Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Г. Гриневич, Преобразование рассеяния для двумерного оператора Шрёдингера с убывающим на бесконечности потенциалом при фиксированной ненулевой энергии, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 6, 3–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm333>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 09:41:38

УДК 517.958+517.984.54

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАССЕЙНИЯ
ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА
С УБЫВАЮЩИМ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ПОТЕНЦИАЛОМ
ПРИ ФИКСИРОВАННОЙ НЕНУЛЕВОЙ ЭНЕРГИИ

П. Г. ГРИНЕВИЧ

В работе исследуется задача восстановления потенциала двумерного оператора Шрёдингера по данным рассеяния, измеренным при одной энергии.

Поскольку, в отличие от общей многомерной обратной задачи, изучаемый случай обладает бесконечномерной алгеброй симметрий, порождаемой иерархией уравнений Веселова–Новикова, он оказывается в некотором смысле “точно решаемым”, и удастся получить ответ, по степени сложности примерно соответствующий одномерной проблеме. При этом активно используются методы, возникшие в современной теории солитонов.

Поскольку квантовая задача рассеяния при одной энергии и акустическая задача рассеяния при одной частоте математически эквивалентны, результаты работы применимы в обоих случаях.

Библиография: 93 названия.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	4
2. Квантовая задача рассеяния: основные определения. Акустическая задача рассеяния	7
3. Преобразование рассеяния при фиксированной положительной энергии для двумерного оператора Шрёдингера с убывающим на бесконечности потенциалом.	13
3.1. Прямое преобразование рассеяния	14
3.2. Обратное преобразование рассеяния	21
3.3. Условия потенциальности и вещественности	24
3.4. Связь с физической задачей рассеяния. Прозрачные при одной энергии потенциалы	26
3.5. Обратное преобразование рассеяния в пределе малой амплитуды (борновское приближение)	29
4. Дополнительные условия на данные рассеяния для быстроубывающих на бесконечности потенциалов. Быстроубывающие потенциалы, прозрачные при одной энергии	29
4.1. Условия на данные рассеяния для быстроубывающих потенциалов. Прямая задача	29

4.2. Условия непрерывности для центральных потенциалов	35
4.3. Построение потенциалов, прозрачных при одной энергии	36
5. Рациональные потенциалы, безотражательные при фиксированной энергии	43
5.1. Алгебраическая схема построения рациональных солитонов	45
5.2. Редукции на данные рассеяния	48
5.3. Явные формулы для потенциалов. Сведение к пфаффианам	51
6. Задача рассеяния при фиксированной отрицательной энергии	56
7. Заключительные замечания	63
7.1. Задача Коши для уравнения Веселова–Новикова в классе потенциалов, выходящих на бесконечности на ненулевую константу	63
7.2. Убывающие потенциалы на конечнозонном фоне и $\bar{\partial}$ -проблема на римановых поверхностях	64
7.3. Обратная задача при $\epsilon_0 = 0$ —	65
7.4. Предельный переход к нестационарному одномерному оператору Шрёдингера и параболическому оператору	66
Список литературы	67

1. Введение

Одним из важнейших разделов математической физики является теория рассеяния. Достаточно упомянуть, что исследование процессов рассеяния частиц служит основным источником наших знаний о микромире, начиная со знаменитых опытов Резерфорда, приведших к открытию атомного ядра, и кончая современными ускорительными экспериментами. Представление процессов взаимодействия как совокупности элементарных актов рассеяния широко используется в квантовой механике и квантовой теории поля (диаграммы Фейнмана). Рассеяние частиц на кристаллах — один из важнейших экспериментальных инструментов в физике твердого тела и конденсированных сред (достаточно хотя бы упомянуть присуждение в 1994 году Нобелевской премии по физике Б. Брокхаузу и К. Шуллеру за “пионерский вклад в разработку техники для исследования конденсированных сред, использующей рассеяние нейтронов”). Задачи теории рассеяния естественно возникают в оптике, в геофизике, когда по данным сейсмических измерений восстанавливают структуру Земли, в акустической томографии. Этот список можно было бы легко продолжить. В качестве общего введения в теорию рассеяния можно порекомендовать монографию [67]. Подробное изложение математических вопросов теории рассеяния содержится в [76], [53].

Напомним типичную постановку задачи рассеяния. Пусть имеется система частиц (или волновых пакетов) такая, что при $t \rightarrow \pm\infty$ взаимодействием между ними можно пренебречь (например, если расстояние между частицами на больших временах велико, а потенциал взаимодействия достаточно быстро убывает на бесконечности). Тогда асимптотическое поведение системы при $t \rightarrow -\infty$ и при $t \rightarrow +\infty$ можно описать как динамику набора свободных (невзаимодействующих) частиц, однако возникающие при $t \rightarrow -\infty$ и $t \rightarrow +\infty$ состояния нетривиально связаны друг с другом.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-01-01161) и фонда INTAS (грант № 99-01782).

Оператор, выражающий асимптотику системы при $t \rightarrow +\infty$ через асимптотику при $t \rightarrow -\infty$, называется оператором рассеяния, а его параметры – данными рассеяния.

Поскольку теория рассеяния включает в себя большое количество задач, существенно различающихся как по постановке, так и по методам их решения, она естественно распадается на ряд разделов в зависимости от того, какие физические процессы при этом исследуются и какие уравнения используются для их моделирования. К ним относятся, в частности, задача рассеяния в классической механике, оптическая задача рассеяния и задача рассеяния электромагнитных волн, акустическая задача рассеяния, квантовая задача рассеяния. Кроме того, естественно различать *прямую задачу теории рассеяния*, состоящую в вычислении оператора рассеяния в предположении, что потенциал взаимодействия известен, и *обратную задачу теории рассеяния*, состоящую в вычислении параметров взаимодействия по известному оператору рассеяния (именно такая постановка обычно возникает при анализе экспериментальных данных).

Дополнительный толчок к исследованию математических вопросов теории рассеяния дала работа Гарднера, Грина, Крускала и Миуры [31] 1967 года, в которой уравнение Кортевега–де Фриза (КдФ)

$$(1) \quad u_t = \frac{1}{4}u_{xxx} - \frac{3}{2}uu_x, \quad u = u(x, t),$$

в классе убывающих при $x \rightarrow \infty$ потенциалов было проинтегрировано при помощи преобразования рассеяния для одномерного оператора Шрёдингера по переменной x , зависящего от дополнительного параметра t . (В литературе часто встречаются другие нормировки КдФ, отличающиеся от (1) на масштабное преобразование.) В [31] было показано, что если вместо функции $u(x, t)$ в качестве новых переменных взять ее данные рассеяния, то уравнение КдФ записывается как бесконечная система невзаимодействующих линейных осцилляторов; т.е. оно приводится в точности к такому же виду, к какому произвольная линейная система с постоянными коэффициентами приводится преобразованием Фурье. Алгебраическая основа такой интегрируемости была вскрыта в 1968 году П. Лаксом [51], показавшим, что уравнение КдФ можно записать как уравнение на динамику оператора Шрёдингера:

$$(2) \quad \frac{\partial L}{\partial t} = [L, A],$$

где

$$L = -\partial_x^2 + u(x, t), \quad A = \partial_x^3 - \frac{3}{4}(u(x, t)\partial_x + \partial_x u(x, t)),$$

$[A, B] = AB - BA$ – коммутатор линейных операторов. Представление (2) называется *представлением Лакса* или *парой Лакса* для КдФ.

Полезно отметить, что хотя уравнение КдФ и приводится к линейному виду преобразованием рассеяния, эта замена переменных достаточно сложно устроена и ее существование вовсе не означает, что мы имеем линейную систему, только записанную в неудачных координатах. На самом деле динамика КдФ существенно нелинейна (см., например, [3], [12], [89]).

Дальнейшие исследования 70-х годов (большой вклад в которые внесли ученые из тогдашнего Советского Союза) показали, что уравнение КдФ – лишь одно

из многочисленного класса нелинейных уравнений, интегрируемых при помощи задачи рассеяния для вспомогательного линейного оператора (часто понимаемой в обобщенном смысле). Эти уравнения нередко называют солитонными системами, что не обязательно означает существование неособых солитонных решений. В частности, аналоги представления Лакса были найдены для Нелинейного Уравнения Шрёдингера (В. Е. Захаров, А. Б. Шабат [90], 1971 г.), уравнения Синус-Гордон (М. Абловиц, Д. Кауп, А. Ньюэлл, Х. Сигур [1], 1973 г.; Л. А. Тахтаджан [82], 1974 г.), уравнения Кадомцева–Петвиашвили (В. С. Дрюма [16]; В. Е. Захаров, А. Б. Шабат [91], 1974 г.). Достаточно обширный список солитонных уравнений содержится в монографии [12], однако, поскольку число таких систем все время возрастает, в настоящий момент он уже не полон. Успехи, достигнутые в этом направлении, привели к возникновению новой области математической физики – *метода обратной задачи рассеяния* в теории солитонов. Термин “обратная задача” употребляется потому, что обычно в первую очередь решается не задача Коши, а несколько более простая задача построения достаточно большого запаса решений (по возможности, даваемых явными формулами). Если для решения задачи Коши требуется как прямое, так и обратное преобразование рассеяния, то при построении частных решений данные рассеяния в начальный момент времени можно выбирать более или менее произвольно (следя при этом, чтобы они были допустимыми), и все сводится к решению обратной задачи рассеяния (хотя бы для каких-то специальных классов данных рассеяния, выдерживающих временную динамику). Стоит также отметить, что задача выбора допустимых данных рассеяния сама по себе может оказаться достаточно сложной.

Развитие теории интегрируемых систем, в свою очередь, привело к возникновению новых подходов к теории рассеяния, включая метод конечнозонного интегрирования, начало которому положила работа С. П. Новикова [74], а также работы Б. А. Дубровина [17], А. Р. Итса, В. Б. Матвеева [44], П. Лакса [52], Г. Мак-Кина и П. Ван Мербеке [59] и ряда других авторов (см., например, обзор [19]), среди которых хотелось бы особо отметить И. М. Кричевера; метод нелокальной задачи Римана [56] С. В. Манакова, см. также [87]; метод $\bar{\partial}$ -проблемы Р. Билза, Р. Койфмана [5], М. Абловица, Д. Бар Якова, А. Фокаса [2].

Обычно в теории солитонов задача рассеяния используется как техническое средство, позволяющее строить решения нелинейных систем. Однако, в свою очередь, существование нетривиальных уравнений, интегрируемых при помощи данной задачи рассеяния, обычно означает наличие у нее большой (часто бесконечномерной) алгебры симметрий и служит указанием на ее “повышенную интегрируемость”.

Несложно проверяется (см., например, [89; дополнение 1]), что не удастся написать пару Лакса, включающую оператор Шрёдингера, в размерности выше 1. Это связано с переопределенностью обратной задачи рассеяния, которую мы обсудим несколько ниже. В то же время в 1976 году С. П. Новиков, Б. А. Дубровин и И. М. Кричевер в [18] предложили конструкцию двумерных операторов Шрёдингера, “конечнозонных при одной энергии”. Построенные в [18] операторы были, как правило, комплексными и содержали члены с первой производной, которая в квантовой механике соответствует магнитному полю. Задача выделения чисто потенциальных (не содержащих членов с первыми производными) и одновременно вещественных операторов оказалась достаточно сложной. Она была решена в 1984 году в работах А. П. Веселова и С. П. Новикова [86], [85]. Там же была найдена иерархия интегрируемых уравнений с 2 про-

странственными переменными (уравнения Веселова–Новикова), алгеброгеометрические решения которой строились по спектральным данным для двумерного оператора Шрёдингера, “снятым” с одной энергии.

Полученные результаты позволили С. П. Новикову предположить, что задача рассеяния для двумерного оператора Шрёдингера при одной энергии является “эффективно решаемой”, и предложить программу ее исследования с помощью разработанных к тому времени в теории солитонов методов. Ее реализации, в частности, были посвящены работы [34], [38]–[42], [69]–[71], часть из которых была выполнена автором совместно с Р. Г. Новиковым, С. В. Манаковым, С. П. Новиковым. Изложение полученных при этом результатов и является основной целью данной статьи.

2. Квантовая задача рассеяния: основные определения. Акустическая задача рассеяния

В нашей работе мы будем использовать термин “*квантовая задача рассеяния*”, подразумевая, что речь идет о теории *нерелятивистских бесспиновых* частиц, описываемых уравнением Шрёдингера. Мы ограничимся лишь изучением задачи рассеяния одной частицы на локализованном не зависящем от времени потенциале (и сводящейся к ней переходом в систему центра масс задачи о столкновении пары частиц).

Движение частицы в потенциальном поле описывается нестационарным уравнением Шрёдингера [49]

$$(3) \quad i\hbar \frac{\partial \hat{\Psi}(\vec{x}, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{x_j^2} + u(\vec{x}, t) \right] \hat{\Psi}(\vec{x}, t), \quad \text{где } \vec{x} = (x_1, \dots, x_n),$$

$u(\vec{x}, t)$ – вещественная функция.

Для упрощения формул положим $\hbar = 1$ и $2m = 1$ (этого всегда можно добиться масштабным преобразованием).

Если потенциал $u(\vec{x}, t)$ не зависит от времени, $u(\vec{x}, t) = u(\vec{x})$, то общее решение (3) естественно попытаться разложить по решениям с фиксированной энергией

$$\hat{\Psi}(\vec{x}, t) = \int d\mu(E) \Psi(E, \vec{x}) e^{-iEt},$$

где $\mu(E)$ – некоторая мера, $\Psi(E, \vec{x})$ – собственные функции стационарного оператора Шрёдингера

$$L = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{x_j^2} + u(\vec{x}),$$

$$L\Psi(E, \vec{x}) = E\Psi(E, \vec{x}),$$

что, в свою очередь, сводится к разложению $\hat{\Psi}(\vec{x}, t)|_{t=0}$ по собственным функциям оператора L . (В учебниках по квантовой механике оператор L , являющийся гамильтонианом задачи, часто обозначают буквой H .) Поскольку мы интересуемся, в основном, задачей рассеяния, мы будем считать, что потенциал $u(\vec{x})$ достаточно быстро убывает на бесконечности. Для этого случая задача о разложении по собственным функциям

была исследована в 1953 году А. Я. Повзнером [75]. Такое разложение заведомо возможно, если L самосопряжен. Это так, если потенциал $u(\vec{x})$ не слишком сингулярен (подробный анализ можно найти, в частности, в третьем томе [76]). Сильные сингулярности (как и медленное убывание на бесконечности) могут приводить к эффектам типа падения на центр, разрушающим самосопряженность, однако обсуждение этого вопроса увело бы нас слишком далеко в сторону, поэтому мы ограничимся случаем “хороших потенциалов” (достаточные условия приведены, например, в [76]).

В этих предположениях спектр L вещественен, причем дискретный спектр лежит в области неположительных энергий и конечно-кратен, а непрерывный заполняет всю положительную полуось, и его кратность бесконечна при $n > 1$.

В качестве базисных функций непрерывного спектра в теории рассеяния обычно используют решения $\Psi(\vec{k}, \vec{x})$, которые при $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ имеют асимптотику

$$(4) \quad \Psi(\vec{k}, \vec{x}) = e^{i(\vec{k}, \vec{x})} + f\left(\vec{k}, \frac{|\vec{k}|}{|\vec{x}|} \vec{x}\right) \frac{e^{i|\vec{k}||\vec{x}|}}{\sqrt{|\vec{x}|^{n-1}}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{|\vec{x}|^{n-1}}}\right),$$

где $\vec{k} \in \mathbb{R}^n$, $E = |\vec{k}|^2$, $f\left(\vec{k}, \frac{|\vec{k}|}{|\vec{x}|} \vec{x}\right)$ – некоторая заранее не известная функция. Первый член в правой части (4) – плоская волна с импульсом $\vec{k}$, второй – волна, расходящаяся от рассеивающего центра, т.е. мы имеем процесс рассеяния частицы с импульсом $\vec{k}$ до взаимодействия.

Согласно теореме Като [45] при любом вещественном $\vec{k} \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ решение с асимптотикой (4) существует и единственно. Отметим, что для фиксации решения постулировать асимптотику вида $\Psi(\vec{k}, \vec{x}) = e^{i(\vec{k}, \vec{x})} + o(1)$ было бы недостаточно, поскольку существует бесконечно много собственных функций L таких, что

$$\Psi(\vec{k}, \vec{x}) = e^{i(\vec{k}, \vec{x})} + g_1\left(\vec{k}, \frac{|\vec{k}|}{|\vec{x}|} \vec{x}\right) \frac{e^{i|\vec{k}||\vec{x}|}}{\sqrt{|\vec{x}|^{n-1}}} + g_2\left(\vec{k}, \frac{|\vec{k}|}{|\vec{x}|} \vec{x}\right) \frac{e^{-i|\vec{k}||\vec{x}|}}{\sqrt{|\vec{x}|^{n-1}}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{|\vec{x}|^{n-1}}}\right).$$

Условие отсутствия в асимптотике членов вида $g_2\left(\vec{k}, \frac{|\vec{k}|}{|\vec{x}|} \vec{x}\right) \frac{e^{-i|\vec{k}||\vec{x}|}}{\sqrt{|\vec{x}|^{n-1}}}$ называется *условием излучения* или *условием Зоммерфельда*.

Функции (4) совместно с функциями дискретного спектра образуют полный базис в пространстве $L^2(\mathbb{R}^n)$ (см. [75]).

Функция $f(\vec{k}, \vec{l})$, определенная при $\vec{k}, \vec{l} \in \mathbb{R}^n$, $|\vec{k}|^2 = |\vec{l}|^2$, называется *амплитудой рассеяния* для потенциала $u(\vec{x})$.

Оператором рассеяния или *S-матрицей* называется оператор $\hat{1} + \hat{S}$ с ядром

$$s(\vec{v}, \vec{v}') = \left(\sqrt{\frac{i|\vec{k}|}{2\pi}}\right)^{n-1} f(|\vec{k}|\vec{v}, |\vec{k}|\vec{v}'),$$

действующий на функциях на единичной сфере,

$$(\hat{S}f)(\vec{v}) = \int \cdots \int_{\vec{v}' \in S^{n-1}} s(\vec{v}, \vec{v}') f(\vec{v}') d\sigma,$$

где $d\sigma$ – стандартный элемент объема.

Из вещественности оператора L следует, что оператор $\widehat{1} + \widehat{S}$ унитарен (см., например, [49]):

$$(5) \quad (\widehat{1} + \widehat{S})(\widehat{1} + \widehat{S})^+ = \widehat{1}.$$

В терминах ядра $s(\vec{v}, \vec{v}')$ соотношение (5) приобретает вид:

$$s(\vec{v}, \vec{v}') + \bar{s}(\vec{v}', \vec{v}) + \int \cdots \int_{\vec{v}'' \in S^{n-1}} s(\vec{v}, \vec{v}'') \bar{s}(\vec{v}', \vec{v}'') d\sigma = 0.$$

В терминах $f(\vec{k}, \vec{l})$ оно записывается в следующем виде:

$$f(\vec{k}, \vec{l}) + (-i)^{n-1} \bar{f}(\vec{l}, \vec{k}) + \frac{1}{(\sqrt{2\pi i |\vec{k}|})^{n-1}} \int \cdots \int_{|\vec{k}''|=|\vec{k}|} f(\vec{k}, \vec{k}'') \bar{f}(\vec{l}, \vec{k}'') d\tilde{\sigma} = 0,$$

где $d\tilde{\sigma}$ – элемент объема на сфере радиуса $|\vec{k}|$.

Отсутствие в операторе L производных первого порядка (магнитного поля) влечет инвариантность процесса рассеяния относительно обращения времени. В терминах амплитуды рассеяния это означает следующую симметрию:

$$f(-\vec{l}, -\vec{k}) = f(\vec{k}, \vec{l}),$$

или, что эквивалентно,

$$s(-\vec{v}', -\vec{v}) = s(\vec{v}, \vec{v}').$$

Это свойство называется *свойством взаимности*.

Прямая задача рассеяния состоит в вычислении амплитуды рассеяния по потенциалу $u(\vec{x})$. *Обратная задача рассеяния* состоит в восстановлении потенциала по амплитуде рассеяния (и, возможно, данным, отвечающим дискретному спектру).

Одномерная задача рассеяния в размерности 1 была решена в 50-е годы в работах И. М. Гельфанда, Б. М. Левитана [32], [33] и В. А. Марченко [57]. Более строгое исследование этой задачи было проведено Л. Д. Фаддеевым (см. [22], [24], а также обзор [27]). Уточнение условий на скорость убывания потенциала при $|x| \rightarrow \infty$, гарантирующих применимость метода работ [22], [24], было осуществлено П. Дейфтом и Ю. Трубовицем [15]. Позднее В. А. Марченко [58] и А. Мелин [60] показали, что наложенные на потенциал в [22], [24] условия также достаточны для однозначной разрешимости обратной задачи.

В отличие от одномерной задачи, многомерная задача, решенная Л. Д. Фаддеевым [26], [27] (близкие результаты были получены независимо от него Р. Г. Ньютоном [66], см. также книги [68], [13]), оказывается существенно более сложной. Дело в том, что в n -мерном пространстве амплитуда рассеяния $f(\vec{k}, \vec{l})$, $|\vec{k}|^2 = |\vec{l}|^2$, – функция $2n-1$ вещественной переменной, по которой нужно восстановить функцию n вещественных переменных $u(\vec{x})$, т.е. исходные данные сильно переопределены. Условия совместности, найденные Л. Д. Фаддеевым [26], [27], означают согласованность треугольных факторизаций матрицы рассеяния вдоль различных направлений, что эквивалентно достаточно сложной системе нелинейных интегральных уравнений.

Трудности, возникающие при анализе условий совместности в многомерной задаче, стимулировали попытки найти для них альтернативные представления. Интересный подход, основанный на использовании метода $\bar{\partial}$ -проблемы, когда уравнения обратной задачи выписываются в терминах производных волновой функции по переменным $\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n$, был предложен в работе М. Абловица и А. Нахмана [61], Р. Билза, Р. Койфмана [6]. Этот подход был реализован в работах Р. Г. Новикова и Г. М. Хенкина [72], [73] с использованием развитой техники многомерного комплексного анализа, однако и в этом случае ответ получается достаточно сложный, и, по-видимому, существенно упростить его невозможно в принципе.

Отметим, что если нам известна амплитуда рассеяния при всех энергиях и мы априори знаем, что она отвечает некоторому потенциалу (т.е. условия совместности выполнены), то обратная задача в каком-то смысле тривиальна, поскольку при высоких энергиях многомерная задача рассеяния линеаризуется и амплитуда рассеяния переходит в преобразование Фурье потенциала $u(\vec{x})$

$$(6) \quad f(\vec{k}, \vec{l}) = \frac{(\sqrt{|\vec{k}|})^{n-3}}{2i(\sqrt{2\pi i})^{n-1}} \left[\int \dots \int e^{i(\vec{k}-\vec{l})\vec{x}} u(\vec{x}) dx_1 \dots dx_n + o(1) \right]$$

(Л. Д. Фаддеев [21]). Однако практическое использование высокоэнергетического предела часто затруднено, поскольку, во-первых, измерения в этой области оказываются невозможными и, во-вторых, сама физическая модель перестает работать.

В связи с вышесказанным особенно интересным становится вопрос, нельзя ли выделить специальные “решаемые” случаи, когда исследование обратной задачи можно провести до конца. Для уменьшения переопределенности можно попробовать восстановить потенциал, пользуясь лишь частью данных рассеяния. Одна из естественно возникающих при этом постановок – *обратная задача рассеяния при фиксированной энергии* $E = \epsilon_0$. Она интересна еще и по следующей причине.

