Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Шатаев, Минимизация относительной энтропии в задаче нахождения мартигальной меры, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 5, 183–184

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm330>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 15:48:53

МИНИМИЗАЦИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ В ЗАДАЧЕ НАХОЖДЕНИЯ МАРТИНГАЛЬНОЙ МЕРЫ

О. В. ШАТАЕВ

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – исходное вероятностное пространство, $h = (h_n)_{1 \leq n \leq N}$ – действительно-значные случайные величины, имеющие непрерывное совместное распределение со всюду ненулевой плотностью $f_0(x_1, \dots, x_N) > 0$.

Через $\mathcal{F}_n$ обозначаем σ -алгебры $\sigma(h_1, \dots, h_n)$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

Будем интерпретировать $S_n = S_0 e^{h_1 + \dots + h_n}$ как значение цены акции в момент времени $n = 1, \dots, N$, а $B_n \equiv 1$ – как цену облигации. Обозначим $\mathcal{P}(P)$ – множество всех эквивалентных исходной мере P вероятностных мер таких, что $\left(\frac{S_n}{B_n}\right)$ – мартингал относительно фильтрации

$\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)$. Меры $\tilde{P} \in \mathcal{P}(P)$ будем называть *мартингальными*.

Мы рассматриваем проблему нахождения плотности $f(x_1, \dots, x_N)$ совместного распределения $h_1, \dots, h_N$, соответствующего мартингальной мере $\tilde{P} \in \mathcal{P}(P)$, удовлетворяющей условиям

$$(1) \quad E_{\tilde{P}} G_i(S_1, \dots, S_N) = \int G_i f dx_1 \cdots dx_N = C_i, \quad 1 \leq i \leq M,$$

где G_i – заданные функции, интерпретируемые как дисконтированные платежные функции некоторых опционов, а C_i – заданные значения их цен на момент времени 0.

Исходя из условий (1) плотность f определена неоднозначно. Поэтому, следуя [10], выберем плотность, минимизирующую расстояние Кульбака–Лейблера (относительную энтропию)

$$(2) \quad H(f | f_0) = \int f \log\left(\frac{f}{f_0}\right) dx_1 \cdots dx_N,$$

где f_0 – априорная плотность вероятностного распределения.

Учитывая, что условия мартингальности $\left(\frac{S_n}{B_n}\right)$ в терминах плотности распределения принимают вид

$$(3) \quad \int (e^{x_{i+1}} - 1) f(h_1, \dots, h_i, x_{i+1}, \dots, x_N) dx_{i+1} \cdots dx_N = 0 \quad P\text{-п.н.},$$

а функционал $H(f | f_0)$ выпукл по f , заметим, что мы решаем задачу минимизации выпуклого ограниченного снизу функционала при линейных ограничениях. Таким образом, по теореме Куна–Таккера о седловой точке наша задача эквивалентна нахождению

$$(4) \quad \inf_{\lambda_i, p_j} \inf_{\mu} \sup_f \left[-H(f | f_0) + \sum_j \int p_j(x_1, \dots, x_j) (e^{x_{j+1}} - 1) f dx_1 \cdots dx_N \right. \\ \left. + \sum_i \lambda_i \left(\int G_i f dx_1 \cdots dx_N - C_i \right) + \mu \left(\int f dx_1 \cdots dx_N - 1 \right) \right].$$

Для начала, зафиксировав λ, p и μ , найдем методами вариационного исчисления функцию $f_{\lambda, p, \mu}$, максимизирующую лагранжиан: $f_{\lambda, p, \mu} = f_0 \exp\{-1 + \mu + \sum_j p_j (e^{x_{j+1}} - 1) + \sum_i \lambda_i G_i\}$. Затем подставим в лагранжиан $f_{\lambda, p, \mu}$ и определим плотность $f_{\lambda, p}$, минимизирующую полученное выражение по μ :

$$(5) \quad f_{\lambda, p} = \frac{1}{Z(\lambda, p)} f_0 e^{\sum_j p_j (e^{x_{j+1}} - 1) + \sum_i \lambda_i G_i},$$

