператора D является обнуление коэффициентов $c_1, c_3, \dots, c_{2m_\alpha-1}$ на соответствующей гиперплоскости (см. [2]). Оказывается, это условие является и *достаточным*.

ТЕОРЕМА 1. *Если в лорановском разложении потенциала u по нормали к любой из гиперплоскостей $\alpha \in A$ отсутствуют нечетные степени z^{2j-1} с $j = 1, 2, \dots, m_\alpha$, то оператор L_A связан с оператором Лапласа некоторым преобразованием Дарбу.*

Условия теоремы эквивалентны следующим алгебраическим соотношениям для набора $\{\alpha, m_\alpha\}$: на любой гиперплоскости $\alpha(x) = 0$ следующее выражение есть тождественный ноль:

$$\sum_{\beta \in A \setminus \alpha} m_\beta(m_\beta + 1)(\beta^\perp, \beta^\perp)(\alpha^\perp, \beta^\perp)^{2j-1}(\beta(x))^{-2j-1} \equiv 0 \quad \text{при } j = 1, \dots, m_\alpha.$$

(Ср. с [1], где эти соотношения были получены в случае $n = 1$.)

Для доказательства теоремы рассмотрим следующее *линейное пространство* V , которое состоит из всевозможных функций $f(k, x)$ со следующими аналитическими свойствами: 1) f имеет вид $Q(k, x) \prod_{\alpha \in A} (\alpha(x))^{-m_\alpha} \exp(k, x)$, где Q — многочлен по k и x ; 2) в лорановском разложении f как функции от x по нормали к любой из гиперплоскостей $\alpha \in A$ отсутствуют члены вида z^{2j-1-m_α} с $j = 1, \dots, m_\alpha$.

Следующее наблюдение является ключевым и немедленно вытекает из свойств лорановских разложений для $u(x)$ и $f \in V$:

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 96-01-01404 и 96-15-96027) и INTAS (грант №№ 93-166-ext и N96-0770).

ЛЕММА. В предположениях теоремы 1 пространство V инвариантно относительно действия оператора L_A .

Рассмотрим теперь функцию $f_0 = \prod_{\alpha \in A} (\alpha(x))^{m_\alpha} \exp(k, x)$, очевидно, лежащую в V . Согласно лемме, для любого $i > 0$ функция $f_i = (L_A - k^2)^i f_0$ также лежит в V . При этом f_i имеет вид $Q_i \prod_{\alpha \in A} (\alpha(x))^{-m_\alpha} \exp(k, x)$, где степени по x многочленов Q_i монотонно убывают с возрастанием i . Значит, для некоторого M $f_M \neq 0$, а $f_{M+1} = (L_A - k^2)f_M = 0$. Поэтому $\psi = f_M$ является собственной для оператора L_A , что и доказывает теорему.

Нетрудно показать, что на самом деле $M = \sum_{\alpha \in A} m_\alpha$, тем самым ψ -функция задается следующей явной формулой: $\psi = (L_A - k^2)^M [\prod_{\alpha \in A} (\alpha(x))^{m_\alpha} \exp(k, x)]$. Эта замечательная формула возникла впервые (в предположениях существования ψ) у Ю. Ю. Береста [3], и именно она подсказала основную идею данной работы.

Справедлив также следующий тригонометрический аналог теоремы 1, когда данному (конечному) набору гиперплоскостей в $\mathbb{C}^n$ сопоставляется оператор $L_A^\omega = \Delta - u(x)$, где $u(x) = \sum_{\alpha \in A} \frac{m_\alpha(m_\alpha+1)\omega^2(\alpha^\perp, \alpha^\perp)}{\sin^2 \omega \alpha(x)}$, $\omega \neq 0$ – произвольный параметр. Мы предполагаем, что $u(x)$ имеет n (линейно независимых над $\mathbb{C}$) периодов $t_1, \dots, t_n$, $(\omega \alpha^\perp, t_i) \in \pi \mathbb{Z}$ для всех α , а также, что при $\alpha \neq \beta$ и $l, m \in \mathbb{Z}$ гиперплоскости $\alpha(x) = l\pi/\omega$ и $\beta(x) = m\pi/\omega$ различны.

ТЕОРЕМА 2. Если для тригонометрического потенциала $u(x)$ условия теоремы 1 выполняются на любой из гиперплоскостей $\alpha(x) = l\pi/\omega$ с $l \in \mathbb{Z}$, то соответствующий оператор L_A^ω связан с оператором Лапласа некоторым преобразованием Дарбу D с периодическими коэффициентами.

Доказательство основывается на той же идее, но выражение для ψ -функции имеет более сложный вид. В случае $n = 1$ утверждение теоремы ранее было получено другим способом [4] на основании результатов [5].

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Естественные примеры конфигураций, удовлетворяющих условиям теорем 1 и 2, доставляют зеркала групп Кокстера и, соответственно, системы корней с инвариантными кратностями m_α . В этом случае известен другой способ получения ψ -функции с помощью так называемых операторов сдвига [6], [7]. Наш подход дает новый способ построения таких операторов. Другие примеры конфигураций см. в работах [5], [8].

2) Используя результаты [2] и [9], можно показать, что теорема 1 описывает все операторы Шрёдингера с рациональным потенциалом, которые связаны с оператором Лапласа некоторым преобразованием Дарбу.

Я глубоко признателен Ю. Ю. Бересту, А. П. Веселову и М. В. Фейгину за чрезвычайно плодотворные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Duistermaat J. J., Grünbaum F. A. // Comm. Math. Phys. 1986. V. 103. P. 177–240.
- [2] Фейгин М. В. Дипломная работа. М.: МГУ, 1997. [3] Berest Yu. // CRM Proceedings and Lecture Notes 1998. V. 14. P. 9–28. [4] Берест Ю. Ю., Веселов А. П. Частное сообщение.
- [5] Berest Yu. // Comm. Pure Appl. Math. 1997. V. 50. № 10. P. 1021–1054. [6] Opdam E. M. // Compositio Math. 1988. V. 67. № 2. P. 191–209. [7] Heckman G. J. // Progr. Math. 1991. V. 101. P. 181–191. [8] Веселов А. П., Фейгин М. В., Чалых О. А. // УМН. 1996. Т. 51. № 3. С. 185–186. [9] Берест Ю. Ю., Веселов А. П. // УМН. 1998. Т. 53. № 1. С. 211–212.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
22.01.1998