Как мы уже упоминали, одна из важных задач математической физики – *акустическая задача рассеяния*. Уравнение акустических волн в изотропной жидкости имеет вид (см. [50]):

$$c^2(\vec{x}, t) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{\Psi}(\vec{x}, t) = \Delta \hat{\Psi}(\vec{x}, t),$$

где $c(\vec{x}, t)$ – скорость звука. В стационарной задаче $c(\vec{x}, t) = c(\vec{x})$ для волны с частотой ω получаем:

$$-\Delta \Psi = \frac{\omega^2}{c^2(\vec{x})} \Psi.$$

Если не фиксировать частоту, то акустическая задача рассеяния существенно отличается от квантовой с математической точки зрения (в частности, при высоких частотах рассеяние остается нетривиальным, см., например, [43]). Однако акустическая задача при фиксированной частоте ω эквивалентна квантовой при фиксированной энергии ϵ_0 . Ситуация, когда измерения ведутся на одной частоте, вполне естественна в акустической томографии, причем встречающиеся при этом потенциалы обычно существенно неоднородны. Тем самым, квантовая задача рассеяния при фиксированной энергии получает важный дополнительный стимул.

В настоящее время на физическом факультете МГУ ведется разработка практических алгоритмов решения задач акустической томографии с использованием, в частности, подходов, излагаемых в данной работе. В частности, эта проблема обсуждается в статье В. А. Букова, С. А. Морозова, О. Д. Румянцевой, Е. Г. Сухова, С. Н. Вечерина и А. Ю. Жуковца [11].

ЗАМЕЧАНИЕ. Как указал автору С. Ю. Доброхотов, данная эквивалентность имеет простой классический предел и соответствует двум вариационным подходам к описанию движения частицы с заданной энергией – с помощью принципа экстремального действия Гамильтона и с помощью принципа экстремального действия Мопертюи (см., например, [4], [48]).

Из работ Р. Ньютона [65], Т. Редже [77], П. Сабатье [78] уже с начала 60-х годов известно, что решение обратной задачи рассеяния при одной энергии не единственно. Поэтому естественно поставить вопрос – с какой точностью мы можем восстановить потенциал по амплитуде рассеяния, или, что то же самое, как можно описать множество всех решений. Его исследование в размерности $n = 2$ и является одной из основных целей работы.

Важный специальный случай задачи при фиксированной энергии – задача о *прозрачных при одной энергии* ϵ_0 потенциалах, т.е. таких, что волны с энергией ϵ_0 , проходящие с любого направления, на них вообще не рассеиваются, или, что эквивалентно,

$$s(\vec{v}, \vec{v}') \equiv 0 \quad \text{при} \quad |\vec{v}|^2 = |\vec{v}'|^2 = \epsilon_0.$$

Отметим, что если в одномерии хорошо известны прозрачные при всех энергиях экспоненциально убывающие на бесконечности потенциалы (см., например, [89]), то при $n > 1$ прозрачный при всех энергиях убывающий на бесконечности потенциал автоматически тождественно равен нулю (это следует, например, из формулы (6)). В то же время уже давно известны (см. [78]) прозрачные при одной энергии многомерные потенциалы, однако примеры работы [78] медленно убывали на бесконечности (как $r^{-3/2}$). В связи с этим возникают следующие вопросы:

- Как описать такие потенциалы без предположения о сферической симметрии?
- Могут ли эти прозрачные при одной энергии потенциалы быстро убывать на бесконечности?
- Нельзя ли по аналогии с одномерным случаем построить явные примеры?

К сожалению, в наиболее интересной размерности $n = 3$ проблем, связанных с переопределенностью, избежать не удастся, и, по-видимому, трудно надеяться на получение эффективных ответов. В то же время, при $n = 2$ амплитуда рассеяния при фиксированной энергии $E = \epsilon_0$ – функция двух переменных, и, как мы увидим в разделе 3, нетривиальных условий совместности действительно нет. Более того, как будет показано, при $n = 2$ удастся естественно ввести дополнительные “нефизические данные рассеяния”, “снимаемые” с той же энергии ϵ_0 , которые вместе с амплитудой рассеяния при $E = \epsilon_0$ уже полностью определяют потенциал (по крайней мере если его норма не слишком велика), и получающийся набор по-прежнему независим.

Прежде чем перейти к исследованию задачи, сделаем еще несколько предварительных замечаний.

1. Масштабным преобразованием

$$x \rightarrow \alpha^{-1}x, \quad y \rightarrow \alpha^{-1}y, \quad u \rightarrow \alpha^2u, \quad \epsilon_0 \rightarrow \alpha^2\epsilon_0$$

задача для произвольной энергии ϵ_0 сводится к одному из трех случаев:

$$\epsilon_0 = 0, \quad \epsilon_0 = 1, \quad \epsilon_0 = -1.$$

В нашей работе мы, в основном, ограничимся задачей рассеяния при $\epsilon_0 \neq 0$. Случай $\epsilon_0 = 1$ исследуется в разделе 3, случай $\epsilon_0 = -1$ – в разделе 6. При $\epsilon_0 = 0$ задача усложняется, поскольку функция Грина (и, как следствие, норма интегрального оператора) логарифмически растет при $p \rightarrow 0$. В частности, из результатов п. 7.3 видно, что для сколь угодно мелкой потенциальной ямы прямое преобразование рассеяния сингулярно. В работах М. Боити, Х. Леона, М. Манни и Ф. Пемпинелли [9] и Цая [83] было показано, что эту трудность можно преодолеть, меняя нормировку функций Грина. Однако при этом приходится вводить переопределенный набор данных рассеяния и столь же простого ответа, как при $\epsilon_0 \neq 0$, получить не удастся. (При $\epsilon_0 \neq 0$ мы работаем в предположении, что норма потенциала $u(x, y)$ в подходящем функциональном пространстве меньше абсолютной величины энергии, поэтому наивный предельный переход $\epsilon_0 \rightarrow 0$ не проходит.) Некоторые частные результаты, относящиеся к случаю $\epsilon_0 = 0$, приведены в п. 7.3.

2. Важную роль в работах [26], [27] сыграло следующее наблюдение работы [25]: в многомерии волновая функция естественно продолжается в область комплексных импульсов $\vec{k} \in \mathbb{C}^n$ (возможно, с особенностями на подмногообразии вещественной координатности 2). В точках общего положения она однозначно фиксируется асимптотической

$$(7) \quad \Psi(\vec{k}, \vec{x}) = e^{i(\vec{k}, \vec{x})} (1 + o(1)),$$

где

$$\vec{k} \in \mathbb{C}^n, \quad \text{Im } \vec{k} \neq 0, \quad E = (\vec{k}, \vec{k}) = k_1 k_1 + \dots + k_n k_n,$$

$(\cdot, \cdot)$ обозначает не эрмитово, а комплексное евклидово скалярное произведение. Однако это продолжение уже не голоморфно по $\vec{k}$, т.е., как правило,

$$\frac{\partial}{\partial k_j} \Psi(\vec{k}, \vec{x}) \neq 0.$$

(В отличие от “физических” решений (4), растущие “нефизические” решения (7) однозначно фиксируются без наложения аналогов условия излучения.)

Однако если рассмотреть ограничение волновой функции на одномерные (комплексные) подпространства вида

$$\vec{k} = \vec{k}_\perp + s\vec{\gamma},$$

где $\vec{k}_\perp, \vec{\gamma}$ – произвольная пара вещественных взаимно ортогональных векторов, $(\vec{k}_\perp, \vec{\gamma}) = 0$, то $\Psi(\vec{k}, \vec{x})$ оказывается мероморфной функцией комплексного параметра s в верхней полуплоскости $\text{Im } s > 0$. (Обычно используют нормировку $(\vec{\gamma}, \vec{\gamma}) = 1$.)

Мы покажем, что в качестве дополнительных “данных рассеяния” можно использовать значения в некоторых специальных точках введенной Л. Д. Фаддеевым (см. [27]) функции

$$h(\vec{k}, \vec{l}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \iint e^{-i(\vec{l}, \vec{x})} u(\vec{x}) \Psi(\vec{k}, \vec{x}) d^n x,$$

где $\vec{k}, \vec{l} \in \mathbb{C}^n, \text{Im } \vec{k} = \text{Im } \vec{l}$. При этом не голоморфность ограничения $\Psi(\vec{k}, \vec{x})$ на подмногообразии постоянной энергии

$$(\vec{k}, \vec{k}) = \epsilon_0$$

будет очень существенна для нас.

3. Преобразование рассеяния при фиксированной положительной энергии для двумерного оператора Шрёдингера с убывающим на бесконечности потенциалом.

В данном разделе мы строим обобщенное преобразование рассеяния при фиксированной положительной энергии $E = \epsilon_0$, а также обсуждаем его связь с классической задачей рассеяния. При этом мы, в основном, следуем схеме работы [38].

Мы будем считать, что $\epsilon_0 = 1$, и использовать следующие комплексные обозначения:

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy, \quad \partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y), \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y),$$

$$x = z_R, \quad y = z_I.$$

Кроме того, для упрощения формул в нашей работе мы будем придерживаться следующего соглашения: обозначение типа $u(z)$, где z – комплексная переменная, *не подразумевает*, что $u(z)$ – голоморфная функция, если обратное явно не оговорено. Другими словами, мы будем писать $u(z)$ вместо $u(z, \bar{z})$.

В этих обозначениях оператор Шрёдингера приобретает вид:

$$L = -4\partial_z\partial_{\bar{z}} + u(z).$$

Мы будем предполагать, что $u(z)$ – гладкая вещественная функция такая, что

$$(8) \quad |\partial_z^m \partial_{\bar{z}}^n u(z)| < \frac{C_{mn}}{(1 + |z|)^{2+\epsilon}} \quad \text{при } m, n \geq 0,$$

где C_{mn} , ϵ – некоторые положительные константы. Кроме того, мы будем предполагать, что выполнено следующее неравенство:

$$(9) \quad C_{00} < \frac{2\sqrt[4]{|\epsilon_0|}}{\hat{c}\left(\frac{4\pi}{3} + D_\epsilon\right)},$$

где

$$(10) \quad \epsilon_0 = 1, \quad D_\epsilon = \iint \frac{dz_R dz_I}{(1 + |z|)^{2+\epsilon}},$$

$$\hat{c} = \frac{1}{4} \max_{0 < r < \infty} |\sqrt{r} Y_0(r)| + \frac{1}{4\pi} \max_{\substack{0 < r < \infty \\ 0 \leq \phi_0 \leq \pi}} \left| \sqrt{r} \int_{\phi_0}^{\phi_0 + \pi} e^{ir \sin \phi} d\phi \right|,$$

$Y_0(r)$ – функция Бесселя. Условие (9) мы будем называть *условием “малости нормы”* в прямой задаче (в других случаях под условием “малости нормы” мы будем понимать аналогичные ограничения, гарантирующие разрешимость интегральных уравнений).

Многообразие

$$k_x^2 + k_y^2 = 1$$

в импульсном пространстве $\mathbb{C}^2$ мы параметризуем комплексным параметром

$$\lambda = \lambda_R + i\lambda_I, \quad \lambda_R, \lambda_I \in \mathbb{R},$$

$$k_x = \frac{1}{2} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right), \quad k_y = -\frac{i}{2} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right).$$

Физически значениям импульса $\text{Im } k_x = \text{Im } k_y = 0$ отвечает окружность $|\lambda| = 1$ в λ -плоскости.

План данного раздела следующий. В п. 3.1 мы ставим в соответствие потенциалу $u(z)$ “*обобщенные данные рассеяния*” $R(\lambda, \lambda')$ и $T(\lambda)$, причем функция $R(\lambda, \lambda')$ определена на двумерном торе $|\lambda| = |\lambda'| = 1$, а функция $T(\lambda)$ – при всех комплексных λ . В п. 3.2 мы решаем обратную задачу – восстанавливаем потенциал $u(z)$ по известным $R(\lambda, \lambda')$ и $T(\lambda)$. В частности, мы покажем, что произвольному набору $R(\lambda, \lambda')$ и $T(\lambda)$ (по крайней мере в некоторой окрестности 0 в функциональном пространстве) однозначно ставится в соответствие оператор вида

$$L = -4\partial_z \partial_{\bar{z}} + V(z)\partial_z + u(z),$$

где $u(z)$ – в общем случае комплексный потенциал. В п. 3.3 мы решаем задачу выделения чисто потенциальных ($V(z) \equiv 0$) операторов с вещественным потенциалом $u(z) \equiv \bar{u}(z)$, т.е. строим аналоги $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ -редукций работ [86], [85]. Эти условия соответствуют условиям унитарности и взаимности на амплитуду рассеяния. В частности, мы получаем, что построенные “обобщенные данные рассеяния” независимы. В п. 3.4 мы устанавливаем связь между построенными нами “обобщенными данными рассеяния” и амплитудой рассеяния $s(\vec{v}, \vec{v}')$ при той же энергии $|\vec{v}| = |\vec{v}'| = \epsilon_0$. При этом оказывается, что $s(\vec{v}, \vec{v}')$ и $R(\lambda, \lambda')$ взаимно однозначно выражаются друг через друга, а $T(\lambda)$ оказывается дополнительным набором параметров, описывающих все потенциалы с заданной амплитудой рассеяния при одной энергии $E = \epsilon_0$. В частности, прозрачные при $E = \epsilon_0$ потенциалы отвечают $R(\lambda, \lambda') \equiv 0$. И в заключение в п. 3.5 мы кратко обсудим борновское приближение – линеаризованное преобразование рассеяния в пределе $R(\lambda, \lambda') \ll 1, T(\lambda) \ll 1$.

3.1. Прямое преобразование рассеяния. Первый шаг к определению данных рассеяния – построение волновых функций оператора Шрёдингера

$$(11) \quad L\Psi(\lambda, z) = \Psi(\lambda, z)$$

с асимптотикой

$$\Psi(\lambda, z) = e^{\frac{i}{2}(\lambda\bar{z} + z/\lambda)} \chi(\lambda, z),$$

где

$$(12) \quad \chi(\lambda, z) = 1 + o(1) \quad \text{при} \quad |z| \rightarrow \infty.$$

Действуя по аналогии с [25], убедимся, что такое решение существует и единственно. Уравнение (11) эквивалентно следующему:

$$(13) \quad [L_0(\lambda) + u(z)]\chi(\lambda, z) = 0,$$

где

$$L_0(\lambda) = -4\partial_z\partial_{\bar{z}} - 2i\lambda\partial_z - \frac{2i}{\lambda}\partial_{\bar{z}}.$$

В свою очередь при $|\lambda| \neq 1$ уравнение (13) с граничным условием (12) эквивалентно интегральному уравнению

$$(14) \quad \chi(\lambda, z) = 1 - \widehat{G}(\lambda)u(z)\chi(\lambda, z),$$

где $\widehat{G}(\lambda)$ – интегральный оператор,

$$(\widehat{G}(\lambda)f)(z) = \iint G(\lambda, z - z')f(z') dz_R dz_I,$$

$G(\lambda, z)$ – убывающая на бесконечности функция Грина оператора $L_0(\lambda)$,

$$L_0(\lambda)G(\lambda, z) = \delta(z_R)\delta(z_I).$$

Простое вычисление с помощью преобразования Фурье дает

$$(15) \quad G(\lambda, z) = \frac{1}{\pi^2} \iint \frac{e^{i(k\bar{z} + \bar{k}z)}}{4k\bar{k} + 2\lambda\bar{k} + 2k/\lambda} dk_R dk_I.$$

Нам понадобятся следующие свойства функции Грина (15):

ЛЕММА 3.1. 1) $G(\lambda, z) \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$.

2) $G(\lambda, z)$ ограничена в λ -плоскости при фиксированном $z \neq 0$.

3) При $|\lambda| \neq 1$

$$\frac{\partial G(\lambda, z)}{\partial \bar{\lambda}} = -\frac{1}{4\pi\bar{\lambda}} \operatorname{sgn}(\lambda\bar{\lambda} - 1) e^{-\frac{i}{2}[(\lambda+1/\bar{\lambda})\bar{z} + (\bar{\lambda}+1/\lambda)z]}.$$

4) При $|\lambda| \neq 1, |z| \rightarrow \infty$

$$G(\lambda, z) = \frac{i}{2\pi} \operatorname{sgn}(\lambda\bar{\lambda} - 1) \left[\frac{1}{\lambda\bar{z} - z/\lambda} - \frac{1}{\bar{\lambda}z - \bar{z}/\bar{\lambda}} e^{-\frac{i}{2}[(\lambda+1/\bar{\lambda})\bar{z} + (\bar{\lambda}+1/\lambda)z]} \right] + o\left(\frac{1}{|z|}\right).$$

5) $G(-1/\bar{\lambda}, z) = \bar{G}(\lambda, z)$.

6) $G(-1/\bar{\lambda}, z) = e^{\frac{i}{2}[(\lambda+1/\bar{\lambda})\bar{z} + (\bar{\lambda}+1/\lambda)z]} G(\lambda, z)$.

7) $G(e^{i\varphi}\lambda, e^{i\varphi}z) = G(\lambda, z)$, где $\varphi \in \mathbb{R}$.

8) На единичной окружности $G(\lambda, z)$ имеет разрыв первого рода и граничные значения

$$G_{\pm}(\lambda, z) = G(\lambda(1 \pm 0), z),$$

где

$$G(\lambda(1 \pm 0), z) = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \pm \\ \epsilon \in \mathbb{R}}} G(\lambda \cdot (1 \pm \epsilon), z)$$

связаны соотношениями

$$G_+(\lambda, z) - G_-(\lambda, z) = e^{-\frac{i}{2}(\lambda\bar{z} + \bar{\lambda}z)} \frac{i}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{\frac{i}{2}(\lambda\bar{z}e^{i\varphi} + \bar{\lambda}ze^{-i\varphi})} \operatorname{sgn} \varphi.$$

9) При $|\lambda| = 1$ удобно записать $G(\lambda, z)$ в следующем виде:

$$G(\lambda(1 \pm 0), z) = e^{-\frac{i}{2}(\lambda\bar{z} + \bar{\lambda}z)} G_1(\pm\lambda, z).$$

Тогда для $G_1(\lambda, z)$ выполнено

$$\frac{\partial G_1(e^{i\eta}, z)}{\partial \eta} = \frac{i}{4\pi} [e^{-\frac{i}{2}(e^{i\eta}\bar{z} + e^{-i\eta}z)} - e^{\frac{i}{2}(e^{i\eta}\bar{z} + e^{-i\eta}z)}].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $|\lambda| \neq 1$. Тогда знаменатель подынтегрального выражения в (15) имеет два простых нуля в точках $k = 0$ и $k = -\frac{1}{2}(\lambda + 1/\bar{\lambda})$, и, кроме того, интеграл не сходится абсолютно на бесконечности. Однако при $|z| \neq 0$ интеграл на бесконечности естественно регуляризуется интегрированием по частям, а в окрестности нулей он абсолютно сходится, откуда и следует его гладкая зависимость от λ .

Подынтегральное выражение мероморфно зависит от λ , поэтому единственный источник неголоморфности — нули знаменателя, положение которых зависит от λ . Пользуясь формулой

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} \frac{1}{a\lambda + b\mu + c\bar{\mu}} = \frac{\pi \bar{a}}{|b\bar{b} - c\bar{c}|} \delta(\mu_R - \mu_{0R}(\lambda)) \delta(\mu_I - \mu_{0I}(\lambda)),$$

где $\mu_{0R}(\lambda)$, $\mu_{0I}(\lambda)$ — нули подынтегрального выражения, записанные как функции от λ , получаем свойство 3).

Хорошо известно, что асимптотика функции при больших $|z|$ “садится” на особенности преобразования Фурье. Используя формулу

$$\frac{1}{\pi^2} \iint \frac{e^{i(k\bar{z} + \bar{k}z)}}{ak + b\bar{k}} dk_R dk_I = \frac{i}{\pi} \operatorname{sgn}(a\bar{a} - b\bar{b}) \frac{1}{az - b\bar{z}},$$

несложно получить свойство 4).

Свойства 5)–7) сразу следуют из представления (15).

Рассмотрим предел функции $G(\lambda, z)$ при $|\lambda| \rightarrow 1$. При $|\lambda| = 1$ интеграл имеет особенность вида $1/x$ на окружности $|2k + \lambda| = 1$, и значение функции Грина зависит от выбора регуляризации.

При $|\lambda| = 1 \pm 0$ мы имеем:

$$G(\lambda(1 \pm 0), z) = \frac{1}{\pi^2} \iint \frac{e^{i(k\bar{z} + \bar{k}z)}}{4k\bar{k} + 2\lambda\bar{k} + 2\bar{\lambda}k \pm 0(\lambda\bar{k} - \bar{\lambda}k)} dk_R dk_I.$$

Несложно видеть, что

$$\begin{aligned} G_1(\lambda, z) &= \frac{1}{\pi^2} \iint \frac{e^{i(k\bar{z} + \bar{k}z)}}{4k\bar{k} - 1 + 0(\lambda\bar{k} - \bar{\lambda}k)} dk_R dk_I \\ &= \frac{1}{\pi^2} \iint \frac{e^{ir(\lambda\bar{z}e^{i\varphi} + \bar{\lambda}ze^{-i\varphi})}}{4r^2 - 1 - i0\sin\varphi} r dr d\varphi, \end{aligned}$$

$$(16) \quad G(\lambda(1+0), z) - G(\lambda(1-0), z) = e^{-\frac{i}{2}(\lambda\bar{z} + \bar{\lambda}z)} [G_1(\lambda, z) - G_1(-\lambda, z)].$$

Применяя к (16) формулу Племеля–Сохоцкого, получаем свойство 8).

Далее нам понадобится следующая оценка, доказанная в работе [71; с. 424]:

ЛЕММА 3.2.

$$|G(\lambda, z)| \leq \frac{\hat{c}}{\sqrt{|z|} \sqrt{|\lambda| + |1/\lambda|}},$$

где $\hat{c}$ определяется формулой (10).

Из нее легко выводится, что если $f(z)$ лежит одновременно в пространствах $C(\mathbb{C}^1)$ и $L^1(\mathbb{C}^1)$, то функция $(\widehat{G}(\lambda)f)(z)$ корректно определена, лежит в пространстве $C(\mathbb{C}^1)$ и

$$\max_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| \leq \frac{\widehat{c}}{\sqrt{|\lambda| + |1/\lambda|}} \left[\iint_{\mathbb{C}} |f(z')| dz'_R dz'_I + \frac{4\pi}{3} \max_{z' \in \mathbb{C}} |f(z')| \right].$$

Теперь оценим норму оператора умножения на функцию $u(z)$. Пусть $f(z)$ лежит в пространстве $C(\mathbb{C}^1)$. Тогда $u(z)f(z)$ лежит в пространствах $L^1(\mathbb{C}^1)$ и $C(\mathbb{C}^1)$ одновременно и

$$\begin{aligned} \max_{z \in \mathbb{C}} |u(z)f(z)| &\leq C_{00} \max_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|, \\ \iint_{\mathbb{C}} |u(z)f(z')| dz'_R dz'_I &\leq D_\epsilon C_{00} \max_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что если выполнено условие “малости нормы” (9), то норма интегрального оператора $\widehat{G}(\lambda)u(z)$ в пространстве непрерывных ограниченных функций на $\mathbb{C}$ меньше 1, интегральное уравнение (14) однозначно разрешимо при всех λ и его решение можно записать в виде сходящегося ряда

$$(17) \quad \chi(\lambda, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\widehat{G}(\lambda)u(z))^n \cdot 1.$$

Если же условие (9) не выполнено, то ряд (17) гарантированно сходится лишь при

$$\sqrt{|\lambda| + |1/\lambda|} > C_{00}\widehat{c} \left(\frac{4\pi}{3} + D_\epsilon \right).$$

Теперь мы можем приступить к исследованию аналитических свойств волновой функции $\Psi(\lambda, z)$.

ЛЕММА 3.3. Пусть выполнено условие “малости нормы” (9). Тогда:

- 1) Функция $\Psi(\lambda, z)$ непрерывна по λ при $|\lambda| \neq 1$.
- 2) $\Psi(\lambda, z)$ не голоморфна по параметру λ . Ее производная по λ удовлетворяет следующему уравнению:

$$(18) \quad \frac{\partial \Psi(\lambda, z)}{\partial \bar{\lambda}} = T(\lambda) \Psi\left(-\frac{1}{\bar{\lambda}}, z\right),$$

где $T(\lambda)$ – не зависящая от z функция переменной λ , задаваемая формулой

$$(19) \quad \begin{aligned} T(\lambda) &= \frac{\pi \operatorname{sgn}(\lambda \bar{\lambda} - 1)}{\bar{\lambda}} b(\lambda), \\ b(\lambda) &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\mathbb{C}^1} e^{\frac{i}{2}[(\lambda+1/\bar{\lambda})\bar{z} + (\bar{\lambda}+1/\lambda)z]} u(z) \chi(\lambda, z) dz_R dz_I. \end{aligned}$$

- 3) Функция $\Psi(\lambda, z)$ имеет разрыв первого рода на окружности, причем граничные значения $\Psi_{\pm}(\lambda, z) = \Psi(\lambda(1 \pm 0), z)$ корректно определены и связаны соотношением

$$(20) \quad \Psi_+(\lambda, z) = \Psi_-(\lambda, z) + \oint_{|\mu|=1} R(\lambda, \mu) \Psi_-(\mu, z) |d\mu|,$$

где не зависящее от z ядро $R(\lambda, \mu)$ определяется следующим образом.

