Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Б. Шпиз, Решение алгебраических уравнений в идемпотентных полуполях,
УМН, 2000, том 55, выпуск 5, 185–186

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm331>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 17:10:30

РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ИДЕМПОТЕНТНЫХ ПОЛУПОЛЯХ

Г. Б. Шпиз

В заметке в рамках идемпотентной математики [1]–[3] изучается вопрос о существовании решений у алгебраических уравнений. Доказывается теорема о существовании решения у алгебраического уравнения над коммутативным идемпотентным полуполем, т.е. идемпотентный аналог основной теоремы алгебры.

1. В настоящей работе используется терминология из [2], [3]. Напомним, что *полуполе* называется аддитивная полугруппа K с коммутативным сложением $\oplus$ и нулем 0 , снабженная таким ассоциативным дистрибутивным умножением $\odot$ с единицей 1 , что любой ненулевой элемент $k \in K$ обратим. *Идемпотентным полуполем* (ИПП) называется полуполе, в котором для любого элемента x выполнено соотношение $x \oplus x = x$. Любое ИПП будет рассматриваться как упорядоченное множество относительно стандартного (частичного) порядка: $x \preceq y$ тогда и только тогда, когда $x \oplus y = y$. При этом $x \oplus y = \sup(x, y)$. Для произвольного подмножества X идемпотентного полуполя положим $\oplus X = \sup(X)$ и $\wedge X = \inf(X)$, если правые части равенств существуют. Множество всех ненулевых элементов ИПП является решеточно упорядоченной группой. Из теории упорядоченных групп (см. [4]) вытекает, что коммутативное ИПП является дистрибутивной решеткой, т.е. для любых элементов определены их точные нижняя и верхняя грани и $a \wedge (\oplus X) = \oplus(a \wedge X)$ для любого элемента a и конечного подмножества X . Для каждого идемпотентного полуполя K можно определить дуальное полуполе $K^\star$, заданное на том же множестве, полагая, что умножение в $K^\star$ унаследовано от K , 0 остается нулем, а сложение на ненулевых элементах совпадает с операцией $\wedge$, т.е. задается дуальным порядком.

Отображение f полуполя K в себя будем называть *инверсно изотонным*, если из $f(x) \preceq f(y)$ вытекает, что $x \preceq y$, и *порядковым автоморфизмом*, если оно является автоморфизмом упорядоченного пространства K . Порядковый автоморфизм, обратный к автоморфизму f , будем обозначать f^{-1} .

2. В дальнейшем все полуполя предполагаются идемпотентными. ИПП называется *алгебраически замкнутым* (см. [5]), если из любого его элемента можно извлечь корень любой положительной степени. ИПП, дуальное к алгебраически замкнутому, само является алгебраически замкнутым.

Пусть K – коммутативное ИПП, a – ненулевой элемент K , r – положительное целое число. Определим отображение $m_{a,r}: K \rightarrow K$, положив $m_{a,r}(x) = a \odot x^r$. Будем называть *мономами* степени r над полуполем K отображения вида $m_{a,r}$. Если ИПП алгебраически замкнуто, то мономы ненулевой степени являются порядковыми автоморфизмами. Конечную сумму мономов вида $\bigoplus_{i=0}^n a_i \odot x^i$ будем называть *многочленом* над полуполем K .