где $Z(\lambda, p)$ – нормализующий множитель

$$Z(\lambda, p) = \int f_0 e^{\sum_j p_j (e^{x_{j+1}} - 1) + \sum_i \lambda_i G_i} dx_1 \cdots dx_N.$$

Подставляя (5) в (4), находим, что оптимизация методом множителей Лагранжа эквивалентна минимизации по p и λ выражения

$$(6) \quad \log(Z(\lambda, p)) - \sum_i \lambda_i C_i$$

по всем значениям $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_M)$, p_0 и всем ограниченным измеримым функциям $p_1(x_1), \dots, p_{N-1}(x_1, \dots, x_{N-1})$. Условия первого порядка на минимум:

$$(7) \quad \frac{1}{Z(\lambda, p)} \frac{\partial Z(\lambda, p)}{\partial \lambda_i} = C_i, \quad i = 1, \dots, M,$$

$$(8) \quad \int (e^{x_{k+1}} - 1) f_0 e^{\sum_{j=k}^{N-1} p_j(e^{x_{j+1}} - 1) + \sum_i \lambda_i G_i} dx_{k+1} \cdots dx_N \equiv 0, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Интересно, что если при фиксированном λ вычислять p_k , начиная с $k = N-1$ и заканчивая $k = 0$, то на каждом k -м шаге вычислений при фиксированных $x_1, \dots, x_k$ значение $p_k(x_1, \dots, x_k)$ может быть найдено как скалярная переменная из уравнения с одним неизвестным.

Например, в случае одношаговой модели при экспоненциально распределенном e^{h_1} с параметром 1 и при условии $S_0 = K$ для опциона европейского типа с платежной функцией $G_1 = (K - S_1)^+$ уравнения (7) и (8) принимают вид:

$$\begin{aligned} & -\frac{S_0 e^{-1}}{(p_0 - 1 - S_0 \lambda_1)^2} + \frac{S_0 e^{S_0 \lambda_1 - p_0}}{(p_0 - 1 - S_0 \lambda_1)^2} + \frac{S_0 e^{S_0 \lambda_1 - p_0}}{p_0 - 1 - S_0 \lambda_1} = C_1, \\ & e^{-1} \left(\frac{1}{p_0 - 1 - S_0 \lambda_1} - \frac{1}{p_0 - 1} \right) - \frac{e^{S_0 \lambda_1 - p_0}}{p_0 - 1 - S_0 \lambda_1} \\ & \frac{(p_0 - S_0 \lambda_1) e^{S_0 \lambda_1 - p_0} - e^{-1}}{(p_0 - 1 - S_0 \lambda_1)^2} + \frac{e^{-1}}{(p_0 - 1)^2} = 0. \end{aligned}$$

Суммируем результаты этой работы в виде следующего утверждения.

ТЕОРЕМА. Плотность $f_{\lambda, p}$ распределения, соответствующего минимизирующей относительную энтропию мартингальной мере, является представителем бесконечномерного параметрического семейства, заданного выражением (5). Причем параметры удовлетворяют уравнениям (7) и (8).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. [2] Мельников А. В. Финансовые рынки. Стохастический анализ и расчет производных ценных бумаг. М.: Т.В.П., 1997. [3] Рокафеллар Р. Т. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. [4] Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1989. [5] Ширяев А. Н. // Теория вероятн. и ее примен. 1994. Т. 39. № 1. С. 5–22. [6] Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1, 2. М.: ФАЗИС, 1998. [7] Ширяев А. Н., Кабанов Ю. М., Крамков Д. О., Мельников А. В. // Теория вероятн. и ее примен. 1994. Т. 39. № 1. С. 23–79. [8] Avellaneda M. The Minimum-Entropy Algorithm and Related Methods for Calibrating Asset-Pricing Model // Preprint, 1998. P. 51–73. [9] Bollerslev T. // J. Econometrics. 1986. № 31. P. 307–327. [10] Buchen P. W., Kelly M. // J. Financial Quantitative Anal.. V. 31. № 1. [11] Duan J. // Math. Finance. 1995. № 5. P. 13–32. [12] Rockafellar R. T. Convex Analysis. Princeton: Princeton Univ. Press, 1970.

Принято редколлегией
07.09.2000