Пусть $\Psi_1(\lambda, \mu, z)$ ($|\lambda| = |\mu| = 1$) – волновая функция оператора Шрёдингера (11) с $E = \epsilon_0 = 1$, задаваемая как решение интегрального уравнения

$$\Psi_1(\lambda, \mu, z) = e^{\frac{i}{2}(\lambda\bar{z} + z/\lambda)} - \widehat{G}_1(\mu)u(z)\Psi_1(\lambda, \mu, z).$$

Легко видеть, что

$$(21) \quad \Psi_+(\lambda, z) = \Psi_1(\lambda, \lambda, z), \quad \Psi_-(\lambda, z) = \Psi_1(\lambda, -\lambda, z).$$

Пусть

$$(22) \quad \begin{aligned} w_+(\lambda, \mu) &= \frac{1}{4\pi^2} \iint e^{-\frac{i}{2}(\mu\bar{z} + \bar{\mu}z)} u(z) \Psi_1(\lambda, \mu, z) dz_R dz_I, \\ w_-(\lambda, \mu) &= \frac{1}{4\pi^2} \iint e^{-\frac{i}{2}(\mu\bar{z} + \bar{\mu}z)} u(z) \Psi_1(\lambda, -\mu, z) dz_R dz_I, \end{aligned}$$

$\widehat{W}_\pm^\pm$ – интегральные операторы, действующие на функциях на окружности вида

$$(23) \quad \begin{aligned} (\widehat{W}_+^+ f)(\lambda) &= \pi i \int_0^\pi w_+(\lambda, \lambda e^{i\varphi}) f(\lambda e^{i\varphi}) d\varphi, \\ (\widehat{W}_+^- f)(\lambda) &= -\pi i \int_{-\pi}^0 w_+(\lambda, \lambda e^{i\varphi}) f(\lambda e^{i\varphi}) d\varphi, \\ (\widehat{W}_-^+ f)(\lambda) &= \pi i \int_{-\pi}^0 w_-(\lambda, \lambda e^{i\varphi}) f(\lambda e^{i\varphi}) d\varphi, \\ (\widehat{W}_-^- f)(\lambda) &= -\pi i \int_0^\pi w_-(\lambda, \lambda e^{i\varphi}) f(\lambda e^{i\varphi}) d\varphi. \end{aligned}$$

Тогда

$$(\widehat{1} + \widehat{R}) = (\widehat{1} + \widehat{W}_+^+)^{-1}(\widehat{1} + \widehat{W}_-^+) = (\widehat{1} + \widehat{W}_+^-)^{-1}(\widehat{1} + \widehat{W}_-^-).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт 1) следует из непрерывной зависимости функции Грина от λ . Для доказательства п. 2) продифференцируем по $\bar{\lambda}$ уравнение (14). Мы получаем

$$(24) \quad \frac{\partial \chi(\lambda, z)}{\partial \bar{\lambda}} = -\frac{\partial \widehat{G}(\lambda)}{\partial \bar{\lambda}} u(z) \chi(\lambda, z) - \widehat{G}(\lambda) u(z) \frac{\partial \chi(\lambda, z)}{\partial \bar{\lambda}}.$$

Согласно п. 3) леммы 3.1

$$(25) \quad \begin{aligned} &\frac{\partial G(\lambda, z)}{\partial \bar{\lambda}} u(z) \chi(\lambda, z) \\ &= -\frac{1}{4\pi\bar{\lambda}} \operatorname{sgn}(\lambda\bar{\lambda} - 1) e^{-\frac{i}{2}[(\lambda+1/\bar{\lambda})\bar{z} + (\bar{\lambda}+1/\lambda)z]} \\ &\quad \times \iint e^{\frac{i}{2}[(\lambda+1/\bar{\lambda})\bar{z}' + (\bar{\lambda}+1/\lambda)z']} u(z') \chi(\lambda, z') dz'_R dz'_I \\ &= -\frac{\pi}{\bar{\lambda}} \operatorname{sgn}(\lambda\bar{\lambda} - 1) b(\lambda) e^{-\frac{i}{2}[(\lambda+1/\bar{\lambda})\bar{z} + (\bar{\lambda}+1/\lambda)z]} \\ &= -T(\lambda) e^{-\frac{i}{2}[(\lambda+1/\bar{\lambda})\bar{z} + (\bar{\lambda}+1/\lambda)z]}. \end{aligned}$$

Согласно определению с учетом свойства 6) леммы 3.1

$$\chi\left(-\frac{1}{\bar{\lambda}}, z\right) = 1 - e^{\frac{i}{2}[(\lambda+1/\bar{\lambda})\bar{z} + (\bar{\lambda}+1/\lambda)z]} \widehat{G}(\lambda) e^{-\frac{i}{2}[(\lambda+1/\bar{\lambda})\bar{z} + (\bar{\lambda}+1/\lambda)z]} u(z) \chi\left(-\frac{1}{\bar{\lambda}}, z\right),$$

т.е. функция $\chi_1(\lambda, z) = e^{-\frac{i}{2}[(\lambda+1/\bar{\lambda})\bar{z} + (\bar{\lambda}+1/\lambda)z]} \chi\left(-\frac{1}{\bar{\lambda}}, z\right)$ удовлетворяет уравнению

$$(26) \quad \chi_1(\lambda, z) = e^{-\frac{i}{2}[(\lambda+1/\bar{\lambda})\bar{z} + (\bar{\lambda}+1/\lambda)z]} - \widehat{G}(\lambda) u(z) \chi_1(\lambda, z).$$

Подставляя (25) в (24), получаем:

$$(27) \quad \frac{\partial \chi(\lambda, z)}{\partial \bar{\lambda}} = T(\lambda) e^{-\frac{i}{2}[(\lambda+1/\bar{\lambda})\bar{z} + (\bar{\lambda}+1/\lambda)z]} - \widehat{G}(\lambda) u(z) \frac{\partial \chi(\lambda, z)}{\partial \bar{\lambda}}.$$

Уравнения (27) и (26) отличаются лишь на множитель $T(\lambda)$ при свободном члене, откуда следует, что

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} \chi(\lambda, z) = T(\lambda) \chi_1(\lambda, z),$$

т.е.

$$(28) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} \chi(\lambda, z) = T(\lambda) e^{-\frac{i}{2}[(\lambda+1/\bar{\lambda})\bar{z} + (\bar{\lambda}+1/\lambda)z]} \chi\left(-\frac{1}{\bar{\lambda}}, z\right).$$

Переписывая (28) в терминах $\Psi(\lambda, z)$, получаем формулу (18).

(Данная схема доказательства практически дословно повторяет вывод $\bar{\partial}$ -уравнений на волновую функцию параболического оператора в работе [2].)

Докажем теперь утверждение 3).

Продифференцируем функцию $\Psi_1(\lambda, \lambda e^{i\varphi}, z)$ по φ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Psi_1(\lambda, \lambda e^{i\varphi}, z)}{\partial \varphi} \\ &= \frac{i}{4\pi} e^{\frac{i}{2}(\lambda e^{i\varphi} \bar{z} + \bar{\lambda} e^{i\varphi} z)} \iint e^{-\frac{i}{2}(\lambda e^{i\varphi} \bar{z}' + \bar{\lambda} e^{i\varphi} z')} u(z') \Psi_1(\lambda, \lambda e^{i\varphi}, z') dz'_R dz'_I \\ & \quad - \frac{i}{4\pi} e^{-\frac{i}{2}(\lambda e^{i\varphi} \bar{z} + \bar{\lambda} e^{i\varphi} z)} \iint e^{\frac{i}{2}(\lambda e^{i\varphi} \bar{z}' + \bar{\lambda} e^{i\varphi} z')} u(z') \Psi_1(\lambda, \lambda e^{i\varphi}, z') dz'_R dz'_I \\ & \quad - \widehat{G}_1(\lambda e^{i\varphi}) u(z) \frac{\partial \Psi_1(\lambda, \lambda e^{i\varphi}, z)}{\partial \varphi}, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial \Psi_1(\lambda, \lambda e^{i\varphi}, z)}{\partial \varphi} = \pi i w_+(\lambda, \lambda e^{i\varphi}) \Psi_+(\lambda e^{i\varphi}, z) - \pi i w_-(\lambda, -\lambda e^{i\varphi}) \Psi_-(-\lambda e^{i\varphi}, z).$$

Тем самым, с учетом (21)

$$\begin{aligned} (29) \quad & \Psi_-(\lambda, z) - \Psi_+(\lambda, z) \\ &= \pi i \int_0^\pi [w_+(\lambda, \lambda e^{i\varphi}) \Psi_+(\lambda e^{i\varphi}, z) - w_-(\lambda, -\lambda e^{i\varphi}) \Psi_-(-\lambda e^{i\varphi}, z)] d\varphi \\ &= -\pi i \int_{-\pi}^0 [w_+(\lambda, \lambda e^{i\varphi}) \Psi_+(\lambda e^{i\varphi}, z) - w_-(\lambda, -\lambda e^{i\varphi}) \Psi_-(-\lambda e^{i\varphi}, z)] d\varphi. \end{aligned}$$

В терминах интегральных операторов (23) соотношение (29) записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned}(\widehat{1} + \widehat{W}_+^+) \Psi_+(\lambda, z) &= (\widehat{1} + \widehat{W}_-^+) \Psi_-(\lambda, z), \\ (\widehat{1} + \widehat{W}_+^-) \Psi_+(\lambda, z) &= (\widehat{1} + \widehat{W}_-^-) \Psi_-(\lambda, z),\end{aligned}$$

причем эти соотношения выполнены при всех λ . Тем самым,

$$\begin{aligned}\Psi_+(\lambda, z) &= (\widehat{1} + \widehat{W}_+^+)^{-1} (\widehat{1} + \widehat{W}_-^+) \Psi_-(\lambda, z), \\ \Psi_+(\lambda, z) &= (\widehat{1} + \widehat{W}_+^-)^{-1} (\widehat{1} + \widehat{W}_-^-) \Psi_-(\lambda, z),\end{aligned}$$

что и доказывает утверждение 3). Данное рассуждение аналогично тому, с помощью которого нелокальная задача Римана была построена для нестационарного одномерного оператора Шрёдингера в работе [29].

Суммируя вышесказанное, получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть $u(z)$ – некоторая непрерывная функция переменной z (не обязательно вещественная) такая, что*

$$|u(z)| < \frac{C_{00}}{(1 + |z|)^{2+\epsilon}},$$

где C_{00}, ϵ – некоторые положительные константы, и пусть выполнено условие “малости нормы” (9). Тогда описанная выше конструкция ставит в соответствие потенциалу $u(z)$ следующий набор “обобщенных данных рассеяния” при одной энергии $\epsilon_0 = 1$:

- 1) функция $R(\lambda, \lambda')$ на двумерном торе $|\lambda| = |\lambda'| = 1$, называемая ядром нелокальной задачи Римана;
- 2) функция $T(\lambda)$ двух вещественных переменных λ_R, λ_I на λ -плоскости $\mathbb{C}^1 = \mathbb{R}^2$ (напомним, что никакой голоморфности по λ функции $T(\lambda)$ не предполагается).

Как мы увидим ниже, появление в данной задаче двух типов “данных рассеяния” не случайно. Оказывается, данные $R(\lambda, \lambda')$ являются “физическими”, т.е. выражаются через амплитуду рассеяния $s(\vec{k}, \vec{l})$ при той же энергии $\epsilon_0 = 1$, а $T(\lambda)$ – “нефизическими”, т.е. амплитуда рассеяния $s(\vec{k}, \vec{l})$ при $\epsilon_0 = 1$ от них не зависит.

В заключение докажем, что гладкость потенциала $u(z)$ влечет за собой быстрое убывание функции $T(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow 0, \infty$.

ТЕОРЕМА 3.2. *Пусть $u(z)$ – гладкая функция, для производных которой выполнена оценка (8). Тогда при достаточно больших значениях $|\lambda| + |1/\lambda|$ интегральное уравнение (14) разрешимо (мы здесь не предполагаем малости нормы $u(z)$) и при $|\lambda| + |1/\lambda| \rightarrow \infty$ $T(\lambda) \rightarrow 0$ быстрее любой степени $|\lambda| + |1/\lambda|$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем уравнение (14) в импульсном представлении.

Пусть

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}(\lambda, k) &= \frac{1}{\pi^2} \iint \chi(\lambda, z) e^{-i(k\bar{z} + \bar{k}z)} dz_R dz_I, \\ \tilde{u}(k) &= \frac{1}{\pi^2} \iint u(z) e^{-i(k\bar{z} + \bar{k}z)} dz_R dz_I\end{aligned}$$

– преобразования Фурье функций $\chi(\lambda, z)$ и $u(z)$ соответственно. Хорошо известно, что если выполнено условие (8), то $\tilde{u}(z)$ убывает при $|k| \rightarrow \infty$ быстрее любой степени k . Поскольку норма оператора $\hat{G}(\lambda)u(z)$ при $|\lambda| + |1/\lambda| \rightarrow \infty$ оценивается как $O\left(\frac{1}{|\lambda| + |1/\lambda|}\right)$, то для вычисления $\chi(\lambda, z)$ и, следовательно, $b(\lambda)$ с точностью до $O((|\lambda| + |1/\lambda|)^{-N})$ достаточно взять первые N членов ряда (17). В импульсном представлении ряд для функции $b(\lambda)$ приобретает вид

$$\begin{aligned}(30) \quad b(\lambda) &= \frac{1}{4} \left[\tilde{u}\left(-\frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\iint \iint \dots \iint}_{n \text{ раз}} dk_{1R} dk_{1I} \dots dk_{nR} dk_{nI} \right. \\ &\quad \times \tilde{u}\left(-\frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) - k_1\right) \tilde{u}(k_1 - k_2) \dots \tilde{u}(k_n - 0) \\ &\quad \times \left. \frac{1}{4k_1\bar{k}_1 + 2\lambda\bar{k}_1 + 2k_1/\lambda} \cdot \frac{1}{4k_2\bar{k}_2 + 2\lambda\bar{k}_2 + 2k_2/\lambda} \dots \frac{1}{4k_n\bar{k}_n + 2\lambda\bar{k}_n + 2k_n/\lambda} \right].\end{aligned}$$

Поскольку сумма аргументов функций $\tilde{u}(k_j - k_{j+1})$ равна $-\frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)$, то хотя бы один из них по модулю больше $\frac{1}{2n}\left|\lambda + \frac{1}{\lambda}\right|$, откуда и следует убывание этого члена ряда при $\left|\lambda + \frac{1}{\lambda}\right| \rightarrow \infty$ быстрее любой степени λ , что и доказывает теорему 3.2.

ЗАМЕЧАНИЕ. В задаче рассеяния для двумерного оператора Шрёдингера при фиксированной положительной энергии возникают одновременно нелокальная задача Римана и $\bar{\partial}$ -проблема. С алгебраической точки зрения обе эти задачи можно интерпретировать как специальные случаи нелокальной $\bar{\partial}$ -проблемы, определенной в [88]. Однако при работе с ядрами общего вида непонятна их связь со спектральными свойствами получающихся потенциалов.

3.2. Обратное преобразование рассеяния. Изложим теперь схему восстановления потенциала $u(z)$ по известным данным $R(\lambda, \lambda')$, $T(\lambda)$. Введем следующие обозначения:

$$(31) \quad \begin{aligned}T(\lambda, z) &= e^{-\frac{i}{2}[(\lambda+1/\bar{\lambda})\bar{z} + (\bar{\lambda}+1/\lambda)z]} T(\lambda), \\ R(\lambda, \lambda', z) &= e^{-\frac{i}{2}[(\lambda-\lambda')\bar{z} + (\bar{\lambda}-\bar{\lambda}')z]} R(\lambda, \lambda').\end{aligned}$$

Убедимся, что следующие свойства функции $\chi(\lambda, z)$ как функции переменной λ при фиксированном z полностью определяют ее (по крайней мере, для достаточно “малых” данных рассеяния):

- 1) функция $\chi(\lambda, z)$ определена при всех $\lambda \in \mathbb{C}$ и непрерывна по λ при $|\lambda| \neq 1$;

- 2) $\chi(\lambda, z) \rightarrow 1$ при $\lambda \rightarrow \infty$;
- 3) $\frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} \chi(\lambda, z) = T(\lambda, z) \chi\left(-\frac{1}{\bar{\lambda}}, z\right)$ при $|\lambda| \neq 1$;
- 4) на единичной окружности $\chi(\lambda, z)$ имеет разрыв первого рода, причем граничные значения $\chi_{\pm}(\lambda, z) = \chi(\lambda(1 \pm 0), z)$ связаны соотношением

$$(32) \quad \chi_+(\lambda, z) = \chi_-(\lambda, z) + \oint_{|\lambda'|=1} R(\lambda, \lambda', z) \chi_-(\lambda', z) |d\lambda'|.$$

Применяя обобщенную формулу Коши, получаем, что задача о построении $\chi(\lambda, z)$ эквивалентна следующему *интегральному уравнению обратной задачи рассеяния*:

$$(33) \quad \begin{aligned} \chi(\lambda, z) = 1 - \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda''|=1} \frac{d\lambda''}{\lambda'' - \lambda} \oint_{|\lambda'|=1} R(\lambda'', \lambda', z) \chi_-(\lambda', z) |d\lambda'| \\ - \frac{1}{\pi} \iint \frac{T(\lambda', z)}{\lambda' - \lambda} \chi\left(-\frac{1}{\bar{\lambda}'}, z\right) d\lambda'_R d\lambda'_I. \end{aligned}$$

Нам понадобятся следующие нормы в пространстве функций одной комплексной переменной λ . Пусть $\lambda = re^{i\varphi}$,

$$\|f(\lambda)\|_1 = \max_{0 \leq r \leq \infty} \sqrt{\int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) \bar{f}(re^{i\varphi}) d\varphi},$$

$$\|f(\lambda)\|_2 = \int_0^\infty dr \sqrt{\int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) \bar{f}(re^{i\varphi}) d\varphi}.$$

ТЕОРЕМА 3.3. 1. Пусть $R(\lambda, \lambda')$, $|\lambda| = |\lambda'| = 1$, $T(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, – произвольные кусочно-непрерывные ограниченные функции такие, что

$$\sqrt{\iint_{|\lambda|=|\lambda'|=1} |d\lambda| |d\lambda'| |R^2(\lambda, \lambda')|} + 2 \int_0^\infty dr \max_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} |T(re^{i\varphi})| < 1.$$

Тогда интегральное уравнение (33) однозначно разрешимо при всех z . Пусть, кроме того, $T(\lambda)$ убывает при $\lambda \rightarrow 0, \infty$ быстрее любой степени λ . Тогда $\chi(\lambda, z)$ – гладкая функция переменной z при $\lambda \neq 1$.

2. Функция $\Psi(\lambda, z) = e^{\frac{i}{2}(\lambda \bar{z} + z/\lambda)} \chi(\lambda, z)$, где $\chi(\lambda, z)$ – построенное в п. 1 решение уравнения (33) – собственная функция следующего оператора Шрёдингера:

$$(34) \quad \begin{aligned} L\Psi(\lambda, z) &= \epsilon_0 \Psi(\lambda, z), \quad \epsilon_0 = 1, \\ L &= -4\partial_z \partial_{\bar{z}} + V(z) \partial_z + u(z), \end{aligned}$$

где

$$(35) \quad \begin{aligned} V(z) &= 4\partial_{\bar{z}} \ln \chi(0, z), \\ u(z) &= 2i\partial_z \chi_\infty^\infty(z), \end{aligned}$$

$\chi_{-1}^\infty(z)$ – коэффициент разложения $\chi(\lambda, z)$ при $\lambda \rightarrow \infty$:

$$\chi(\lambda, z) = 1 + \frac{\chi_{-1}^\infty(z)}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

(Поскольку $T(\lambda) \rightarrow 0$ быстро убывает при $\lambda \rightarrow \infty$, то разложение идет по степеням $1/\lambda$.)

Кроме того, для $\chi_{-1}^\infty(z)$ имеет место следующая формула:

$$(36) \quad \begin{aligned} \chi_{-1}^\infty(z) = & \frac{1}{2\pi} \oint_{|\lambda''|=1} |d\lambda''| \oint_{|\lambda'|=1} |d\lambda'| \lambda'' R(\lambda'', \lambda', z) \chi_{-}(\lambda', z) \\ & + \frac{1}{\pi} \iint T(\lambda', z) \chi\left(-\frac{1}{\bar{\lambda}'}, z\right) d\lambda'_R d\lambda'_I, \end{aligned}$$

получающаяся из (33) предельным переходом при $\lambda \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор разложения функции на окружности в разность функций, голоморфных внутри круга и вне его, – оператор ортогонального проектирования в $L^2(S^1)$, поэтому его норма равна 1. Отсюда следует, что

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda''|=1} \frac{d\lambda''}{\lambda'' - \lambda} \oint_{|\lambda'|=1} R(\lambda'', \lambda', z) \phi_{-}(\lambda') |d\lambda'| \right\|_1 \leq \|\widehat{R}(\lambda)\|_{L^2(S^1)} \cdot \|\phi(\lambda)\|_{L^2(S^1)}.$$

Обозначим $\partial_{\bar{\lambda}}^{-1}$ следующий интегральный оператор:

$$(\partial_{\bar{\lambda}}^{-1} \phi)(\lambda) = -\frac{1}{\pi} \iint \frac{\phi(\lambda') d\lambda'_R d\lambda'_I}{\lambda' - \lambda}.$$

Если $\phi(\lambda)$ не слишком сингулярна, то $\partial_{\bar{\lambda}} \partial_{\bar{\lambda}}^{-1} \phi(\lambda) \equiv \phi(\lambda)$, что и оправдывает данное обозначение. Легко проверяется, что

$$\|\partial_{\bar{\lambda}}^{-1} \phi(\lambda)\|_1 \leq 2\|\phi(\lambda)\|_2,$$

откуда следует, что интегральный оператор в правой части (33) – сжимающий оператор в пространстве функций с нормой $\|\cdot\|_1$, что и дает однозначную разрешимость.

Для доказательства гладкости продифференцируем правую часть (33) по z и $\bar{z}$ нужное число раз. При этом быстрое убывание T при $\lambda \rightarrow 0, \infty$ гарантирует, что неоднородная часть получающегося уравнения корректно определена и лежит в пространстве функций от λ с ограниченной $\|\cdot\|_1$, что и дает нам существование производных как решений интегрального уравнения.

Убедимся, что построенная нами $\Psi(\lambda, z)$ – собственная функция оператора (34). Для этого рассмотрим следующую функцию:

$$X(\lambda, z) = e^{-\frac{i}{2}(\lambda \bar{z} + z/\lambda)} L\Psi(\lambda, z).$$

Легко проверяется, что функция $X(\lambda, z) + \chi(\lambda, z)$ обладает перечисленными выше свойствами 1)–4), т.е. по теореме единственности она совпадает с $\chi(\lambda, z)$. Тем самым, $X(\lambda, z) \equiv 0$.

Теорема 3.3 доказана.

Отвечающий данным общего положения $R(\lambda, \lambda')$, $T(\lambda)$ оператор Шрёдингера оказывается комплексным и содержит член с производной первого порядка.

3.3. Условия потенциальности и вещественности. Естественный следующий шаг – выделение “данных рассеяния”, отвечающих вещественным операторам без магнитного поля (нахождение аналогов $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ группы редукций периодической задачи).