ЛЕММА. Пусть K – коммутативное ИПП и M – конечное множество мономов ненулевой степени над K . Тогда отображения $\oplus M$ и $\wedge M$ являются инверсно изотонными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сгруппировав мономы с одинаковыми степенями, запишем $\oplus M$ в виде многочлена без свободного члена: $(\oplus M)(x) = P(x) = \bigoplus_{i=1}^n p_i \odot x^i$. Пусть $x, y \in K$ и $P(x) \succeq P(y)$. Докажем, что $x \succeq y$. Достаточно рассмотреть случай $x \oplus y \neq 0$. Положим $P(x) = x \odot Q(x)$. Так как $(x \oplus y)^n = \bigoplus_{i=0}^n x^i \odot y^{n-i} = y^n \oplus x \odot \bigoplus_{i=0}^{n-1} x^i \odot y^{n-i-1} = x \odot (x \oplus y)^{n-1} \oplus y^n$, то $P(x \oplus y) = x \odot Q(x \oplus y) \oplus P(y)$. Но $x \odot Q(x \oplus y) \succeq P(x) \succeq P(y)$. Поэтому $P(x \oplus y) = x \odot Q(x \oplus y)$, откуда $(x \oplus y) \odot Q(x \oplus y) = x \odot Q(x \oplus y)$. Сокращая на $Q(x \oplus y)$, получаем $x \oplus y = x$, т.е. $x \succeq y$, что и требовалось. Таким образом, отображение $\oplus M$ является инверсно изотонным. Рассматривая дуальное полуполе, получим утверждение леммы для $\wedge M$. Лемма доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-01198).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть f, g – порядковые автоморфизмы коммутативного полуполя K . Если отображения $f \oplus g, f \wedge g, f^{-1} \oplus g^{-1}$ и $f^{-1} \wedge g^{-1}$ являются инверсно изотонными, то $f \oplus g$ – порядковый автоморфизм и $(f \oplus g)^{-1} = f^{-1} \wedge g^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из инверсной изотонности $f \oplus g$ и неравенства $(f \oplus g)(f^{-1} \odot g \oplus g^{-1} \odot f)(x) \succeq (f \oplus g)(x)$ следует, что $f^{-1}g(x) \oplus g^{-1}f(x) \succeq x$. Используя дистрибутивность решетки K , получим, что $(f^{-1} \oplus g^{-1})(f \wedge g)(x) = x \wedge (f^{-1}g(x) \oplus g^{-1}f(x)) = x$. Рассматривая дуальное полуполе, получим, что $(f^{-1} \wedge g^{-1})(f \oplus g)(x) = x$ при $x \in K$. Таким образом, отображения $(f^{-1} \wedge g^{-1})$ и $f \oplus g$ взаимно обратны и изотонны, что и требовалось.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть M – конечное множество мономов ненулевой степени над алгебраически замкнутым коммутативным идемпотентным полуполем K . Тогда отображение $\oplus M$ обратимо и $(\oplus M)^{-1} = \bigwedge_{m \in M} m^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по количеству элементов в M . Если M содержит один элемент, то утверждение очевидно. Пусть теперь $M = N \cup f, F = \bigoplus N$. По предположению индукции F – порядковый автоморфизм и $F^{-1} = \bigwedge_{m \in N} m^{-1}$. В силу предложения 2, условия которого выполнены в силу леммы, получаем $(\oplus M)^{-1} = (F \oplus f)^{-1} = (F^{-1} \wedge f^{-1}) = \bigwedge_{m \in M} m^{-1}$, что и требовалось.

Следующая теорема является аналогом основной теоремы алгебры.

ТЕОРЕМА. Пусть $P(x) = \bigoplus_{i=0}^n p_i \odot x^i$ – многочлен ненулевой степени над коммутативным алгебраически замкнутым идемпотентным полуполем K и $c \in K$. Тогда уравнение $P(x) = c$ имеет решение в K тогда и только тогда, когда $c \succeq p_0$. Если $p_0 = 0$, то решение единственно и выражается через коэффициенты при помощи радикалов, операций умножения, взятия обратного элемента и точной нижней грани (т.е. является полиномом от радикалов коэффициентов в дуальном к K полуполе).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $p_0 = 0$, то утверждение теоремы вытекает из предложения 2, так как $P(x)$ является суммой мономов ненулевой степени. То, что при $c < p_0$ решений нет, вытекает из неравенства $P(x) \succeq p_0$, верного при любом $x \in K$. Обозначим через $Q(x)$ сумму всех членов многочлена $P(x)$, имеющих ненулевую степень. Тогда $P(x) = Q(x) \oplus p_0$. Поэтому при $c \succeq p_0$ любое решение уравнения $Q(x) = c$ является решением уравнения $P(x) = c$. Так как $Q(x)$ является многочленом без свободного члена, уравнение $Q(x) = c$ (а значит, и уравнение $P(x) = c$) имеет решение. Теорема доказана.

Отметим, что $\{x \mid P(x) = c\} = \bigcup_{b \oplus p_0 = c} \{x \mid Q(x) = b\}$. Поэтому если в условиях теоремы полуполе K линейно упорядочено и $c \succeq p_0$, то все решения уравнения $P(x) = c$ являются решениями уравнения $Q(x) = c$. В частности, уравнение $P(x) = c$ имеет единственное решение.

Автор благодарен Г. Л. Литвинову и В. П. Маслову за помощь и поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Kolokoltsov V. N., Maslov V. P. Idempotent Analysis and Applications. Dordrecht: Kluwer, 1997. [2] Литвинов Г. Л., Маслов В. П., Шпиз Г. Б. // Докл. РАН. 1998. Т. 363. № 3. С. 298–300. [3] Литвинов Г. Л., Маслов В. П., Шпиз Г. Б. // Матем. заметки. 1999. Т. 65. № 4. С. 572–585. [4] Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. М.: Мир, 1965. [5] Дудников П. С., Самборский С. Н. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 1. С. 93–109.

Международный центр “Софус Ли”, Москва
E-mail: shpiz@theory.npi.msu.su

Принято редколлегией
07.09.2000