ТЕОРЕМА 3.4. 1. Пусть L – оператор Шрёдингера без магнитного поля и выполнены условия “малости нормы”. Тогда “данные рассеяния” обладают следующими симметриями:

$$(37) \quad b\left(\frac{1}{\lambda}\right) = b(\lambda),$$

$$(38) \quad R(\lambda, \lambda') + R(-\lambda', -\lambda) + \oint_{|\lambda''|=1} R(\lambda, \lambda'') R(-\lambda', -\lambda'') |d\lambda''| = 0.$$

Пусть, кроме того, потенциал $u(z)$ вещественен. Тогда “данные рассеяния” удовлетворяют соотношениям:

$$(39) \quad b\left(-\frac{1}{\lambda}\right) = \bar{b}(\lambda),$$

$$(40) \quad R(\lambda, \lambda') + \bar{R}(-\lambda, -\lambda') + \oint_{|\lambda''|=1} R(\lambda, \lambda'') \bar{R}(-\lambda'', -\lambda') |d\lambda''| = 0.$$

2. Если $R(\lambda, \lambda')$, $b(\lambda)$ – произвольные функции такие, что выполнены редукции (37), (38) и обратная задача однозначно разрешима, то соответствующий оператор L не содержит первых производных. Если, кроме того, выполнены соотношения (39), (40), то потенциал $u(z)$ вещественен. Другими словами, условия п. 1 не только необходимы, но и достаточны.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие (38) плюс условие (40) дают нам эрмитовость оператора $\hat{R}$

$$R(\lambda, \lambda') = \bar{R}(\lambda', \lambda).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие (38) означает, что оператор $\hat{1} + \hat{R}$ сохраняет следующее скалярное произведение на пространстве функций на окружности:

$$(41) \quad \langle f, g \rangle = \oint_{|\lambda|=1} f(\lambda) g(-\lambda) |d\lambda|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сперва докажем свойство (37). Сделаем в формуле (30) следующую замену переменных:

$$\tilde{k}_{n+1-i} = -\frac{1}{2} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right) - k_i.$$

С учетом того, что $\tilde{G}\left(\lambda, -\frac{1}{2} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right) - k\right) = \tilde{G}\left(\frac{1}{\lambda}, k\right)$, где

$$\tilde{G}(\lambda, k) = \frac{1}{4k\bar{k} + 2\lambda\bar{k} + 2k/\lambda},$$

ряд для $b(\lambda)$ переходит в ряд для $b\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, что и доказывает их равенство.

Необходимость условия (38) мы докажем ниже, пользуясь формулой, связывающей ядро $R(\lambda, \lambda')$ с амплитудой рассеяния. Докажем, что условия (37), (38) являются достаточными.

Рассмотрим следующую форму:

$$\phi(\lambda, z) d\lambda = \Psi(\lambda, z) \Psi(-\lambda, z) \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

По формуле Грина

$$\begin{aligned} \oint_{|\lambda|=1-0} \phi(\lambda, z) d\lambda - \oint_{|\lambda|=1/R} \phi(\lambda, z) d\lambda &= \iint_{\frac{1}{R} \leq \lambda < 1} \frac{\partial \phi(\lambda, z)}{\partial \bar{\lambda}} \frac{d\bar{\lambda} \wedge d\lambda}{\lambda}, \\ \oint_{|\lambda|=R} \phi(\lambda, z) d\lambda - \oint_{|\lambda|=1+0} \phi(\lambda, z) d\lambda &= \iint_{1 < \lambda \leq R} \frac{\partial \phi(\lambda, z)}{\partial \bar{\lambda}} \frac{d\bar{\lambda} \wedge d\lambda}{\lambda}. \end{aligned}$$

Поскольку оператор $\hat{1} + \hat{R}$ сохраняет скалярное произведение (41), то

$$\oint_{|\lambda|=1+0} \phi(\lambda, z) d\lambda = \oint_{|\lambda|=1-0} \phi(\lambda, z) d\lambda,$$

и

$$\begin{aligned} &\oint_{|\lambda|=R} \phi(\lambda, z) d\lambda - \oint_{|\lambda|=1/R} \phi(\lambda, z) d\lambda \\ &= \iint_{\frac{1}{R} \leq \lambda < R, |\lambda| \neq 1} \frac{\partial \phi(\lambda, z)}{\partial \bar{\lambda}} \frac{d\bar{\lambda} \wedge d\lambda}{\lambda} \\ &= \pi \iint_{\frac{1}{R} \leq \lambda < R, |\lambda| \neq 1} \operatorname{sgn}(\lambda \bar{\lambda} - 1) \\ &\quad \times \left[b(\lambda) \Psi\left(-\frac{1}{\bar{\lambda}}, z\right) \Psi(-\lambda, z) + b(-\lambda) \Psi(\lambda, z) \Psi\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}, z\right) \right] \frac{d\bar{\lambda} \wedge d\lambda}{\bar{\lambda} \lambda}. \end{aligned}$$

С учетом того, что форма $\frac{d\bar{\lambda} \wedge d\lambda}{\bar{\lambda} \lambda}$ инвариантна относительно замены $\lambda \rightarrow -1/\bar{\lambda}$, получаем, что интегралы в точках λ и $-1/\bar{\lambda}$ взаимно сокращаются и, следовательно,

$$\oint_{|\lambda|=R} \phi(\lambda, z) d\lambda = \oint_{|\lambda|=1/R} \phi(\lambda, z) d\lambda.$$

С другой стороны, при $R \rightarrow \infty$

$$\oint_{|\lambda|=R} \phi(\lambda, z) d\lambda \rightarrow 1, \quad \oint_{|\lambda|=1/R} \phi(\lambda, z) d\lambda \rightarrow \chi^2(0, z),$$

следовательно, $\chi(0, z) = \pm 1$ и $V(z) = 0$, что и требовалось доказать.

Если потенциал $u(z)$ вещественный, то $\Psi(-1/\bar{\lambda}, z) = \bar{\Psi}(\lambda, z)$, откуда сразу получаем (39), (40). Наоборот, если выполнены соотношения (39), (40), то функция $\bar{\Psi}(-1/\bar{\lambda}, z)$ также удовлетворяет уравнениям обратной задачи и, следовательно, $L = \bar{L}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для случая, когда $\bar{\partial}$ -проблема отсутствует, достаточные условия на данные нелокальной задачи Римана были получены автором совместно с Р. Г. Новиковым в работах [39], [40].

ЗАМЕЧАНИЕ. Редукции (38), (40) нелинейны. Их можно линеаризовать преобразованием Кэли $\widehat{Z} = \widehat{R}(2 + \widehat{R})^{-1}$.

3.4. Связь с физической задачей рассеяния. Прозрачные при одной энергии потенциалы. Главный член асимптотики волновой функции при больших значениях $|z|$ можно вычислить, используя метод стационарной фазы. Оказывается, что

$$\begin{aligned}\Psi(\lambda, z) &= e^{\frac{i}{2}(\lambda\bar{z}+z/\lambda)} \left(1 + O\left(\frac{1}{|z|}\right)\right) \quad \text{при } |\lambda| \neq 1, \\ \Psi_{\pm}(\lambda, z) &= e^{\frac{i}{2}(\lambda\bar{z}+z/\lambda)} + \frac{A_{\pm}(\lambda, z/|z|)}{\sqrt{z}} e^{i|z|} \\ &\quad + \frac{B_{\pm}(\lambda, z/|z|)}{\sqrt{z}} e^{-i|z|} + \left(1 + O\left(\frac{1}{|z|}\right)\right) \quad \text{при } |\lambda| = 1,\end{aligned}$$

причем коэффициенты $A_{\pm}, B_{\pm}$ зависят лишь от $R(\lambda, \lambda')$ и $T(\lambda)$ при $|\lambda| = 1$. Отсюда следует, что амплитуда рассеяния для получающихся потенциалов не зависит от $T(\lambda)$ (если потенциал $u(z)$ достаточно быстро убывает на бесконечности, то значение $T(\lambda)$ на окружности $|\lambda| = 1$ связано с $R(\lambda, \lambda')$ некоторым условием непрерывности, подробнее см. раздел 4). В частности, полагая $R(\lambda, \lambda') \equiv 0$, $T(\lambda) = 0$ при $|\lambda| = 1$, мы получаем потенциалы с нулевым рассеянием при одной энергии $\epsilon_0 = 1$. Отметим, что в отличие от одномерного случая, когда для безотражательных потенциалов фазовый сдвиг прошедшей волны нетривиален, в двумерии фазовый сдвиг отсутствует. Вопрос о скорости убывания прозрачных потенциалов на бесконечности подробно рассмотрен в разделе 4. Точно решаемые примеры найдены в разделе 5.

Формула, связывающая ядро нелокальной задачи Римана $R(\lambda, \lambda')$ с амплитудой рассеяния, измеряемой при той же энергии, при которой рассматривается наша задача (в данном случае $\epsilon_0 = 1$), была найдена Р. Г. Новиковым в [70], [71]. Напомним ее вывод.

Для этого вычислим асимптотику функций $\Psi_{\pm}(\lambda, z)$ при больших z (здесь $|\lambda| = 1$). Пусть

$$(42) \quad h_{\pm}(\lambda, \mu) = \frac{1}{4\pi^2} \iint e^{-\frac{i}{2}(\mu\bar{z}+\bar{\mu}z)} u(z) \Psi_{\pm}(\lambda, z) dz_R dz_I.$$

Из (14) следует, что

$$(43) \quad \Psi_{\pm}(\lambda, z) = e^{\frac{i}{2}(\lambda\bar{z}+z/\lambda)} - \iint e^{i(k\bar{z}+\bar{k}z)} \frac{\widetilde{u\Psi}_{\pm}(\lambda, k)}{4k\bar{k} - 1 \pm 0(\lambda\bar{k} - k\bar{\lambda})} dk_R dk_I,$$

где

$$\widetilde{u\Psi}_{\pm}(\lambda, k) = \frac{1}{\pi^2} \iint e^{-i(k\bar{z}+\bar{k}z)} u(z) \Psi_{\pm}(\lambda, z) dz_R dz_I.$$

Легко видеть, что

$$h_{\pm}(\lambda, \mu) = \frac{1}{4} \widetilde{u\Psi}_{\pm}(\lambda, \mu/2).$$

Полагая в (43) $k = \lambda r e^{i\varphi}$, получаем:

$$\Psi_{\pm}(\lambda, z) = e^{\frac{i}{2}(\lambda \bar{z} + z/\lambda)} - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} r dr \frac{e^{ir(\lambda \bar{z} e^{i\varphi} + \bar{\lambda} z e^{-i\varphi})} \widetilde{u} \Psi_{\pm}(\lambda, \lambda r e^{i\varphi})}{4r^2 - 1 \mp i0 \sin \varphi}.$$

При больших $|z|$ асимптотика “садится” на особенности подынтегрального выражения, поэтому

$$\begin{aligned} \Psi_{\pm}(\lambda, z) &\sim e^{\frac{i}{2}(\lambda \bar{z} + z/\lambda)} - \frac{\pi i}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-\frac{i}{2}(\lambda \bar{z} e^{i\varphi} + \bar{\lambda} z e^{-i\varphi})} h_{\pm}(\lambda, \lambda e^{i\varphi}) \\ &\quad \times [\operatorname{sgn}(\lambda \bar{z} e^{i\varphi} + \bar{\lambda} z e^{-i\varphi}) \pm \operatorname{sgn} \sin \varphi] \\ &= e^{\frac{i}{2}(\lambda \bar{z} + z/\lambda)} \mp \pi i \int_0^{\pi} d\varphi \theta(\pm(\lambda \bar{z} e^{i\varphi} + \bar{\lambda} z e^{-i\varphi})) \\ &\quad \times [h_{\pm}(\lambda, \lambda e^{i\varphi}) e^{\frac{i}{2}(\lambda \bar{z} e^{i\varphi} + \bar{\lambda} z e^{-i\varphi})} - h_{\pm}(\lambda, -\lambda e^{i\varphi}) e^{-\frac{i}{2}(\lambda \bar{z} e^{i\varphi} + \bar{\lambda} z e^{-i\varphi})}]. \end{aligned}$$

Здесь $\theta(x)$ – функция Хевисайда, т.е. $\theta(x) = 1$ при $x \geq 0$, $\theta(x) = 0$ при $x < 0$.

Напомним, что растущей при $|z| \rightarrow \infty$ фазе отвечает рассеянная волна, а убывающей при $|z| \rightarrow \infty$ – падающая. Обозначим $\Psi_0(\lambda, z) = e^{\frac{i}{2}(\lambda \bar{z} + z/\lambda)}$ решение вакуумного уравнения Шрёдингера.

Таким образом, решения $\Psi_{\pm}(\lambda, z)$ отвечают следующим процессам рассеяния:

1) падающая волна вида

$$(44) \quad \Psi_+^{\text{in}}(\lambda, z) = \Psi_0(\lambda, z) + \pi i \int_{-\pi}^0 h_+(\lambda, \lambda e^{i\varphi}) \Psi_0(\lambda e^{i\varphi}, z) d\varphi$$

переходит в рассеянную

$$(45) \quad \Psi_+^{\text{out}}(\lambda, z) = \Psi_0(\lambda, z) - \pi i \int_0^{\pi} h_+(\lambda, \lambda e^{i\varphi}) \Psi_0(\lambda e^{i\varphi}, z) d\varphi;$$

2) падающая волна вида

$$(46) \quad \Psi_-^{\text{in}}(\lambda, z) = \Psi_0(\lambda, z) + \pi i \int_0^{\pi} h_-(\lambda, \lambda e^{i\varphi}) \Psi_0(\lambda e^{i\varphi}, z) d\varphi$$

переходит в рассеянную

$$(47) \quad \Psi_-^{\text{out}}(\lambda, z) = \Psi_0(\lambda, z) - \pi i \int_{-\pi}^0 h_-(\lambda, \lambda e^{i\varphi}) \Psi_0(\lambda e^{i\varphi}, z) d\varphi.$$

Перепишем соотношение (32) в операторном виде. Пусть $\widehat{K}_{\pm}^{\pm}$ – интегральные операторы вида:

$$\begin{aligned} (\widehat{K}_+^+ f)(\lambda) &= -\pi i \int_0^{\pi} h_+(\lambda, \lambda e^{i\varphi}) f(\lambda e^{i\varphi}) d\varphi, \\ (\widehat{K}_+^- f)(\lambda) &= \pi i \int_{-\pi}^0 h_+(\lambda, \lambda e^{i\varphi}) f(\lambda e^{i\varphi}) d\varphi, \\ (\widehat{K}_-^+ f)(\lambda) &= -\pi i \int_{-\pi}^0 h_-(\lambda, \lambda e^{i\varphi}) f(\lambda e^{i\varphi}) d\varphi, \\ (\widehat{K}_-^- f)(\lambda) &= \pi i \int_0^{\pi} h_-(\lambda, \lambda e^{i\varphi}) f(\lambda e^{i\varphi}) d\varphi. \end{aligned}$$

Тогда соотношения (44)–(47) записываются в виде:

$$\begin{aligned}\Psi_+^{\text{in}}(\lambda) &= (\widehat{1} + \widehat{K}_+^-) \Psi_0(\lambda), & \Psi_+^{\text{out}}(\lambda) &= (\widehat{1} + \widehat{K}_+^+) \Psi_0(\lambda), \\ \Psi_-^{\text{in}}(\lambda) &= (\widehat{1} + \widehat{K}_-^-) \Psi_0(\lambda), & \Psi_-^{\text{out}}(\lambda) &= (\widehat{1} + \widehat{K}_-^+) \Psi_0(\lambda).\end{aligned}$$

С другой стороны, согласно определению оператора рассеяния падающей волне $\Psi_0(\lambda)$ соответствует рассеянная волна $(\widehat{1} + \widehat{S}) \Psi_0(\lambda)$, следовательно,

$$(48) \quad \begin{aligned}(\widehat{1} + \widehat{K}_+^+) &= (\widehat{1} + \widehat{K}_+^-)(\widehat{1} + \widehat{S}), \\ (\widehat{1} + \widehat{K}_-^+) &= (\widehat{1} + \widehat{K}_-^-)(\widehat{1} + \widehat{S}).\end{aligned}$$

В то же время, согласно определению данных нелокальной задачи Римана

$$(49) \quad \begin{aligned}(\widehat{1} + \widehat{K}_+^+) &= (\widehat{1} + \widehat{R})(\widehat{1} + \widehat{K}_+^-), \\ (\widehat{1} + \widehat{K}_-^+) &= (\widehat{1} + \widehat{R})(\widehat{1} + \widehat{K}_-^-).\end{aligned}$$

Операторы K_+^+ , K_-^+ назовем квазиверхнетреугольными, поскольку интегрирование ведется по φ от 0 до π , K_+^- и K_-^- – соответственно квазинижнетреугольными.

Связь операторов $\widehat{S}$ и $\widehat{R}$ описывается следующим образом. Для операторов $\widehat{S}$ и $\widehat{R}$ общего положения существует единственная пара факторизаций (48), (49), поэтому если мы знаем, к примеру, $\widehat{R}$, то по нему находятся все четыре оператора $\widehat{K}_\pm^\pm$, а следовательно, и матрица оператора $\widehat{S}$, и наоборот. Эти формулы очень похожи на формулы, связывающие оператор рассеяния с ядром нелокальной задачи Римана для одномерного нестационарного оператора Шрёдингера, в работе С. В. Манакова [56] с тем отличием, что в [56] операторы действуют на функциях на прямой и факторизации – чисто треугольные.

Докажем теперь редукцию (38).

Пусть $\#$ – следующая операция сопряжения. Если $\widehat{K}$ – оператор с ядром $K(\lambda, \mu)$, то $\widehat{K}^\#$ – оператор с ядром $K(-\mu, -\lambda)$.

Дословно повторяя доказательство п. 1 теоремы 3.4, получаем, что функции $w_\pm(\lambda, \mu)$, задаваемые (22), и функции $h_\pm(\lambda, \mu)$, задаваемые (42), связаны соотношением

$$w_\pm(\lambda, \mu) = h_\pm(-\mu, -\lambda),$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned}(\widehat{1} + \widehat{W}_+^+)^\# &= (\widehat{1} + \widehat{K}_+^-), & (\widehat{1} + \widehat{W}_+^-)^\# &= (\widehat{1} + \widehat{K}_+^+), \\ (\widehat{1} + \widehat{W}_-^+)^\# &= (\widehat{1} + \widehat{K}_-^-), & (\widehat{1} + \widehat{W}_-^-)^\# &= (\widehat{1} + \widehat{K}_-^+).\end{aligned}$$

Поскольку

$$(\widehat{1} + \widehat{R}) = (\widehat{1} + \widehat{W}_+^+)^{-1}(\widehat{1} + \widehat{W}_-^+),$$

то

$$\begin{aligned}(\widehat{1} + \widehat{R})^\# &= (\widehat{1} + \widehat{W}_-^+)^\# ((\widehat{1} + \widehat{W}_+^+)^\#)^{-1} = (\widehat{1} + \widehat{K}_-^-)(\widehat{1} + \widehat{K}_+^-)^{-1} \\ &= [(\widehat{1} + \widehat{K}_+^-)(\widehat{1} + \widehat{K}_-^-)^{-1}]^{-1} = (\widehat{1} + \widehat{R})^{-1},\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

3.5. Обратное преобразование рассеяния в пределе малой амплитуды (борновское приближение). В заключение раздела в качестве примера рассмотрим линейный предел нашей конструкции при $R(\lambda, \lambda'), T(\lambda) \ll 1$ (борновское приближение). В этом приближении условие потенциальности (38) приобретает вид:

$$R(\lambda, \lambda') = -R(-\lambda', -\lambda).$$

Полагая в (36) $\chi(\lambda, z) \equiv 1$, получаем:

$$\begin{aligned} u(z) = & \frac{1}{2\pi} \iint_{|\lambda|=|\lambda'|=1} \lambda(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}') R(\lambda, \lambda') e^{-\frac{i}{2}[(\lambda - \lambda')\bar{z} + (\bar{\lambda} + \bar{\lambda}')z]} |d\lambda| |d\lambda'| \\ & + \iint \operatorname{sgn}(\lambda\bar{\lambda} - 1) b(\lambda) e^{-\frac{i}{2}[(\lambda + 1/\bar{\lambda})\bar{z} + (\bar{\lambda} + 1/\lambda)z]} \frac{(\lambda\bar{\lambda} + 1) d\lambda_R d\lambda_I}{\lambda\bar{\lambda}}. \end{aligned}$$

Мы видим, что функция $R(\lambda, \lambda')$ определяет преобразование Фурье внутри круга радиуса 2 в импульсном пространстве, а функция $T(\lambda)$ – преобразование Фурье вне этого круга (напомним, что $T(\lambda)$ связана с $b(\lambda)$ соотношением (19)), что полностью согласуется с хорошо известным свойством амплитуды рассеяния в борновском приближении: она зависит от преобразования Фурье потенциала в круге радиуса $2\sqrt{\epsilon_0}$.

4. Дополнительные условия на данные рассеяния для быстроубывающих на бесконечности потенциалов.

Быстроубывающие потенциалы, прозрачные при одной энергии

Данный раздел посвящен изложению результатов работы [41].

Как мы уже отмечали, в борновском приближении амплитуда рассеяния при энергии ϵ_0 вычисляется по преобразованию Фурье потенциала в круге радиуса $2\sqrt{\epsilon_0}$, а преобразование Фурье вне этого круга играет роль “дополнительных параметров”. Хорошо известно, что быстрое убывание потенциала влечет гладкость его преобразования Фурье, в том числе и на границе этого круга, т.е. “физические” и “нефизические” “данные рассеяния” на границе оказываются связанными некоторыми *условиями непрерывности*. В данном разделе мы обсудим аналоги этих условий, возникающие в точной теории.

Особое внимание мы уделим случаю прозрачных при одной энергии потенциалов. В борновском приближении их преобразование Фурье тождественно обращается в 0 в круге радиуса $2\sqrt{\epsilon_0}$, т.е. оно может быть гладким, но не вещественно-аналитическим. Тем самым, в борновском приближении такие потенциалы могут убывать быстрее любой степени, однако экспоненциальное убывание на бесконечности влечет за собой тождественное равенство нулю. Мы покажем, что это верно и в точной теории, т.е. существует достаточно много прозрачных при одной энергии неособых потенциалов, убывающих на бесконечности быстрее любой степени расстояния. В частности, условия непрерывности автоматически выполняются в сферически-симметричной ситуации. В то же время, как показано в [70], [71], [41], экспоненциально убывающих на бесконечности прозрачных потенциалов не существует, и получающаяся скорость убывания, в некотором смысле, “максимально возможная”.

4.1. Условия на данные рассеяния для быстроубывающих потенциалов.

Прямая задача. Как и раньше, в этом разделе мы будем считать, что $\epsilon_0 = 1$.

Введем следующие обозначения:

$$u(x, y) \in C_M^{(N)}(\mathbb{R}^2),$$

если

$$\frac{\partial^{n_1+n_2}}{\partial x^{n_1} \partial y^{n_2}} u(x, y) \in C(\mathbb{R}^2)$$

и

$$\left| \frac{\partial^{n_1+n_2}}{\partial x^{n_1} \partial y^{n_2}} u(x, y) \right| < \frac{C_{n_1, n_2}}{(1 + \sqrt{x^2 + y^2})^M}, \quad C_{n_1, n_2} > 0,$$

для всех неотрицательных целых чисел n_1, n_2 таких, что $n_1 + n_2 \leq N$. Здесь $C(\mathbb{R}^2)$ обозначает пространство вещественных непрерывных функций на плоскости.

Пусть потенциал $u(x, y)$ вещественен,

$$(50) \quad u(x, y) = \bar{u}(x, y),$$

$$(51) \quad u(x, y) \in C_{M+2+\varepsilon}^{(3)}(\mathbb{R}^2), \quad \varepsilon > 0,$$

константа C_{00} удовлетворяет условию малости нормы (9) и, следовательно, уравнения прямой задачи рассеяния однозначно разрешимы при всех λ . Покажем, что в этом случае на граничные значения “данных рассеяния” на единичной окружности возникают $2M + 2$ соотношения (переходящие в линейном пределе в условие непрерывности первых M производных преобразования Фурье потенциала на границе круга радиуса 2 в импульсном пространстве).

Как и раньше, мы будем использовать комплексные обозначения

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy, \quad \partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y), \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$$

и писать $u(z)$ вместо $u(z, \bar{z})$, не подразумевая при этом голоморфности.

Нам понадобятся следующие дополнительные “данные рассеяния”, введенные Р. Г. Новиковым в [71]:

$$(52) \quad a_m(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\mathbb{C}} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^m e^{-\frac{i}{2}[\lambda \bar{z} + z/\lambda]} \right] u(z) \psi(z, \lambda) dz_R dz_I,$$

$$(53) \quad b_m(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\mathbb{C}} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} \right)^m e^{\frac{i}{2}[\bar{\lambda} z + \bar{z}/\bar{\lambda}]} \right] u(z) \psi(z, \lambda) dz_R dz_I.$$

Очевидно, что $b(\lambda) = b_0(\lambda)$.

Из (51) следует, что

- 1) при $m = 0, 1, \dots, M$ все интегралы (52), (53) сходятся и функции $a_m(\lambda), b_m(\lambda)$ непрерывны в областях $D_- \setminus 0$ и D_+ , где $D_{\pm} = \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda|^{\mp 1} \leq 1\}$;
- 2)

$$(54) \quad \text{при } |\lambda| \rightarrow \infty \quad a_m(\lambda) = O(1), \quad b_m(\lambda) = O\left(\frac{1}{|\lambda|^3}\right),$$

$$(55) \quad \text{при } |\lambda| \rightarrow 0 \quad a_m(\lambda) = O\left(\frac{1}{|\lambda|^{2m}}\right), \quad b_m(\lambda) = O\left(\frac{|\lambda|^3}{|\lambda|^{2m}}\right).$$

Из (52), (53) с учетом вещественности $u(z)$ следует, что

3)

$$(56) \quad \partial_{\bar{\lambda}} a_m(\lambda) = T(\lambda) \overline{b_m(\lambda)},$$

$$(57) \quad \partial_{\bar{\lambda}} b_m(\lambda) = b_{m+1}(\lambda) + T(\lambda) \overline{a_m(\lambda)},$$

где, как и раньше,

$$T(\lambda) = \frac{\pi \operatorname{sgn}(\lambda \bar{\lambda} - 1)}{\bar{\lambda}} b(\lambda).$$

В формулах (52), (53) мы применяем операторы ∂_λ и $\partial_{\bar{\lambda}}$ к голоморфной и антиголоморфной функциям соответственно. Пусть

$$\lambda = r e^{i\varphi}, \quad \lambda' = r' e^{i\varphi'}, \quad r, r' \in \mathbb{R}_+.$$

Тогда

$$\partial_\lambda = \frac{\bar{\lambda}}{\lambda} \partial_{\bar{\lambda}} + \frac{1}{i\lambda} \partial_\varphi, \quad \partial_{\bar{\lambda}} = \frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \partial_\lambda - \frac{1}{i\bar{\lambda}} \partial_\varphi,$$

и для произвольной голоморфной функции $f(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus 0$, имеем

$$\partial_\lambda^n f(\lambda) = \left(\frac{1}{i\lambda} \partial_\varphi \right)^n f(\lambda), \quad \partial_{\bar{\lambda}}^n \overline{f(\lambda)} = \left(-\frac{1}{i\bar{\lambda}} \partial_\varphi \right)^n \overline{f(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus 0.$$

Поэтому операторы ∂_λ^m и $\partial_{\bar{\lambda}}^m$ в (52), (53) можно заменить на $\left(\frac{1}{i\lambda} \partial_\varphi \right)^m$ и $\left(-\frac{1}{i\bar{\lambda}} \partial_\varphi \right)^m$ соответственно.

Учитывая определение функций $h_\pm(\lambda, \lambda')$ (42) и формулы (52), (53), получаем

$$(58) \quad a_m(\lambda(1+0))|_{|\lambda|=1} = \left(\frac{1}{i\lambda'} \partial_{\varphi'} \right)^m h_+(\lambda, \lambda') \Big|_{\lambda'=\lambda},$$

$$(59) \quad b_m(\lambda(1+0))|_{|\lambda|=1} = \left(-i\lambda' \partial_{\varphi'} \right)^m h_+(\lambda, \lambda') \Big|_{\lambda'=-\lambda},$$

$$(60) \quad a_m(\lambda(1-0))|_{|\lambda|=1} = \left(\frac{1}{i\lambda'} \partial_{\varphi'} \right)^m h_-(\lambda, \lambda') \Big|_{\lambda'=\lambda},$$

$$(61) \quad b_m(\lambda(1-0))|_{|\lambda|=1} = \left(-i\lambda' \partial_{\varphi'} \right)^m h_-(\lambda, \lambda') \Big|_{\lambda'=-\lambda}.$$

Если потенциал $u(z)$ удовлетворяет (50), (51), то амплитуда рассеяния $f(\lambda, \lambda')$ и функции $h_\pm(\lambda, \lambda')$ M раз непрерывно дифференцируемы на торе и $b(\lambda) \in C_3^{(M)}(D_+)$.

Если же $u(x, y) \in C_\infty^{(\infty)}(\mathbb{R}^2)$, то

$$f(\lambda, \lambda') \in C^{(\infty)}(T^2).$$

Если, кроме этого, выполнено условие “малости нормы”, то

$$b(\lambda) \in C_\infty^{(\infty)}(D_\pm).$$

Соотношения (56)–(57), (58)–(61) для $m = 0, \dots, M$ и свойства (54)–(55), для $m = 0$ были доказаны в [71]. Покажем, что из них вытекает набор из $2M + 2$ соотношений между функцией $b(\lambda)$ и функциями $h_{\pm}(\lambda, \lambda')$. Напомним, что если мы знаем ядро $R(\lambda, \lambda')$, то функции $h_{\pm}(\lambda, \lambda')$ вычисляются по нему, и, тем самым, мы получаем соотношения между $b(\lambda)$ и $R(\lambda, \lambda')$.

Обозначим $a_m^{\pm}(\lambda)$, $b_m^{\pm}(\lambda)$ ограничения функций $a_m(\lambda)$, $b_m(\lambda)$ на области $D_{\pm}$ соответственно:

$$a_m^{\pm}(\lambda) = \theta(\pm(\lambda\bar{\lambda} - 1))a_m(\lambda), \quad b_m^{\pm}(\lambda) = \theta(\pm(\lambda\bar{\lambda} - 1))b_m(\lambda),$$

где θ – функция Хевисайда.

Соотношения мы будем определять индукцией по M .

Пусть $M = 0$. Тогда уравнение (58) с $m = 0$ приобретает вид

$$(62) \quad b_0^+(\lambda(1+0))\big|_{|\lambda|=1} = h_+(\lambda, -\lambda), \quad b_0^+(\lambda) = \theta(\lambda\bar{\lambda} - 1)b_0(\lambda).$$

Соотношение (62) – первое из наших дополнительных условий.

Мы видим, что вычисление $a_0^+(\lambda)$ сводится к решению краевой задачи для уравнения (56) в области D_+ с граничными условиями (58) на единичной окружности $|\lambda| = 1$ и (54) на $\lambda = \infty$. Эта граничная задача разрешима тогда и только тогда, когда выполнено соотношение

$$(63) \quad \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D_+} h_+(\xi, \xi) \frac{d\xi}{\xi - \lambda} - \frac{1}{\pi} \iint_{D_+} \frac{\pi b(\xi) \overline{b(\xi)}}{\xi} \frac{d\xi_R d\xi_I}{\xi - \lambda} \right] \bigg|_{|\lambda|=1-0} \equiv -s_0,$$

где s_0 – некоторая константа. Если оно выполнено, то функция $a_0^+(\lambda)$ имеет вид

$$a_0^+(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D_+} h_+(\xi, \xi) \frac{d\xi}{\xi - \lambda} - \frac{1}{\pi} \iint_{D_+} \frac{\pi b(\xi) \overline{b(\xi)}}{\xi} \frac{d\xi_R d\xi_I}{\xi - \lambda} + s_0.$$

Соотношение (63) и есть второе дополнительное условие на данные рассеяния.

Пусть теперь для $M = n$ $2n + 2$ условия на данные рассеяния уже построены и мы уже выразили функции $a_m^+(\lambda)$, $b_m^+(\lambda)$, $m = 0, \dots, n$, через

$$b_0^+(\lambda) \text{ и } \left(\frac{1}{i\lambda'} \partial_{\varphi'} \right)^m h_+(\lambda, \lambda') \bigg|_{\lambda'=\lambda}, \quad m = 0, \dots, n.$$

Положим $M = n + 1$. Согласно (57)

$$b_{n+1}^+(\lambda) = \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} b_n^+(\lambda) - \frac{\pi}{\lambda} b_0^+(\lambda) \overline{a_n^+(\lambda)},$$

причем мы считаем, что все функции в правой части уже выражены через $b_0^+(\lambda)$ и $h_+(\lambda, \lambda')$. Тогда мы получаем новое соотношение на данные рассеяния:

$$b_{n+1}^+(\lambda(1+0))\big|_{|\lambda|=1} = (i\lambda' \partial_{\varphi'})^{n+1} h_+(\lambda, \lambda') \big|_{\lambda'=-\lambda}.$$

Другое соотношение возникает как условие разрешимости граничной задачи для $a_{n+1}^+(\lambda)$ и имеет вид

$$\left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D_+} \left(\left(\frac{1}{i\lambda'} \partial_{\varphi'} \right)^{n+1} h_+(\xi, \lambda') \Big|_{\lambda'=\xi} \right) \frac{d\xi}{\xi - \lambda} - \frac{1}{\pi} \iint_{D_+} \frac{\pi b_0^+(\xi) \overline{b_{n+1}^+(\xi)}}{\xi} \frac{d\xi_R d\xi_I}{\xi - \lambda} \right] \Big|_{|\lambda|=1-0} \equiv -s_{n+1},$$

где s_{n+1} — некоторая заранее не известная константа.

В этом случае $a_{n+1}^+(\lambda)$ дается формулой

$$a_{n+1}^+(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D_+} \left(\left(\frac{1}{i\lambda'} \partial_{\varphi'} \right)^{n+1} h_+(\xi, \lambda') \Big|_{\lambda'=\xi} \right) \frac{d\xi}{\xi - \lambda} - \frac{1}{\pi} \iint_{D_+} \frac{\pi b_0^+(\xi) \overline{b_{n+1}^+(\xi)}}{\xi} \frac{d\xi_R d\xi_I}{\xi - \lambda} + s_{n+1}.$$

Шаг индукции сделан.

Половина из этих соотношений была найдена в [71]. Аналогии другой половины для случая отрицательной энергии были выписаны автором и С. П. Новиковым в работе [42] (см. раздел 6). Условия, связывающие граничные значения $b_m^+(\lambda)$ с $h_+(\lambda, \lambda')$, естественно называть локальными, условия разрешимости граничных задач — нелокальными.

Вместо области D_+ можно было бы рассмотреть область D_- , однако из-за вещественности потенциала мы получили бы тот же самый набор соотношений. Функции $a_m(\lambda)$, $b_m(\lambda)$ в области D_- выражаются через их значения в D_+ по формулам:

$$(64) \quad a_m^-(\lambda) = \sum_{k=0}^m \overline{\beta_{mk}(-1/\bar{\lambda})} a_m^+(-1/\bar{\lambda}),$$

$$(65) \quad b_m^-(\lambda) = \sum_{k=0}^m \beta_{mk}(-1/\bar{\lambda}) \overline{b_m^+(-1/\bar{\lambda})},$$

где функции $\beta_{mk}(\lambda)$ задаются как коэффициенты разложения дифференциальных операторов

$$(\lambda^2 \partial_\lambda)^m = \sum_{k=0}^m \beta_{mk}(\lambda) \partial_\lambda^k$$

и имеют следующие свойства:

- а) $\beta_{mm}(\lambda) = \lambda^{2m}$;
- б) $\beta_{m0}(\lambda) = 0$ при $m > 0$;
- в) $\deg \beta_{mk}(\lambda) = m + k$ при $0 < k \leq m$;
- г) $\beta_{m+1,k}(\lambda) = \lambda^2 \beta_{m,k-1}(\lambda) + \lambda^2 \partial_\lambda b_{mk}(\lambda)$,
где $\beta_{00} = 1$, $\beta_{m,-1} = 0$, $\beta_{m,m+1} = 0$.

Обсудим подробнее случай прозрачных при $E = \epsilon_0 = 1$ потенциалов, для которых $f(\lambda, \lambda') \equiv 0$ (и $h_+(\lambda, \lambda') \equiv 0$ соответственно). Тогда $M + 1$ локальное условие просто означает, что при $|\lambda| = 1$ функция $b(\lambda)$ и ее производные $\partial_{\bar{\lambda}}^{n_1} \partial_{\lambda}^{n_2} b(\lambda)$ с $n_1 \geq 0, n_2 \geq 0, n_1 + n_2 \leq M$ равны 0. Но нелокальные условия даже в этом случае достаточно не тривиальны. Первое из них имеет вид:

$$I_0(\lambda) \Big|_{|\lambda|=1} \equiv -s_0,$$

где

$$(66) \quad I_0(\lambda) = -\frac{1}{\pi} \iint_{|\xi| \geq 1} \frac{\pi b(\xi) \overline{b(\xi)}}{\xi} \frac{d\xi_R d\xi_I}{\xi - \lambda}$$

и

$$(67) \quad a_0^+(\lambda) = I_0(\lambda) + s_0.$$

Из (52) следует, что

$$(68) \quad a_0^+(\infty) = \widehat{u}(0),$$

где $\widehat{u}(p)$ – преобразование Фурье потенциала $u(z)$.

Из (66) вытекает достаточно неожиданное следствие.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $u(z)$ ненулевой потенциал, прозрачный при одной энергии, удовлетворяющий условию “малости нормы”, и $u(z) \in C_{2+\epsilon}^{(3)}(\mathbb{R}^2)$. Тогда его среднее строго положительно:

$$(69) \quad \widehat{u}(0) > 0,$$

где

$$(70) \quad \widehat{u}(p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{z \in \mathbb{C}} e^{-\frac{i}{2}(p\bar{z} + \bar{p}z)} u(z) dz_R dz_I, \quad p \in \mathbb{C}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (66), (67) вытекает, что

$$(71) \quad \partial_{\bar{\lambda}} a_0^+(e^{i\varphi} \lambda) = \frac{\pi \theta(\lambda \bar{\lambda} - 1)}{\bar{\lambda}} |b(e^{i\varphi} \lambda)|^2.$$

Усредним функцию $a_0^+(\lambda)$ по углу:

$$(72) \quad \alpha_0(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_0^+(e^{i\varphi} \lambda) d\varphi.$$

Для усредненной функции имеет место соотношение

$$(73) \quad \partial_{\bar{\lambda}} \alpha_0(\lambda) = \frac{\pi \theta(\lambda \bar{\lambda} - 1)}{\bar{\lambda}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |b(e^{i\varphi} \lambda)|^2 d\varphi,$$

$\alpha_0(\lambda) = 0$ при $|\lambda| \leq 1, \alpha_0(\infty) = \widehat{u}(0)$.

На вещественной оси $\text{Im } \lambda = 0, \text{Re } \lambda = r > 0$ имеем:

$$(74) \quad \partial_r \alpha_0(r) = 2 \partial_{\bar{\lambda}} \alpha_0(\lambda) \Big|_{\text{Im } \lambda = 0} = \frac{2\pi}{r} \theta(r^2 - 1) \int_0^{2\pi} |b(e^{i\varphi} r)|^2 d\varphi \geq 0.$$

Поскольку $\alpha_0(1) = 0, \alpha_0(\infty) = \widehat{u}(0)$, то $\widehat{u}(0) > 0$.

Следствие 1 дает нам довольно сильные ограничения на геометрию носителя функции $b(\lambda)$. В частности, справедливо следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если выполнены условия следствия 1, то точки 0 и ∞ нельзя соединить путем, не пересекающим носителя $b(\lambda)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $a_0^+(\lambda)$ тождественно равна 0 при $|\lambda| \leq 1$. Если бы такой путь существовал, то $a_0^+(\lambda)$ была бы голоморфна в его окрестности и тождественно равна 0 на нем, откуда следовало бы, что $a_0^+(\infty) = 0$. Но это противоречит следствию 1.

4.2. Условия непрерывности для центральных потенциалов. Найденные нами условия на данные рассеяния для потенциалов общего вида достаточно сложны. Обсудим их для случая центральных потенциалов $u(z) = u(|z|)$ с нулевым рассеянием при $E = \epsilon_0 = 1$. Для них функции a_m, b_m имеют вид

$$(75) \quad a_m(e^{i\varphi}\lambda) = e^{-im\varphi}a_m(\lambda), \quad b_m(e^{i\varphi}\lambda) = e^{im\varphi}b_m(\lambda).$$

Убедимся, что в этом случае нелокальные условия выполняются автоматически за счет симметрии задачи.

ЛЕММА 4.1. Пусть $R(\lambda, \lambda') \equiv 0$ и $b(\lambda)$ таково, что

- 1) $b(\lambda) \in C_\infty^{(\infty)}(\mathbb{C})$,
- 2) $\partial_\lambda^m \partial_{\bar{\lambda}}^n b(\lambda)|_{|\lambda|=1} = 0$ при всех $m, n \geq 0$,
- 3) $b(e^{i\varphi}\lambda) = \overline{b(\lambda)}$, где $\varphi \in \mathbb{R}$, т.е. $b(\lambda) = \tilde{b}(|\lambda|)$,
- 4) $b(\lambda) = \overline{b(\bar{\lambda})}$, $b(1/\lambda) = b(\lambda)$.

Тогда все сформулированные выше условия на данные рассеяния, отвечающие быстроубывающим на бесконечности потенциалам, выполнены автоматически.

Докажем лемму 4.1 индукцией по номеру соотношения. Функция $b_0^+(\lambda) = \theta(\lambda\bar{\lambda} - 1)b(\lambda)$ нам известна и удовлетворяет первому локальному соотношению.

Пусть первые $(2n+1)$ соотношения на данные рассеяния выполнены, функции $b_n^+(\lambda)$ и $a_{n-1}^+(\lambda)$ уже выражены через $b(\lambda)$, для них выполнено соотношение (75) и все производные $b_n^+(\lambda)$ обращаются в 0 на окружности $|\lambda| = 1$.

Проверим, что выполнены два следующих соотношения, выразим $b_{n+1}^+(\lambda)$ и $a_n(\lambda)$ через $b(\lambda)$ и убедимся, что эти функции также удовлетворяют (75) и все производные $b_{n+1}^+(\lambda)$ обращаются в 0 при $|\lambda| = 1$. Положим

$$a_n^+(\lambda) = \frac{1}{\lambda^n} [I_n(\lambda) - I_n(1)],$$

где

$$(76) \quad I_n = \partial_{\bar{\lambda}}^{-1} \left[\frac{\pi \lambda^n}{\lambda} \theta(\lambda\bar{\lambda} - 1) b(\lambda) \overline{b_n(\lambda)} \right] = -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\pi \xi^n}{\xi} \theta(\xi\bar{\xi} - 1) \frac{b(\xi) \overline{b_n(\xi)}}{\xi - \lambda} d\xi_R d\xi_I.$$

Функция $I_n(\lambda)$ корректно определена и $I_n(\lambda) = I_n(|\lambda|)$ (это следует из (75)). Тогда $a_n^+(\lambda) \equiv 0$ при $|\lambda| = 1$ и является решением краевой задачи (56), с граничными условиями (58) для $h_+(\lambda, \lambda') \equiv 0$, (54), и имеет симметрию (75). Положим

$$(77) \quad b_{n+1}^+(\lambda) = \partial_{\bar{\lambda}} b_n^+(\lambda) - \frac{\pi}{\lambda} b(\lambda) \overline{a_n^+(\lambda)}.$$

Мы видим, что $b_n^+(\lambda)$ удовлетворяет (59). Поскольку все производные $b_n^+(\lambda)$ равны 0 при $|\lambda| = 1$, это верно и для $b_{n+1}^+(\lambda)$.

4.3. Построение потенциалов, прозрачных при одной энергии. Убедимся теперь, что найденные нами необходимые дополнительные условия на данные рассеяния потенциалов, быстро убывающих на бесконечности, для случая нулевой амплитуды рассеяния при $E = \epsilon_0 = 1$ являются также и достаточными. По-видимому, это верно и для ненулевой амплитуды рассеяния, однако полного доказательства этого факта пока нет.

Сформулируем основной результат раздела.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $R(\lambda, \lambda') \equiv 0$, $b(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, – произвольная функция со следующими свойствами:

- 1) $b(\lambda) \in C_{\infty}^{(\infty)}(\mathbb{C})$;
- 2) $b(1/\bar{\lambda}) = b(\lambda)$, $b(-1/\bar{\lambda}) = \bar{b}(\lambda)$;
- 3) $\partial_{\lambda}^m \partial_{\bar{\lambda}}^n b(\lambda)|_{|\lambda|=1} = 0$ при всех $m, n \geq 0$;
- 4) функции $b(\lambda)$ удовлетворяют первым $(M+1)$ нелокальным соотношениям, сформулированным выше для случая $f(\lambda, \lambda') \equiv 0$, т.е. разрешима следующая $M+1$ граничная задача во внешности единичного круга $D_+ = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \geq 1\}$:

$$(78) \quad \begin{aligned} \partial_{\bar{\lambda}} a_m^+(\lambda) &= T(\lambda) \overline{b_m^+(\lambda)}, \\ a_m^+(\lambda)|_{|\lambda|=1} &= 0, \quad a_m^+(\infty) = O(1), \quad m = 0, 1, \dots, M, \end{aligned}$$

где функции $b_m^+(\lambda)$ рекуррентно определяются формулами

$$(79) \quad \begin{aligned} b_{m+1}^+(\lambda) &= \partial_{\bar{\lambda}} b_m^+(\lambda) - \frac{\pi}{\lambda} \theta(\lambda \bar{\lambda} - 1) b(\lambda) \overline{a_m^+(\lambda)}, \\ b_0^+(\lambda) &= \theta(\lambda \bar{\lambda} - 1) b(\lambda). \end{aligned}$$

Тогда построенный по “данным рассеяния” $b(\lambda)$, $R(\lambda, \lambda')$ потенциал $u(z)$ обладает следующими свойствами:

- 1) $u(z)$ вещественен;
- 2) $u(z) \in C_{M+3}^{(\infty)}(\mathbb{R}^2)$;
- 3) его амплитуда рассеяния при $E = \epsilon_0 = 1$ равна 0, т.е. $s(\vec{k}, \vec{k}') \equiv 0$ при $|\vec{k}| = |\vec{k}'| = 1$; более того, физические решения уравнения Шрёдингера при $E = \epsilon_0 = 1$ имеют следующую асимптотику:

$$(80) \quad \varphi^+(\lambda, z) = e^{\frac{i}{2}(\lambda \bar{z} + z/\lambda)} + O(|z|^{-M-2}), \quad \text{где } |\lambda| = 1,$$

или, в стандартных обозначениях,

$$\varphi^+(\vec{k}, \vec{x}) = e^{i\vec{k}\vec{x}} + O(|\vec{x}|^{-M-2}), \quad |\vec{k}|^2 = \epsilon_0 = 1.$$

Сопоставляя теорему 4.1 с леммой 4.1, получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $R(\lambda, \lambda') \equiv 0$ и $b(\lambda)$ удовлетворяет условиям леммы 4.1. Тогда соответствующий потенциал $u(z)$ вещественен, $u(z) \in C_\infty^{(\infty)}(\mathbb{R}^2)$ и

$$\varphi^+(\vec{k}, \vec{x}) = e^{i\vec{k}\vec{x}} + O(1/|\vec{x}|^\infty), \quad |\vec{k}|^2 = \epsilon_0 = 1$$

(т.е. $\varphi^+(\vec{k}, \vec{x}) - e^{i\vec{k}\vec{x}}$ убывает при $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ быстрее любой степени $|\vec{x}|^{-1}$). Тем самым, построенный потенциал прозрачен (имеет единичный оператор рассеяния) при одной энергии $E = \epsilon_0 = 1$ и, более того, рассеянная волна отсутствует при $E = \epsilon_0 = 1$ во всех порядках по $1/z$ при $z \rightarrow \infty$.

Оставшаяся часть раздела посвящена доказательству теоремы 4.1. Его идея состоит в том, что мы получим асимптотический ряд для волновой функции и потенциала при больших значениях z и убедимся, что для потенциала все его коэффициенты равны 0.

Напомним, что предэкспонента волновой функции $\chi(z, \lambda)$ определена как решение уравнения

$$\partial_{\bar{\lambda}} \chi(z, \lambda) = T(\lambda, z) \overline{\chi(z, \lambda)}$$

с асимптотикой

$$\chi(z, \lambda) \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad |\lambda| \rightarrow \infty,$$

где

$$T(\lambda, z) = e^{-\frac{i}{2}(\lambda \bar{z} + z/\lambda + \bar{\lambda} z + \bar{z}/\bar{\lambda})} T(\lambda), \quad T(\lambda) = \frac{\pi \operatorname{sgn}(\lambda \bar{\lambda} - 1)}{\bar{\lambda}} b(\lambda).$$

Это уравнение эквивалентно интегральному уравнению на $\chi(z, \lambda)$

$$(81) \quad \chi(z, \lambda) = 1 + (A_z \chi)(z, \lambda),$$

где

$$(A_z f)(\lambda) = \partial_{\bar{\lambda}}^{-1} (T(\lambda, z) \overline{f(\bar{\lambda})}) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{T(\zeta, z) \overline{f(\bar{\zeta})}}{\zeta - \lambda} d\zeta_R d\zeta_I.$$

Из уравнения (81) следует, что

$$\chi(z, \lambda) = 1 + A_z \cdot 1 + (A_z^2 \chi)(z, \lambda).$$

Как мы уже отмечали, это уравнение разрешимо при всех z и решение имеет вид

$$\chi(z, \lambda) = (\widehat{1} - A_z^2)^{-1} (1 + A_z \cdot 1).$$

При больших z оно разлагается в равномерно сходящийся ряд

$$(82) \quad \chi(z, \lambda) = (\widehat{1} + A_z^2 + A_z^4 + A_z^6 + \cdots) (1 + A_z \cdot 1).$$

Формула (82) может быть записана как

$$(83) \quad \chi(z, \lambda) = 1 + A_z \cdot 1 + A_z^2 \cdot 1 + \cdots + A_z^{2M+5} \cdot 1 + R_M,$$

где

$$R_M = \left(\sum_{k=M+3}^{\infty} A_z^{2k} \right) (1 + A_z \cdot 1).$$

Как показано в [41], имеет место следующая оценка на R_M .

ЛЕММА 4.2. Пусть $b(\lambda)$ удовлетворяет условиям 1)–3) теоремы 4.1. Тогда

1) при всех $m, n \geq 0$

$$|\partial_z^m \partial_{\bar{z}}^n R_M| \leq \frac{\alpha_{mn}^{(2)}}{(1 + |z|)^{M+3}},$$

2) при $\lambda \rightarrow \infty$

$$R_M = \frac{q(z)}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),$$

где

$$(84) \quad |\partial_z^m \partial_{\bar{z}}^n q(z)| \leq \frac{\beta_{mn}^{(2)}}{(1 + |z|)^{M+3}} \quad \text{при всех } m, n \geq 0.$$

Используя (84), получаем, что вклад R_M в потенциал $u(z)$ и в функцию $\chi(z, \lambda)$ лежит в пространстве $C_{M+3}^{(\infty)}(\mathbb{R}^2)$. Отсюда следует

ЛЕММА 4.3. Для того чтобы вычислить потенциал $u(z)$ и функцию $\chi(z, \lambda)$ с точностью до членов порядка $O(1/|z|^{M+3})$, достаточно учесть первые $2M + 6$ членов в формуле (83).

Пусть

$$\chi_M(z, \lambda) = 1 + A_z \cdot 1 + \dots + A_z^{2M+5} \cdot 1.$$

Для вычисления асимптотического разложения $\chi_M(z, \lambda)$ мы воспользуемся следующими леммами из [41]:

ЛЕММА 4.4. Пусть $b(\lambda)$ удовлетворяет условиям 1)–3) теоремы 4.1, $f(z, \lambda)$ – некоторая гладкая функция двух переменных λ, z такая, что все производные $\partial_z^k \partial_{\bar{z}}^l \partial_\lambda^m \partial_{\bar{\lambda}}^n f(z, \lambda)$ равномерно по z ограничены в λ -плоскости, т.е.

$$|\partial_z^k \partial_{\bar{z}}^l \partial_\lambda^m \partial_{\bar{\lambda}}^n f(z, \lambda)| \leq \alpha_{klmn} \quad \text{для всех } z, \lambda.$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Имеет место асимптотическое разложение

$$\begin{aligned} A_z * f(z, \lambda) &= \frac{2i}{(z - \bar{z}/\lambda^2)} \exp\left[-\frac{i}{2}(\lambda\bar{z} + \bar{\lambda}z + z/\lambda + \bar{z}/\bar{\lambda})\right] \\ &\times \left\{ \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\partial_{\bar{\lambda}} \circ \frac{2i}{z - \bar{z}/\lambda^2} \right)^k \right] * (T(\lambda)\overline{f(z, \lambda)}) + O\left(\frac{1}{|z|^\infty}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Здесь $\circ$ обозначает произведение операторов и $*$ обозначает результат применения дифференциального оператора к функции.

2) Рассмотрим асимптотическое разложение $A_z * f(z, \lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$:

$$(85) \quad A_z * f(z, \lambda) = \frac{\alpha_{-1}(z)}{\lambda} + \frac{\alpha_{-2}(z)}{\lambda^2} + \dots$$

- (поскольку $T(\lambda)$ быстро убывает при $|\lambda| \rightarrow \infty$, то в (85) нет не голоморфных членов). Тогда при всех k $\alpha_{-k}(z) \in C_{\infty}^{(\infty)}(\mathbb{R}^2)$.
- 3) Пусть $|\lambda| = 1$. Тогда функция $A_z * f(z, \lambda)$ убывает при $z \rightarrow \infty$ быстрее любой степени $|z|$ вместе со всеми производными.
- 4) $A_z^2 * f(z, \lambda)$ — гладкая функция z, λ такая, что все выражения

$$|z| \left| \left(\partial_z^{n_1} \partial_{\bar{z}}^{n_2} \partial_{\lambda}^{k_1} \partial_{\bar{\lambda}}^{k_2} f(z, \lambda) \right) \right|$$

- ограниченные функции переменных z, λ . (Для $A_z * f(z, \lambda)$ это неверно из-за присутствия быстроосциллирующей экспоненты.)
- 5)

$$(86) \quad A_z^2 * f(\lambda, z) = -\partial_{\bar{\lambda}}^{-1} \left\{ T(\lambda) \frac{1}{w\mathcal{R}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{w^k} \left(\partial_{\lambda} \circ \frac{1}{\mathcal{R}} \right)^k \right] * (\overline{T(\lambda)} f(\lambda, z)) \right\} + O\left(\frac{1}{|z|^{\infty}}\right),$$

где

$$(87) \quad w = \bar{z}/2i, \quad \mathcal{R} = (1 - \nu/\lambda^2), \quad \nu = z/\bar{z}.$$

ЛЕММА 4.5. Рассмотрим функцию $A_z^{2k+1} * 1$, где $k \geq 0$. Она обладает следующими свойствами.

- 1) При $|\lambda| = 1$

$$A_z^{2k+1} * 1 \in C_{\infty}^{(\infty)}(\mathbb{R}^2) \quad \text{по } z.$$

- 2) Рассмотрим асимптотическое разложение этой функции при $\lambda \rightarrow \infty$

$$A_z^{2k+1} * 1 = \frac{\chi_{-1, 2k+1}(z)}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

Тогда $\chi_{-1, 2k+1}(z) \in C_{\infty}^{(\infty)}(\mathbb{R}^2)$ по z .

Тем самым, члены вида $A_z^{2k+1} * 1$, $k \geq 0$, в асимптотическом разложении (83) дают вклад в функцию $\chi(z, \lambda)$ при $|\lambda| = 1$ и в потенциал $u(z)$, определяемый (35), из функционального класса $C_{\infty}^{(\infty)}(\mathbb{R}^2)$ по переменной z . Отсюда следует, что при асимптотических вычислениях этими членами можно пренебречь.

Применяя формулу (86) из леммы 4.4, мы получаем, что

$$(88) \quad \chi_M(z, \lambda) = 1 + \frac{\mathcal{C}_0(\lambda, \nu)}{w} + \frac{\mathcal{C}_1(\lambda, \nu)}{w^2} + \dots + \frac{\mathcal{C}_M(\lambda, \nu)}{w^{M+1}} + \frac{\mathcal{C}_{M+1}(\lambda, \nu)}{w^{M+2}} + \Xi_M(z, \lambda),$$

где $w, \mathcal{R}, \nu$ определены в (87) и

$$\Xi_M(z, \lambda) \in C_{M+3}^{(\infty)}(\mathbb{R}^2 \setminus D) \quad \text{по } z \text{ при всех } \lambda,$$

$$\Xi_M(z, \lambda) = \Xi_{M, -1}(z)/\lambda + O(1/|\lambda|^2) \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty, \quad \Xi_{M, -1}(z) \in C_{M+3}^{(\infty)}(\mathbb{R}^2 \setminus D)$$

(D – единичный диск $|z| < 1$), функции $\mathcal{C}_k(\lambda, \nu)$ определяются рекуррентными формулами

$$(89) \quad \mathcal{C}_n(\lambda, \nu) = -\partial_\lambda^{-1} \left[\frac{1}{\mathcal{R}} T(\lambda) \sum_{k=0}^n \left(\partial_\lambda \circ \frac{1}{\mathcal{R}} \right)^k * [\overline{T(\lambda)} \mathcal{C}_{n-k-1}(\lambda, \nu)] \right], \quad \mathcal{C}_{-1}(\lambda, \nu) \equiv 1.$$

Действительно, мы имеем

$$(90) \quad \chi_{M+1}(z, \lambda) = 1 + A_z^2 * \chi_M(z, \lambda).$$

Подставляя (86) в (90) и сравнивая коэффициенты при $1/w^{n+1}$, $n = 0, \dots, M+1$, в обеих частях, получаем (89).

Введем дополнительные обозначения. Рассмотрим дифференциальный оператор $\frac{1}{\mathcal{R}} \left(\partial_\lambda \circ \frac{1}{\mathcal{R}} \right)^n$. Его можно записать в следующем виде:

$$\frac{1}{\mathcal{R}} \left(\partial_\lambda \circ \frac{1}{\mathcal{R}} \right)^n = \sum_{k=0}^n f_{nk} \partial_\lambda^k, \quad \text{где } f_{nk} = f_{nk}(\lambda, \nu), \quad \mathcal{R} = \mathcal{R}(\lambda, \nu) = 1 - \nu/\lambda^2.$$

Функции $f_{nk} = f_{nk}(\lambda, \nu)$ обладают следующими свойствами.

a)

$$f_{nn} = \frac{1}{\mathcal{R}^{n+1}} = \frac{1}{(1 - \nu/\lambda^2)^{n+1}}.$$

b)

$$(91) \quad f_{nk} = \delta_{nk} + O(|\lambda|^{n-k+2}) \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty.$$

c)

$$(92) \quad f_{nk} = O(|\lambda|^{n+k+2}) \quad \text{при } \lambda \rightarrow 0.$$

d)

$$(93) \quad f_{n+1,k} = \frac{1}{\mathcal{R}} (\partial_\lambda f_{nk} + f_{n,k-1}), \quad f_{00} = \frac{1}{\mathcal{R}} = \frac{1}{1 - \nu/\lambda^2}, \quad f_{k,1} = 0, \quad f_{k,k+1} = 0.$$

e) При фиксированном ν функция $f(\lambda, \nu)$ мероморфна по λ с полюсами в точках $\lambda^2 = \nu$. В них

$$f_{nk} = O\left(\frac{1}{\lambda^2 - \nu}\right)^{2n-k+1}.$$

Мы готовы сформулировать основную алгебраическую лемму раздела.

ЛЕММА 4.6. Пусть для $b(\lambda)$ выполнены условия теоремы 4.1. Тогда для $n = 1, \dots, M$ имеет место разложение

$$(94) \quad \mathcal{C}_n(\lambda, \nu) = \sum_{l=0}^n f_{nl}(\lambda, \nu) c_l(\lambda),$$

где функции $c_l(\lambda)$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$(95) \quad \partial_{\bar{\lambda}} c_l(\lambda) = - \left[T(\lambda) \sum_{k=0}^n \partial_{\lambda}^k (\overline{T(\lambda)} c_{n-k-1}(\lambda)) \right], \quad c_{-1}(\lambda) \equiv 1, \quad \lambda \neq 0.$$

(Эти уравнения можно получить формальной подстановкой $\nu = 0$ в уравнение (89).) Эти функции не зависят от ν и определяются по формулам

$$(96) \quad c_n(\lambda) = -\pi \operatorname{sgn}(\lambda \bar{\lambda} - 1) \sum_{k=0}^n \alpha_{nk}(\lambda) a_k(\lambda),$$

где $\alpha_{nk}(\lambda)$ задаются как

$$(97) \quad \partial_{\lambda}^n \circ \frac{1}{\lambda} = \sum_{k=0}^n \alpha_{nk}(\lambda) \circ \partial_{\lambda}^k, \quad \alpha_{nk}(\lambda) = (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} \frac{1}{\lambda^{n-k+1}}$$

и функции $a_m(\lambda)$ имеют вид

$$a_m(\lambda) = \theta(\lambda \bar{\lambda} - 1) a_m^+(\lambda) + \theta(1 - \lambda \bar{\lambda}) a_m^-(\lambda),$$

где $a_m^+(\lambda)$ – решения краевой задачи (78) и $a_m^-(\lambda)$ даются формулами (64).

Ее доказательство будет приведено в конце раздела.

Вернемся к доказательству теоремы 4.1. Утверждение 1) доказано в разделе 6. Используя (88), (94), (96), (91), (97), (87), получаем следующую оценку на $\chi_M(z, \lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$:

$$(98) \quad \chi_M(z, \lambda) = 1 - \frac{\pi}{\lambda} \sum_{k=0}^M \left(\frac{2i}{\bar{z}} \right)^{k+1} a_k(\infty) + \frac{(2i)^{M+2} \mathcal{C}_{M+1,-1}(\nu)}{\bar{z}^{M+2}} \frac{1}{\lambda} + \frac{\Xi_{M,-1}(z)}{\lambda} + O\left(\frac{1}{|\lambda|^2} \right),$$

где

$$\mathcal{C}_{M+1}(\lambda, \nu) = \frac{\mathcal{C}_{M+1,-1}(\nu)}{\lambda} + O\left(\frac{1}{|\lambda|^2} \right).$$

Из формул (35), (98), (87) и лемм 4.4, 4.6 следует

$$(99) \quad u(z) = \frac{(2i)^{M+3}}{\bar{z}^{M+3}} \frac{\partial \mathcal{C}_{M+1,-1}(\nu)}{\partial \nu} + 2i \partial_z \Xi_{M,-1}(z) + \tilde{u}_M(z),$$

где $\tilde{u}_M(z) \in C_{M+3}^{(\infty)}(\mathbb{R}^2 \setminus D)$, все члены в (99) – функции класса $C_{M+3}^{(\infty)}(\mathbb{R}^2 \setminus D)$. Функция $u(z)$ гладкая, что доказывает утверждение 2).

Из (78) и свойства 3) функции $b(\lambda)$ в условии теоремы 4.1 следует, что

$$(100) \quad \partial_{\lambda}^{n_1} \partial_{\bar{\lambda}}^{n_2} a_m^+(\lambda) \Big|_{|\lambda|=1} = 0 \quad \text{для всех } n_1, n_2 \geq 0.$$

Используя (88), (94), (96), свойство е) функций f_{nk} , (97), (100) и лемму 4.5, получаем, что

$$\mathcal{C}_k(\lambda, \nu) \Big|_{|\lambda|=1} \equiv 0, \quad k = 0, \dots, M,$$

и

$$(101) \quad \chi(z, \lambda) \Big|_{|\lambda|=1} = 1 + \frac{\mathcal{C}_{M+1}(\lambda, \nu)}{w^{M+2}} + u_M(z, \lambda) + \tilde{\chi}_M(z, \lambda),$$

где $u_M(z, \lambda) \in C_{M+3}^{(\infty)}(\mathbb{R}^2 \setminus D)$, $\tilde{\chi}_M(z, \lambda) \in C_{M+3}^{(\infty)}(\mathbb{R}^2 \setminus D)$.

Из (101) следует, что функция

$$\varphi(z, \lambda) = e^{\frac{i}{2}(\lambda \bar{z} + z/\lambda)} \chi(z, \lambda) \Big|_{|\lambda|=1}$$

имеет асимптотику (80). Поскольку для нее выполнено условие излучения, то $\varphi(z, \lambda)$ совпадает с физическим решением $\varphi^-(z, \lambda)$.

Теорема 4.1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.6. Функции $\mathcal{C}_n(\lambda, \nu)$, $n = 0, \dots, M$, удовлетворяют (89) тогда и только тогда, когда выполнено

$$(102) \quad \begin{cases} \partial_{\bar{\lambda}} \mathcal{C}_m(\lambda, \nu) = \frac{1}{\mathcal{R}} T(\lambda) \overline{\mathcal{D}_m(\lambda, \nu)}, & m = 0, \dots, M, \\ \mathcal{D}_m(\lambda, \nu) = \overline{\left(\partial_{\lambda} \circ \frac{1}{\mathcal{R}} \right) \mathcal{D}_{m-1}(\lambda, \nu) - T(\lambda) \overline{\mathcal{C}_{m-1}(\lambda, \nu)}}, & m = 1, \dots, M, \end{cases}$$

где

$$\mathcal{D}_0(\lambda, \nu) = -T(\lambda),$$

функции $\mathcal{C}_m(\lambda, \nu)$ непрерывны по λ при постоянном ν и

$$\mathcal{C}_m(\lambda, \nu) \rightarrow 0 \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty.$$

Функции $c_m(\lambda)$ удовлетворяют (95) тогда и только тогда, когда они удовлетворяют

$$(103) \quad \begin{cases} \partial_{\bar{\lambda}} c_m(\lambda) = T(\lambda) \overline{d_m(\lambda)}, & \lambda \neq 0, \quad m = 0, \dots, M, \\ d_m(\lambda) = \partial_{\bar{\lambda}} d_{m-1}(\lambda) - T(\lambda) \overline{c_{m-1}(\lambda)}, & \lambda \neq 0, \quad m = 1, \dots, M, \end{cases}$$

где

$$d_0(\lambda) = -T(\lambda).$$

Уравнения (103) совпадают с (56), (57), отличаясь лишь стартовой функцией $d_0(\lambda)$ вместо $b_0(\lambda)$.

Прямое вычисление с помощью (56), (57) показывает, что функции $c_m(\lambda)$ из (96), $m = 0, \dots, M$, и функции

$$(104) \quad d_m(\lambda) = -\pi \operatorname{sgn}(\lambda \bar{\lambda} - 1) \sum_{k=0}^m \overline{\alpha_{mk}(\lambda)} b_k(\lambda)$$

удовлетворяют (103).

Для нас существенно, что все функции $a_k(\lambda)$, $b_k(\lambda)$, $k = 0, \dots, M$, обращаются в 0 на единичной окружности $|\lambda| = 1$ со всеми производными. (Это свойство вытекает из условий 1), 3), 4) теоремы 4.1.) Благодаря этому функции $c_n(\lambda)$, определяемые (96), и $d_n(\lambda)$, определяемые (104), оказываются гладкими на окружности $|\lambda| = 1$.

Проверим, что функции $\mathcal{C}_n(\lambda, \nu)$, определяемые (94), и $\mathcal{D}_n(\lambda, \nu)$, определяемые

$$\mathcal{D}_n(\lambda, \nu) = \overline{\mathcal{R}} \sum_{l=0}^n \overline{f_{nl}(\lambda, \nu)} d_l(\lambda),$$

удовлетворяют (102).

Прямое вычисление с помощью (103), (93) дает

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{\lambda}} \mathcal{C}_m(\lambda, \nu) &= \partial_{\bar{\lambda}} \sum_{k=0}^m f_{mk}(\lambda, \nu) c_m(\lambda) \\ &= \sum_{k=0}^m f_{mk}(\lambda, \nu) \partial_{\bar{\lambda}} c_m(\lambda) \\ &= \sum_{k=0}^m f_{mk}(\lambda, \nu) T(\lambda) \overline{d_k(\lambda)} \\ &= T(\lambda) \frac{1}{\overline{\mathcal{R}(\lambda, \nu)}} \overline{\left(\sum_{k=0}^m \overline{\mathcal{R}(\lambda, \nu)} f_{mk}(\lambda, \nu) d_k(\lambda) \right)} \\ &= \frac{T(\lambda)}{\overline{\mathcal{R}(\lambda, \nu)}} \overline{\mathcal{D}_m(\lambda, \nu)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\left(\partial_{\lambda} \circ \frac{1}{\overline{\mathcal{R}(\lambda, \nu)}} \right) \mathcal{D}_m(\lambda, \nu)} &= \partial_{\bar{\lambda}} \sum_{l=0}^m \overline{f_{nl}(\lambda, \nu)} d_l(\lambda) \\ &= \sum_{l=0}^m \overline{\mathcal{R}(\lambda, \nu)} \overline{f_{n+1,l}(\lambda, \nu)} d_l(\lambda) - \sum_{l=1}^m \overline{f_{n,l-1}(\lambda, \nu)} d_l(\lambda) \\ &\quad + \sum_{l=0}^m \overline{f_{nl}(\lambda, \nu)} d_{l+1}(\lambda) + \sum_{l=0}^m \overline{f_{nl}(\lambda, \nu)} T(\lambda) \overline{c_l(\lambda)} \\ &= \sum_{l=0}^{m+1} \overline{\mathcal{R}(\lambda, \nu)} \overline{f_{n+1,l}(\lambda, \nu)} d_l(\lambda) + T(\lambda) \overline{\left(\sum_{l=0}^m f_{nl}(\lambda, \nu) c_l(\lambda) \right)} \\ &= \mathcal{D}_{m+1}(\lambda, \nu) + T(\lambda) \overline{\mathcal{C}_m(\lambda, \nu)}. \end{aligned}$$

С учетом (92), (97) несложно проверяется, что функции $\mathcal{C}_m(\lambda, \nu)$, $\mathcal{D}_m(\lambda, \nu)$ с $m = 0, \dots, M$ ограничены по λ и $\mathcal{C}_m(\lambda, \nu) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

5. Рациональные потенциалы, безотражательные при фиксированной энергии

Выше мы доказали существование достаточно большого семейства потенциалов, прозрачных при одной энергии $\epsilon_0 > 0$. Однако, к сожалению, их построение сводится к решению интегральных уравнений, и явных формул в рамках этого подхода пока получить не удастся.

Как известно, безотражательные одномерные потенциалы даются простыми явными формулами. Они отвечают ситуации, когда предэкспонента $\chi(\lambda, x)$ является рациональной функцией спектрального параметра. Мы покажем, что в двумерии такое предположение также приводит к интересным явным решениям, построенным в работе [34], а также В. Е. Захаровым (частное сообщение).

Ранее при изучении обратной задачи рассеяния для двумерного потенциала Шрёдингера при фиксированной энергии мы предполагали, что интегральное уравнение (33) не имеет однородных решений ни при каких значениях спектрального параметра λ . Если потенциал $u(x, y)$ достаточно велик, то это не так. Так, например, в работе С. П. Новикова и автора [42] было показано, что если мы рассматриваем задачу рассеяния при фиксированной отрицательной энергии $\epsilon_0 < 0$, то необходимым условием отсутствия сингулярности является положительность оператора $L - \epsilon_0$, т. е. в спектре оператора Шрёдингера нет точек ниже ϵ_0 (см. раздел 6).

Вопрос о том, как правильно определить “данные рассеяния” в случае, когда существуют однородные решения интегрального уравнения (и, как следствие, сингулярности волновой функции) до сих пор остается открытым (частичные результаты на этот счет были получены в [42], см. также раздел 6). Дело в том, что волновая функция двумерного оператора Шрёдингера не голоморфна на многообразии $k_x^2 + k_y^2 = \epsilon_0$ и особенности не обязаны быть полюсами, а могут иметь более сложное устройство. Более того, для вещественных потенциалов общего положения мы имеем не особые точки, а целые особые контуры (подробнее этот вопрос обсуждается в разделе 6). Тем не менее, в данном разделе мы предполагаем, что “данные рассеяния” $R(\lambda, \bar{\lambda})$ и $T(\lambda)$ тождественно равны 0, функция $\Psi(\lambda, x, y)$ – рациональная функция спектрального параметра λ (для простоты мы рассматриваем только случай общего положения, когда все полюсы простые) и в полюсах выполнены соотношения (108), аналогичные выведенным в [2] для уравнения Кадомцева–Петвиашвили I. Тогда $\Psi(\lambda, x, y)$ оказывается собственной функцией оператора Шрёдингера с рациональным потенциалом (в общем случае комплексного, с ненулевым магнитным членом и, возможно, сингулярного).

Если параметры конструкции удовлетворяют дополнительным соотношениям, описанным ниже, то магнитный член тождественно зануляется, потенциал $u(z)$ вещественен, автоматически несингулярен, рационален по $z, \bar{z}$, убывает на бесконечности как квадрат расстояния от начала координат и прозрачен при энергии ϵ_0 . Прозрачность (безотражательность) означает, что “физические” волновые функции явно вычисляются при $k_x^2 + k_y^2 = \epsilon_0$ и имеют асимптотику

$$\Psi(\vec{k}, x, y) = e^{i(k_x x + k_y y)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \right) \quad \text{при } |x|^2 + |y|^2 \rightarrow \infty.$$

(Напомним, что рассеянная волна убывает в размерности 2 как $O\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$.)

По-видимому, медленное убывание на бесконечности является “платой” за то, что в каком-то смысле мы совершаем “насилие” над обратной задачей, предписывая волновой функции поведение, не вытекающее из прямого преобразования.

По аналогии с тем, как рациональная волновая функция в работе [29] порождает многосолитонные решения Кадомцева–Петвиашвили I, построенные потенциалы оказываются многосолитонными решениями уравнения Веселова–Новикова в классе функций, выходящих на бесконечности на отрицательную константу.

В заключение отметим, что аналогичные решения можно построить и для $\epsilon_0 < 0$, однако они оказываются сингулярными. Уравнения, описывающие динамику этих сингулярностей, были исследованы в работе [30]. Однако, поскольку мы в основном интересуемся спектральной теорией, мы ограничимся случаем $\epsilon_0 > 0$.

5.1. Алгебраическая схема построения рациональных солитонов. Первый шаг – построение операторов Шрёдингера с рациональными коэффициентами (в общем случае комплексных и с ненулевым магнитным полем).

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть*

$$(105) \quad \Psi(\lambda, z) = e^{\theta(\lambda, z)} \chi(\lambda, z),$$

$$(106) \quad \chi(\lambda, z) = 1 + \sum_{j=1}^N \frac{\chi_j^{(-1)}(z)}{\lambda - \lambda_j},$$

где

$$\theta(\lambda, z) = \frac{ik}{2} \left(\lambda \bar{z} + \frac{z}{\lambda} \right),$$

функции $\chi_j^{(-1)}(z)$ определены как решения системы линейных уравнений

$$(107) \quad \chi_j^{(0)}(z) = (\kappa_j(z) + \gamma_j) \chi_j^{(-1)}(z),$$

где $\lambda_j, j = 1, \dots, N$, – набор точек в $\overline{\mathbb{C}}$ таких, что $\lambda_j \neq 0, \infty$,

$$\kappa_j(z) = -\frac{\partial}{\partial \lambda} \theta(\lambda, z) \Big|_{\lambda=\lambda_j} = -\frac{ik}{2} \left(\bar{z} + \frac{z}{\lambda_j^2} \right),$$

γ_j – произвольные комплексные константы; $\chi_j^{(0)}$ – коэффициенты разложения при $(\lambda - \lambda_j)^0$ функции $\chi(\lambda, z)$ в точке λ_j :

$$\chi(\lambda, z) = \frac{\chi_j^{(-1)}(z)}{\lambda - \lambda_j} + \chi_j^{(0)}(z) + \chi_j^{(1)}(z)(\lambda - \lambda_j) + o((\lambda - \lambda_j)^2).$$

В терминах коэффициентов разложения функции $\Psi(\lambda, z)$ в окрестности точки λ_j ,

$$\Psi(\lambda, z) = \frac{\Psi_j^{(-1)}(z)}{\lambda - \lambda_j} + \Psi_j^{(0)}(z) + \Psi_j^{(1)}(z)(\lambda - \lambda_j) + o((\lambda - \lambda_j)^2),$$

условие (107) записывается как

$$(108) \quad \Psi_j^{(0)}(z) = \gamma_j \Psi_j^{(-1)}(z).$$

Тогда $\Psi(\lambda, z)$ – собственная функция оператора

$$L = -4\partial_z \partial_{\bar{z}} + V(z)\partial_z + u(z), \quad L\Psi(\lambda, z) = k^2 \Psi(\lambda, z),$$

где потенциалы $V(z)$, $u(z)$ имеют вид:

$$(109) \quad V(z) = 4\partial_{\bar{z}} \ln \left(1 - \sum_{j=1}^N \frac{\chi_j^{(-1)}(z)}{\lambda_j} \right),$$

$$(110) \quad u(z) = -4\partial_z \partial_{\bar{z}} \ln \det A,$$

$A = (a_{lj})$ – матрица размера $(N \times N)$ с элементами

$$(111) \quad \begin{aligned} a_{lj} &= \frac{1}{\lambda_j - \lambda_l} \quad \text{при } l \neq j, \\ a_{jj}(z) &= \kappa_j(z) + \gamma_j. \end{aligned}$$

Если все $|\lambda_j| \neq 1$, то функции $V(z)$, $u(z)$ убывают при $|z| \rightarrow \infty$ как $O(1/|z|^2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Перепишем (107) в виде замкнутой системы уравнений на $\chi_j^{(-1)}(z)$. Разлагая (106) вблизи λ_j , получаем:

$$(112) \quad \chi_j^{(0)}(z) = 1 + \sum_{l \neq j}^N \frac{\chi_l^{(-1)}(z)}{\lambda_j - \lambda_l}.$$

Подставляя (112) в (107), получаем:

$$1 + \sum_{l \neq j}^N \frac{\chi_l^{(-1)}(z)}{\lambda_j - \lambda_l} = (\kappa_j(z) + \gamma_j) \chi_j^{(-1)}(z),$$

т.е.

$$\sum_l a_{jl}(z) \chi_l^{(-1)}(z) = 1, \quad j = 1, \dots, N,$$

где $a_{jl}(z)$ определены формулой (111). Мы имеем N уравнений на N неизвестных, причем при $|z| \rightarrow \infty$ эта система диагональна и однозначно разрешима в главном порядке. Тем самым, она однозначно разрешима в точках общего положения. Если часть точек λ_j лежит на единичной окружности, то матрица A диагональна в главном порядке при $|z| \rightarrow \infty$ вдоль лучей общего положения, что достаточно для нас.

2. Легко вычислить асимптотику $\chi(\lambda, z)$ в точках 0 и ∞ :

$$(113) \quad \chi(\lambda, z) = 1 + \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^N \chi_j^{(-1)}(z) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty,$$

$$(114) \quad \chi(\lambda, z) = 1 - \lambda \sum_{j=1}^N \frac{\chi_j^{(-1)}(z)}{\lambda_j} + O(\lambda) \quad \text{при } \lambda \rightarrow 0.$$

3. Будем искать оператор L , для которого $\Psi(\lambda, z)$ – собственная функция, в следующем виде:

$$L = -4\partial_z \partial_{\bar{z}} + V(z) \partial_z + W(z) \partial_{\bar{z}} + u(z),$$

где $V(z)$, $W(z)$, $u(z)$ — пока неизвестные функции. Мы ищем оператор L такой, что $L\Psi(\lambda, z) = k^2\Psi(\lambda, z)$, т.е. $\tilde{\chi}(\lambda, z) = 0$, где

$$\tilde{\chi}(\lambda, z) = e^{-\theta(\lambda, z)}(L - k^2)e^{\theta(\lambda, z)}\chi(\lambda, z).$$

Условие $\tilde{\chi}(\lambda, z) = O(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow 0$ дает нам (109).

Условие $\tilde{\chi}(\lambda, z) = O(1/\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$ дает нам

$$W(z) \equiv 0, \quad u(z) = 2ik\partial_z \left[\sum_{j=1}^N \chi_j^{(-1)}(z) \right].$$

Докажем теперь формулу (110). Для начала заметим, что

$$\begin{pmatrix} \chi_1^{(-1)}(z) \\ \vdots \\ \chi_N^{(-1)}(z) \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \chi_j^{(-1)}(z) &= \text{tr} \left[[1, \dots, 1] A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right] \\ &= \text{tr} \left[\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} [1, \dots, 1] A^{-1} \right] = \text{tr} \left[\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} A^{-1} \right]. \end{aligned}$$

Введем новую матрицу $\tilde{A}(w, z) = (\tilde{a}_{ij}(w, z))$,

$$\tilde{a}_{lj}(w, z) = e^{\frac{ik}{2}(\bar{z}-\bar{w})(\lambda_j-\lambda_l)} a_{lj}(w).$$

Очевидно, что

$$(115) \quad \det \tilde{A}(w, z) = \det A(w), \quad \tilde{A}(z, z) = A(z),$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{w}} \tilde{A}(w, z) \Big|_{w=z} = -\frac{ik}{2} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned}
 (116) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \ln \det A(w, z) &= \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \ln \det A(w, z) \Big|_{w=z} \\
 &= \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \ln \det \tilde{A}(w, z) \Big|_{w=z} \\
 &= \operatorname{tr} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \bar{w}} \tilde{A}(w, z) \right) \tilde{A}(w, z)^{-1} \right] \Big|_{w=z} \\
 &= -\frac{ik}{2} \operatorname{tr} \left[\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \tilde{A}(w, z)^{-1} \right] \Big|_{w=z} \\
 &= -\frac{ik}{2} \operatorname{tr} \left[\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} A(z)^{-1} \right] = -\frac{ik}{2} \sum_{j=1}^N \chi_j^{(-1)}(z),
 \end{aligned}$$

то

$$u(z) = 2ik \left(-\frac{2}{ik} \right) \partial_z \partial_{\bar{z}} \ln \det A = -4 \partial_z \partial_{\bar{z}} \ln \det A.$$

Теорема 5.1 доказана.

5.2. Редукции на данные рассеяния. Следующий шаг в соответствии с общей схемой – выделение чисто потенциальных операторов, т.е. таких, что $V(z) \equiv 0$ (магнитный член отсутствует).

ЛЕММА 5.1. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_N, \gamma_1, \dots, \gamma_N$ – набор “спектральных данных” из теоремы 5.1 такой, что при всех j $|\lambda_j| \neq 1$ и $V(z) \equiv 0$. Тогда расположение полюсов λ_j симметрично относительно отражения $\lambda_j \rightarrow -\lambda_j$, т.е. число N четно и можно выбрать их нумерацию так, что $\lambda_{2j} = -\lambda_{2j-1}$, $j = 1, \dots, N/2$.

ЛЕММА 5.2. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_N, \gamma_1, \dots, \gamma_N$ – набор “спектральных данных” такой, что $V(z) \equiv 0$ и нумерация λ_j выбрана так, что $\lambda_{2j} = -\lambda_{2j-1}$, $j = 1, \dots, N/2$. Тогда $\gamma_{2j-1} - \gamma_{2j} = 1/\lambda_{2j-1}$ для всех j .

Для доказательства этих лемм достаточно вычислить $V(z)$ с точностью до $O(|z|^{-4})$ и убедиться, что обращение в 0 членов, убывающих как $1/|z|^2$ и $1/|z|^3$, влечет за собой указанные ограничения на параметры обратной задачи.

ЛЕММА 5.3. Пусть “спектральные данные” $\lambda_1, \dots, \lambda_N, \gamma_1, \dots, \gamma_N$, где N – четное число, $|\lambda_j| \neq 1$, удовлетворяют соотношениям:

$$(117) \quad \lambda_{2j} = -\lambda_{2j-1}, \quad \gamma_{2j-1} - \gamma_{2j} = 1/\lambda_{2j-1}, \quad j = 1, \dots, N/2.$$

Тогда оператор L не содержит магнитного члена, т.е. $V(z) \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим следующую 1-форму на $\mathbb{C}$:

$$\omega = \Psi(\lambda, z)\Psi(-\lambda, z)\frac{d\lambda}{\lambda} = \chi(\lambda, z)\chi(-\lambda, z)\frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Эта форма мероморфна по λ на $\overline{\mathbb{C}}$, имеет полюсы первого порядка в точках $0, \infty$ и полюсы второго порядка во всех λ_j . Несложное вычисление с учетом (117) показывает, что вне точек $0, \infty$ все вычеты равны 0. Тем самым,

$$\oint_{\gamma_1} \chi(\lambda, z)\chi(-\lambda, z)\frac{d\lambda}{\lambda} = \oint_{\gamma_2} \chi(\lambda, z)\chi(-\lambda, z)\frac{d\lambda}{\lambda},$$

где γ_1, γ_2 — контуры, окружающие точки 0 и ∞ соответственно. С учетом (113), (114)

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_2} \chi(\lambda, z)\chi(-\lambda, z)\frac{d\lambda}{\lambda} &= 2\pi i, \\ \oint_{\gamma_1} \chi(\lambda, z)\chi(-\lambda, z)\frac{d\lambda}{\lambda} &= 2\pi i\chi^2(0, z), \end{aligned}$$

т.е. $\chi^2(0, z) \equiv 1$. Поскольку $\chi(0, z) \rightarrow 1$ при $|z| \rightarrow \infty$, то $\chi(0, z) \equiv 1$. В то же время

$$V(z) = 4\partial_{\bar{z}} \ln \chi(0, z),$$

т.е. $V(z) \equiv 0$, что и требовалось доказать.

Начиная с этого момента, будем считать условия леммы 5.3 выполненными, т.е. $V(z) \equiv 0$, и сформулируем необходимые и достаточные условия вещественности потенциала $u(z)$.

ЛЕММА 5.4. Пусть “спектральные данные” $\lambda_1, \dots, \lambda_N, \gamma_1, \dots, \gamma_N, |\lambda_j| \neq 1$, удовлетворяют условиям потенциальности:

$$(118) \quad \lambda_{2j} = -\lambda_{2j-1}, \quad \gamma_{2j-1} - \gamma_{2j} = 1/\lambda_{2j-1}, \quad j = 1, \dots, N/2.$$

Тогда потенциал $u(z)$ вещественен, т.е. $u(z) = \bar{u}(z)$ тогда и только тогда, когда в дополнение к (118) выполнено:

- 1) расположение полюсов инвариантно относительно антиголоморфной инволюции $\lambda \rightarrow 1/\bar{\lambda}$, т.е. общее число полюсов кратно 4 и нумерацию можно выбрать так, что $\lambda_{4j-3} = 1/\bar{\lambda}_{4j-1}$;
- 2) параметры γ_j связаны соотношением: $\gamma_{4j-3} = \bar{\lambda}_{4j-3}^2 \bar{\gamma}_{4j-3}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим $u(z)$ с точностью до $O(1/|z|^4)$:

$$\begin{aligned} u(z) = \sum_{j=1}^N & \left[-\frac{8}{(\bar{z}\lambda_{2j-1} - z/\lambda_{2j-1})^2} \right. \\ & \left. - \frac{16i}{k(\bar{z}\lambda_{2j-1} - z/\lambda_{2j-1})^3} + \frac{32i\gamma_{2j-1}\lambda_{2j-1}}{k(\bar{z}\lambda_{2j-1} - z/\lambda_{2j-1})^3} \right] + O\left(\frac{1}{|z|^4}\right). \end{aligned}$$

Из вещественности слагаемых, дающих вклад в $O(1/|z|^2)$, получаем условие 1). Вещественность в порядке $O(1/|z|^3)$ дает условие 2).

Условия леммы 5.4 являются также достаточными.

ЛЕММА 5.5. Пусть “спектральные данные” $\lambda_1, \dots, \lambda_{4N}$, $\gamma_1, \dots, \gamma_{4N}$, $|\lambda_j| \neq 1$, таковы, что:

- 1) $\lambda_{2j} = -\lambda_{2j-1}$, $\gamma_{2j-1} - \gamma_{2j} = 1/\lambda_{2j-1}$, $j = 1, \dots, 2N$,
- 2) $\lambda_{4j-1} = 1/\bar{\lambda}_{4j-3}$, $\gamma_{4j-3} = \bar{\lambda}_{4j-3}^2 \bar{\gamma}_{4j-3}$, $j = 1, \dots, N$.

Тогда соответствующий оператор L потенциален, $L = -4\partial_z \partial_{\bar{z}} + u(z)$, u вещественен, т.е. $u(z) = \bar{u}(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Psi(\lambda, z)$ – собственная функция L , построенная по схеме теоремы 5.1. Несложно проверяется, что функция $\tilde{\Psi}(\lambda, z) = \bar{\Psi}(-1/\bar{\lambda}, z)$ также удовлетворяет условиям теоремы 5.1 (совпадение нормировок следует из потенциальности). Тем самым, $\tilde{\Psi}(\lambda, z) \equiv \Psi(\lambda, z)$. Поскольку при всех λ имеет место $(L - k^2)\Psi(\lambda, z) = 0$, то и $(\bar{L} - k^2)\tilde{\Psi}(\lambda, z) = 0$, где $\bar{L} = -4\partial_z \partial_{\bar{z}} + \bar{u}(z)$. Отсюда следует, что $L = \bar{L}$, т.е. $u(z) = \bar{u}(z)$.

Потенциалы $v(z)$, $u(z)$, построенные по “спектральным данным” $\lambda_1, \dots, \lambda_{4N}$, $\gamma_1, \dots, \gamma_{4N}$, – рациональные функции x, y . В случае общего положения эти потенциалы могут иметь особенности. Однако в наиболее интересном случае “спектральных данных”, удовлетворяющих условиям потенциальности и вещественности, потенциал $u(z)$ автоматически получается неособым.

ЛЕММА 5.6. Пусть “спектральные данные” удовлетворяют тем же ограничениям, что и в лемме 5.5. Тогда потенциал $u(z)$ неособый при всех z .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Особенности потенциала $u(z)$ возникают, если $\det A \equiv 0$ в некоторой точке z_0 . Это означает, что существует нетривиальное решение $\vec{\Phi}$ однородного уравнения

$$A(z_0)\vec{\Phi} = \vec{0}, \quad \vec{\Phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_{4N} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi(\lambda) = e^{\theta(\lambda, z_0)} \sum_{j=1}^{4N} \frac{\phi_j}{\lambda - \lambda_j} = e^{\theta(\lambda, z_0)} X(\lambda).$$

Повторяя рассуждения леммы 5.5, получаем, что $X(0) = 0$. Пусть

$$\tilde{\Phi}(\lambda) = \Phi(\lambda) + \bar{\Phi}(-1/\bar{\lambda}) \quad \text{или} \quad \tilde{\Phi}(\lambda) = \Phi(\lambda) - \bar{\Phi}(-1/\bar{\lambda})$$

(знак + или – выбираем так, чтобы $\tilde{\Phi}(\lambda)$ было отлично от 0), и пусть

$$\omega = \tilde{\Phi}(\lambda) \tilde{\Phi}(-\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Форма ω обладает следующими свойствами:

- 1) ω мероморфна на $\bar{\mathbb{C}}$, при этом в точках 0 и ∞ она неособа;
- 2) единственными особенностями ω являются полюсы второго порядка в точках $\lambda_1, \dots, \lambda_{4N}$, при этом вычеты в этих точках равны 0 (проверка аналогична лемме 5.5.);

- 3) поскольку $\overline{\tilde{\Phi}(-1/\bar{\lambda})} = \pm \tilde{\Phi}(\lambda)$, то на единичной окружности $\lambda\bar{\lambda} = 1$, $\tilde{\Phi}(\lambda)\tilde{\Phi}(-\lambda) = \pm \tilde{\Phi}(\lambda)\overline{\tilde{\Phi}(\lambda)}$ – вещественная всюду отличная от нуля функция;
- 4) $\oint_{\gamma_2} \omega = \oint_{|\lambda|=1} \omega$, где γ_2 – контур, окружающий точку ∞ , такой, что все λ_j лежат внутри него.

Поскольку ω неособа в ∞ , то интеграл $\oint_{\gamma_2}$ равен 0, т.е.

$$(119) \quad 0 = \oint_{|\lambda|=1} \tilde{\Phi}(\lambda)\tilde{\Phi}(-\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda} = \pm i \oint_{|\lambda|=1} |\tilde{\Phi}(\lambda)|^2 |d\lambda|.$$

Однако в правой части (119) под знаком интеграла стоит строго неотрицательное выражение и из равенства 0 вытекает, что $\tilde{\Phi}(\lambda) \equiv 0$, и мы получили противоречие.

Отметим, что схема данного доказательства повторяет схему доказательства не-сингулярности решений уравнения Кадомцева–Петвиашвили I, приведенного в работе Б. А. Дубровина и С. М. Натансона [20]. Автор благодарен С. М. Натансону за разъяснение работы [20].

5.3. Явные формулы для потенциалов. Сведение к пфаффианам. Формулы для потенциала $u(z)$ получаются довольно громоздкими (простейший вещественный потенциальный оператор соответствует детерминанту матрицы размера 4×4). Несколько упростить их позволяет следующее наблюдение:

ЛЕММА 5.7. Пусть “спектральные данные” $\lambda_1, \dots, \lambda_{2N}$, $\gamma_1, \dots, \gamma_{2N}$, $|\lambda_j| \neq 1$, удовлетворяют условию потенциальности:

$$\lambda_{2j} = -\lambda_{2j-1}, \quad \gamma_{2j-1} - \gamma_{2j} = 1/\lambda_{2j-1}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Тогда $\det A = P^2(z, \bar{z}, \vec{\lambda}, \vec{\gamma})$, где $P(z, \bar{z}, \vec{\lambda}, \vec{\gamma})$ – некоторый многочлен от переменных $z, \bar{z}$ с коэффициентами, рационально зависящими от λ_j, γ_j .

ЗАМЕЧАНИЕ. Данную лемму можно рассматривать как предельный случай соответствующего результата конечнозонной теории: вместо тета-функций Римана в формулах для потенциальных операторов появляются квадраты тета-функций Прима [85].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем серией преобразований, сохраняющих определитель, матрицу A к кососимметричному виду и воспользуемся тем, что определитель кососимметрической матрицы есть квадрат пфаффиана.

Введем следующие обозначения:

$$\tilde{\kappa}_{2j-1}(z) = \kappa_{2j-1}(z) + \gamma_{2j-1} - \frac{1}{2\lambda_{2j-1}}, \quad \tilde{\kappa}_{2j}(z) = \tilde{\kappa}_{2j-1}(z).$$

Тогда

$$a_{jl} = \frac{1}{\lambda_l - \lambda_j}, \quad j \neq l, \quad a_{ll}(z) = \tilde{\kappa}_l(z) + \frac{1}{2\lambda_l}.$$

Определим матрицы $A^{(m)} = (a_{jl}^{(m)})$, $m = 1, \dots, 5$, следующими формулами:

$$a_{jl}^{(1)}(z) = a_{jl} - \frac{1}{2\lambda_l}, \quad a_{jl}^{(2)}(z) = a_{jl}^{(1)} \frac{\lambda_l}{\lambda_j}, \quad j, l = 1, \dots, 2N, \\ A^{(3)}(z) = U^{-1} A^{(2)}(z) U,$$

где

$$U = (u_{jl}), \quad u_{2j-1,2j-1} = u_{2j-1,2j} = u_{2j,2j-1} = 1, \quad u_{2j,2j} = -1, \quad j = 1, \dots, N,$$

все остальные $u_{jl} = 0$,

$$\begin{aligned} a_{2j-1,2l-1}^{(4)} &= a_{2j-1,2l-1}^{(3)}, & a_{2j,2l-1}^{(4)} &= a_{2j,2l-1}^{(3)} \lambda_{2j-1}, \\ a_{2j-1,2l}^{(4)} &= a_{2j-1,2l}^{(3)} / \lambda_{2l-1}, & a_{2j,2l}^{(4)} &= a_{2j,2l}^{(3)} \lambda_{2j-1} / \lambda_{2l-1}, & j, l &= 1, \dots, N, \\ a_{jl}^{(5)}(z) &= -a_{2j-1,2l}^{(4)}(z), & a_{j,l+N}^{(5)}(z) &= a_{2j-1,2l-1}^{(4)}(z), \\ a_{j+N,l}^{(5)}(z) &= -a_{2j,2l}^{(4)}(z), & a_{j+N,l+N}^{(5)}(z) &= a_{2j,2l-1}^{(4)}(z), & j, l &= 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Несложно проверяется, что

$$\begin{aligned} a_{jl}^{(1)} &= \frac{1}{2} \frac{\lambda_l + \lambda_j}{\lambda_l(\lambda_l - \lambda_j)}, \quad j \neq l, & a_{jj}^{(1)}(z) &= \tilde{\kappa}_j(z), \\ a_{jl}^{(2)} &= \frac{1}{2} \frac{\lambda_l + \lambda_j}{\lambda_j(\lambda_l - \lambda_j)}, \quad j \neq l, & a_{jj}^{(2)}(z) &= \tilde{\kappa}_j(z), \\ a_{2j-1,2l}^{(3)} &= \frac{2\lambda_{2l-1}}{\lambda_{2l-1}^2 - \lambda_{2j-1}^2}, & a_{2j,2l-1}^{(3)} &= \frac{\lambda_{2l-1}^2 + \lambda_{2j-1}^2}{\lambda_{2j-1}(\lambda_{2l-1}^2 - \lambda_{2j-1}^2)}, \\ a_{2j-1,2j-1}^{(3)}(z) &= a_{2j,2j}^{(3)}(z) = \tilde{\kappa}_{2j-1}(z), \end{aligned}$$

все остальные элементы $A^{(3)}$ равны 0,

$$\begin{aligned} a_{2j-1,2l}^{(4)} &= \frac{2}{\lambda_{2l-1}^2 - \lambda_{2j-1}^2}, & a_{2j,2l-1}^{(4)} &= \frac{\lambda_{2l-1}^2 + \lambda_{2j-1}^2}{\lambda_{2l-1}^2 - \lambda_{2j-1}^2}, \\ a_{2j-1,2l-1}^{(4)}(z) &= a_{2j,2l}^{(4)}(z) = \tilde{\kappa}_{2j-1}(z), \end{aligned}$$

все остальные элементы $A^{(4)}$ равны 0, $A^{(5)}$ кососимметрична.

Выписанные преобразования сохраняют определитель A :

$$\det A^{(5)}(z) = \det A^{(4)}(z) = \dots = \det A(z).$$

Все соотношения в этой цепочке очевидны, кроме одного: $\det A^{(1)}(z) = \det A(z)$. Докажем его.

Согласно лемме 5.3

$$(120) \quad \sum_{j=1}^{2N} \frac{\chi_j^{(-1)}(z)}{2\lambda_j} \equiv 0,$$

где $\chi_j^{(-1)}(z)$ – решения системы уравнений

$$\sum_{l=1}^{2N} a_{jl}(z) \chi_l^{(-1)}(z) = 1, \quad j = 1, \dots, 2N.$$

Из (120) следует, что

$$\sum_{l=1}^{2N} a_{jl}^{(1)}(z) \chi_l^{(-1)}(z) = 1, \quad j = 1, \dots, 2N.$$

Повторяя рассуждения теоремы 5.1, получаем, что

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \ln \det A^{(1)}(z) = -\frac{ik}{2} \sum_{j=1}^N \chi_j^{(-1)}(z).$$

Сопоставляя с (116), видим, что $A^{(1)}(z) = \varphi_1(z)A(z)$, где $\varphi_1(z)$ – мероморфная функция z , т.е. $\partial_{\bar{z}}\varphi_1(z) \equiv 0$. При этом $\varphi_1(z) \rightarrow 1$ при $z \rightarrow 1$ и $\varphi_1(z)$ – рациональная функция z .

С другой стороны, несложно проверяется, что

$$-\frac{ik}{2} \sum_{j=1}^N \frac{\chi_j^{(-1)}(z)}{\lambda_j^2} = \partial_z \ln \det A(z) = \partial_z \ln \det A^{(1)}(z),$$

т.е.

$$\partial_z \varphi_1(z) \equiv 0, \quad \varphi_1(z) \equiv 1,$$

что и завершает доказательство.

Обсудим теперь спектральные свойства построенных операторов. Вообще говоря, скорость убывания построенных потенциалов есть $1/r^2$, поэтому при определении прямого преобразования могут возникать некоторые сложности. Однако, к счастью, физические решения уравнения

$$L\Psi(\vec{k}, \vec{x}) = \epsilon \Psi(\vec{k}, \vec{x})$$

явно известны при $\epsilon = \epsilon_0$ (они совпадают с $\Psi(\lambda, z)$ при $|\lambda| = 1$) и убывают при $|z| \rightarrow \infty$ как $1/|z|$. Поскольку члены, отвечающие рассеянной волне, убывают как $1/\sqrt{z}$, то мы получаем следующий результат.

ЛЕММА 5.8. Пусть “спектральные данные” $\lambda_1, \dots, \lambda_{4N}$, $\gamma_1, \dots, \gamma_{4N}$ удовлетворяют условиям вещественности и потенциальности леммы 5.5. Тогда при $\epsilon = \epsilon_0$ потенциал $u(z)$ прозрачен (т.е. амплитуда рассеяния тождественно равна 0).

Суммируя полученные в данном разделе результаты, получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5.2. 1) Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ – набор попарно различных точек на λ -плоскости таких, что $\lambda_j \neq 0, \infty$, $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ – набор комплексных констант, отвечающих точкам λ_j .

Тогда существуют единственная функция $\Psi(\lambda, z)$ такая, что:

$$\text{а) } \Psi(\lambda, z) = e^{\frac{ik}{2}(\lambda \bar{z} + \frac{z}{\lambda})} \left[1 + \sum_{j=1}^N \frac{\chi_j^{(-1)}(z)}{\lambda - \lambda_j} \right];$$

b) в каждой из точек λ_j выполнено соотношение

$$\Psi_j^{(0)}(z) = \gamma_j \Psi_j^{(-1)}(z),$$

где $\Psi_j^{(k)}(z)$ – коэффициенты ряда Лорана в окрестности точки λ_j :

$$\Psi(\lambda, z) = \frac{\Psi_j^{(-1)}(z)}{\lambda - \lambda_j} + \Psi_j^{(0)}(z) + \Psi_j^{(1)}(z)(\lambda - \lambda_j) + \dots,$$

и единственный оператор

$$L = -4\partial_z \partial_{\bar{z}} + V(z)\partial_z + u(z)$$

такой, что

$$L\Psi(\lambda, z) = k^2\Psi(\lambda, z)$$

при всех λ . Коэффициенты $V(z)$, $u(z)$ – рациональные функции z , $\bar{z}$, определяемые формулами (109) и (110).

2) Пусть $|\lambda_j| \neq 1$ при всех j . Тогда функции $V(z)$, $u(z)$ не имеют полюсов при достаточно большом $|z|$ и убывают как $O(1/|z|^2)$ при $|z| \rightarrow \infty$.

3) Пусть $|\lambda_j| \neq 1$ при всех j . При этом предположении оператор L потенциален ($V(z) \equiv 0$) тогда и только тогда, когда расположение точек λ_j инвариантно относительно поворота $z \rightarrow -z$ (в этом случае мы всегда будем предполагать, что нумерация λ_j выбрана так, что $\lambda_{2j} = -\lambda_{2j-1}$) и, кроме того, константы γ_j связаны соотношениями $\gamma_{2j-1} = \gamma_{2j} = 1/\lambda_{2j-1}$.

4) Пусть выполнены условия п. 3). При этом предположении потенциал $u(z)$ вещественен при всех z тогда и только тогда, когда расположение полюсов инвариантно относительно отражения $\lambda \rightarrow 1/\bar{\lambda}$ (в этом случае мы считаем, что нумерация λ_j выбрана так, что $\lambda_{4j} = 1/\lambda_{4j-3}$) и, кроме того, $\gamma_{4j-1} = \bar{\lambda}_{4j-3}^2 \gamma_{4j-3}$.

5) Пусть выполнены условия п.п. 3), 4). Тогда потенциал $u(z)$ является неособым при всех z и прозрачным при энергии $\epsilon_0 = k^2$, т.е. оператор рассеяния при $\epsilon = k^2$ единичный.

6) Пусть функции $\varkappa_j(z)$ зависят от дополнительной переменной t :

$$\varkappa_j(z) = -\frac{ik}{2}(\bar{z} - z/\lambda_j^2) + 3ik^3(\lambda_j^2 - 1/\lambda_j^4)t.$$

Тогда функции

$$\begin{aligned} v(z, t) &= -k^2 - 4\partial_z \partial_{\bar{z}} \ln \det A, \\ w(z, t) &= 12\partial_{\bar{z}}^2 \ln \det A, \end{aligned}$$

где $A = (a_{ij})$ – матрица (111), задают многосолитонные рациональные решения уравнений Весаева–Новикова (137).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО п. 6 теоремы 5.2 достаточно стандартно.

В качестве иллюстрации вычислим явно потенциал $u(z)$ в простейших случаях, когда число полюсов $\chi(\lambda, z)$ равно 4 и 8 соответственно.

Для односолитонного решения $\lambda_2 = -\lambda_1$, $\lambda_3 = 1/\bar{\lambda}_1$, $\lambda_4 = -1/\bar{\lambda}_1$, $\tilde{\lambda}_2 = \tilde{\lambda}_1$, $\tilde{\lambda}_3 = \bar{\lambda}_1^2 \tilde{\lambda}_1$, $\tilde{\lambda}_4 = \tilde{\lambda}_3$ имеем

$$\det A = \bar{\mu}_1^2 \det H,$$

где

$$\mu_1 = \lambda_1^2, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{\mu_1 \bar{\mu}_1 - 1} & \tilde{\lambda}_1 & 0 \\ -\frac{2}{\mu_1 \bar{\mu}_1 - 1} & 0 & 0 & \tilde{\lambda}_1 \\ -\tilde{\lambda}_1 & 0 & 0 & -\frac{\mu_1 \bar{\mu}_1 + 1}{\mu_1 \bar{\mu}_1 - 1} \\ 0 & -\tilde{\lambda}_1 & \frac{\mu_1 \bar{\mu}_1 + 1}{\mu_1 \bar{\mu}_1 - 1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Поскольку H – кососимметрическая матрица, то $\det H = (\text{pf } H)^2$, где pf означает пфаффиан H . В случае матрицы H размера 4×4 $\text{pf } H = H_{12}H_{34} - H_{13}H_{24} + H_{14}H_{23}$. Тем самым, $\det H = p_4^2(\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda})$,

$$p_4(\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda}) = \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_1 + 2 \frac{\lambda_1^2 \bar{\lambda}_1^2 + 1}{(\lambda_1^2 \bar{\lambda}_1^2 - 1)^2},$$

$$\tilde{\lambda}_1 = -\frac{ik}{2}(\bar{z} - z/\lambda_1^2 + \gamma_1),$$

$$u(z) = -8\partial_z \partial_{\bar{z}} \ln p_4.$$

Пусть $k = 2$, $\lambda = \sqrt{3}$, $\gamma_1 = 0$, $t = 0$. Тогда

$$p_4(x, y) = \frac{4}{9}x^2 + \frac{16}{9}y^2 + \frac{5}{16},$$

$$u := 768 \frac{-64x^2 + 256y^2 - 75}{(64x^2 + 256y^2 + 45)^2},$$

и график потенциала имеет вид, как на рис. 5.1.

Двухсолитонные потенциалы отвечают следующей конфигурации полюсов: $\lambda_2 = -\lambda_1$, $\lambda_3 = 1/\bar{\lambda}_1$, $\lambda_4 = -1/\bar{\lambda}_1$, $\lambda_6 = -\lambda_5$, $\lambda_7 = 1/\bar{\lambda}_5$, $\lambda_8 = -1/\bar{\lambda}_5$, функции $\tilde{\lambda}_j$ связаны соотношениями $\tilde{\lambda}_2 = \tilde{\lambda}_1$, $\tilde{\lambda}_3 = \bar{\lambda}_1^2 \tilde{\lambda}_1$, $\tilde{\lambda}_4 = \bar{\lambda}_1^2 \tilde{\lambda}_3$, $\tilde{\lambda}_6 = \tilde{\lambda}_5$, $\tilde{\lambda}_7 = \bar{\lambda}_5^2 \tilde{\lambda}_5$, $\tilde{\lambda}_8 = \bar{\lambda}_5^2 \tilde{\lambda}_7$. Пусть $\mu_1 = \lambda_1^2$, $\mu_5 = \lambda_5^2$.

Мы имеем:

$$\det A = \bar{\mu}_1^2 \bar{\mu}_5^2 p_8(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_5, \tilde{\lambda}_5),$$

где

$$\begin{aligned} p_8 = & \left[2 \frac{\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_1}{\text{pf}_1(\mu_5 \bar{\mu}_5 - 1)} + \frac{\mu_1 \bar{\mu}_1 + 1}{\mu_1 \bar{\mu}_1 - 1} \right] \left[2 \frac{\tilde{\lambda}_5 \tilde{\lambda}_5}{\text{pf}_1(\mu_1 \bar{\mu}_1 - 1)} + \frac{\mu_5 \bar{\mu}_5 + 1}{\mu_5 \bar{\mu}_5 - 1} \right] \\ & + \left[2 \frac{\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_5}{\text{pf}_1(\bar{\mu}_5 - \bar{\mu}_1)} + \frac{\mu_5 + \mu_1}{\mu_5 - \mu_1} \right] \left[2 \frac{\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_5}{\text{pf}_1(\mu_5 - \mu_1)} + \frac{\bar{\mu}_5 + \bar{\mu}_1}{\bar{\mu}_5 - \bar{\mu}_1} \right] \\ & - \left[2 \frac{\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_5}{\text{pf}_1(\bar{\mu}_1 \mu_5 - 1)} - \frac{\mu_1 \bar{\mu}_5 + 1}{\mu_1 \bar{\mu}_5 - 1} \right] \left[2 \frac{\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_5}{\text{pf}_1(\mu_1 \bar{\mu}_5 - 1)} - \frac{\bar{\mu}_1 \mu_5 + 1}{\bar{\mu}_1 \mu_5 - 1} \right], \end{aligned}$$

Рис. 5.1

Рис. 5.2

$$\begin{aligned} \text{pf}_1 &= 4 \left[\frac{1}{(\mu_1 \bar{\mu}_1 - 1)(\mu_5 \bar{\mu}_5 - 1)} + \frac{1}{(\mu_5 - \mu_1)(\bar{\mu}_5 - \bar{\mu}_1)} - \frac{1}{(\mu_1 \bar{\mu}_5 - 1)(\bar{\mu}_1 \mu_5 - 1)} \right], \\ \tilde{\kappa}_1 &= -\frac{ik}{2}(\bar{z} - z/\mu_1 + \gamma_1), \quad \tilde{\kappa}_5 = -\frac{ik}{2}(\bar{z} - z/\mu_5 + \gamma_5), \\ u(z) &= -8\partial_z \partial_{\bar{z}} \ln p_8. \end{aligned}$$

Пусть $k = 2$, $\lambda_1^2 = 3$, $\lambda_5^2 = 1 - 2i$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_5 = 0$, $t = 0$. Тогда потенциал имеет вид, как на рис. 5.2.

6. Задача рассеяния при фиксированной отрицательной энергии

В данном разделе мы излагаем результаты работы [42].

Мы будем работать при фиксированной энергии $\epsilon_0 = -1$. Построение прямого преобразования рассеяния в этом случае принципиально ничем не отличается от случая положительной энергии, поэтому мы приведем получающийся ответ без вывода.

ТЕОРЕМА 6.1. 1. Пусть $u(z)$ — гладкая функция, удовлетворяющая условиям (8) и условию малости нормы (9). Тогда при всех $\lambda \in \mathbb{C}$ существует единственное решение уравнения Шрёдингера

$$L\Psi(\lambda, z) = \epsilon_0 \Psi(\lambda, z), \quad \epsilon_0 = -1,$$

где

$$L = -4\partial_z\partial_{\bar{z}} + u(z),$$

с асимптотикой

$$\Psi(\lambda, z) = e^{\frac{1}{2}(\lambda\bar{z} + z/\lambda)} \chi(\lambda, z), \quad \chi(\lambda, z) = 1 + o(1) \quad \text{при } |z| \rightarrow \infty.$$

(В отличие от задачи при положительной энергии, случай $|\lambda| = 1$ не требует наложения дополнительных условий типа условия излучения.) Это решение обладает следующими аналитическими свойствами:

- а) $\Psi(\lambda, z)$ – непрерывная функция переменной λ на всей λ -плоскости кроме точки 0;
- б) при $|\lambda| \neq 1$ имеет место уравнение

$$(121) \quad \frac{\partial \Psi(\lambda, z)}{\partial \bar{\lambda}} = T(\lambda) \Psi\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}, z\right),$$

где

$$T(\lambda) = \frac{\pi \operatorname{sgn}(\lambda\bar{\lambda} - 1)}{\bar{\lambda}} b(\lambda),$$

$$b(\lambda) = \frac{1}{4\pi^2} \iint e^{\frac{1}{2}((\lambda-1/\bar{\lambda})\bar{z} - (\bar{\lambda}-1/\lambda)z)} u(z) \chi(\lambda, z) dz_R dz_I.$$

2. Данные рассеяния $b(\lambda)$ обладают следующей симметрией:

$$(122) \quad b\left(-\frac{1}{\bar{\lambda}}\right) = b(\lambda)$$

(условие потенциальности).

3. Функция $b(\lambda)$ убывает при $\lambda \rightarrow 0$ и при $\lambda \rightarrow \infty$ быстрее любой степени λ .

4. Пусть потенциал $u(z)$ вещественен. Тогда задача обладает дополнительной симметрией

$$(123) \quad \Psi\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}, z\right) = \bar{\Psi}(\lambda, z),$$

$$(124) \quad b\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}\right) = \bar{b}(\lambda),$$

и в этом случае уравнение (121) влечет

$$(125) \quad \frac{\partial \Psi(\lambda, z)}{\partial \bar{\lambda}} = T(\lambda) \bar{\Psi}(\lambda, z),$$

$$(126) \quad \frac{\partial \chi(\lambda, z)}{\partial \bar{\lambda}} = T(\lambda, z) \bar{\chi}(\lambda, z),$$

$$T(\lambda, z) = T(\lambda) e^{-\frac{1}{2}((\lambda-1/\bar{\lambda})\bar{z} - (\bar{\lambda}-1/\lambda)z)},$$

т.е. $\chi(\lambda, z)$ – обобщенно аналитическая функция в смысле книги И. Н. Векуа [84].

В отличие от задачи при положительной энергии, мы имеем только один тип “данных рассеяния”, что достаточно естественно, поскольку при отрицательных энергиях нет аналога матрицы рассеяния.

Уравнения обратной задачи имеют вид:

$$(127) \quad \chi(\lambda, z) = 1 - \frac{1}{\pi} \iint \frac{T(\lambda', z)}{\lambda' - \lambda} \chi\left(\frac{1}{\lambda'}, z\right) d\lambda'_R d\lambda'_I.$$

Для случая данных $T(\lambda)$ общего вида с достаточно малой нормой уравнение (127) однозначно разрешимо и дает нам комплексный оператор Шрёдингера с магнитным полем. Оказывается, что если выполнены редукции потенциальности и вещественности, то условие малости нормы в обратной задаче можно отбросить и она все равно остается однозначно разрешимой, однако при этом мы получаем лишь часть пространства потенциалов. Более точно, справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 6.2. 1) Пусть $b(\lambda)$ – некоторая кусочно-непрерывная функция на $\mathbb{CP}^1$ такая, что

$$\frac{1}{\lambda^3} b(\lambda) \in L^p(D), \quad p > 2,$$

где D – единичный диск и выполнены редукции потенциальности и вещественности (122), (124). Тогда уравнения обратной задачи (127) однозначно разрешимы при всех z , соответствующий оператор Шрёдингера потенциален и вещественен, потенциал $u(z)$ – непрерывная функция, убывающая при $z \rightarrow \infty$.

2) Спектр оператора L лежит строго выше точки $\epsilon_0 = -1$.

3) Если $b(\lambda)$ убывает при $\lambda \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow \infty$ быстрее любой степени λ , то потенциал $u(z)$ – гладкий.

4) Если потенциал $u(z)$, построенный выше, убывает быстрее, чем $|z|^{-2-\delta}$, где δ – некоторое положительное число, то выполнено следующее нелокальное соотношение на единичной окружности:

$$b(\lambda) - h_1(\lambda) = C = \text{const},$$

где $|\lambda| = 1$,

$$h_1(\lambda) = -\frac{1}{\pi} \iint \frac{b(\mu)T(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu_R d\mu_I.$$

Отметим, что более быстрое убывание потенциала на бесконечности влечет за собой появление дополнительных соотношений на данные рассеяния. В частности, если потенциал $u(z)$ убывает быстрее, чем $|z|^{-3-\delta}$, то имеет место соотношение

$$(128) \quad \lambda^2 \frac{\partial}{\partial \lambda} b(\lambda) - h_2(\lambda) = A + B\lambda^2, \quad |\lambda| = 1,$$

где A, B – некоторые константы, левая часть (128) непрерывна при $|\lambda| = 1$, функция $h_2(\lambda)$ задается формулой

$$h_2(\lambda) = -\frac{1}{\pi} \iint \frac{[-\mu^2 \partial_\mu T(\mu)]b(\mu) + T(\mu)T(1/\mu)(h_1(\mu) + C)}{\mu - \lambda} d\mu_R d\mu_I.$$

Докажем п. 1). Убедимся, что уравнение обратной задачи (127) однозначно разрешимо. Поскольку оператор в уравнении (127) компактен, то достаточно проверить, что оно не имеет однородных решений. Предположим противное. Пусть $\chi_0(\lambda, z_0)$ – однородное решение при некотором z_0 . Из редукции потенциальности (122) следует,

что $(\chi_0(0, z_0))^2 = (\chi_0(\infty, z_0))^2 = 0$. Пусть $\chi_1(\lambda, z_0) = \chi_0(\lambda, z_0) \pm \bar{\chi}_0(1/\bar{\lambda}, z_0)$ (знак $+$ или $-$ выбираем так, чтобы $\chi_1(\lambda, z_0)$ не оказалась тождественным нулем). Тогда из редукции вещественности (124) следует, что

$$\frac{\partial \chi_1(\lambda, z_0)}{\partial \bar{\lambda}} = \pm T(\lambda, z) \bar{\chi}_1(\lambda, z_0),$$

т.е. $\chi_1(\lambda, z_0)$ — обобщенно аналитическая функция на $\mathbb{CP}^1$ без особенностей и с нулями в точках 0 и ∞ . Однако в силу принципа аргумента для числа нулей обобщенно аналитических функций без особенностей [84] это невозможно, и мы пришли к противоречию. Заметим, что попутно мы доказали, что при $|\lambda| = 1$ волновая функция $\Psi(\lambda, z)$ вещественна и никогда не обращается в 0 .

Докажем теперь, что спектр L лежит выше точки $\epsilon_0 = -1$. Это будет следовать из существования строго положительных нигде не обращающихся в 0 и растущих при $z \rightarrow \infty$ решений уравнения $L\Psi(z) = \epsilon_0 \Psi(z)$. В качестве $\Psi(z)$ мы возьмем

$$\Psi(z) = \oint_{|\lambda|=1} \Psi(\lambda, z) |d\lambda|.$$

Из (123) и отсутствия нулей у $\Psi(\lambda, z)$ следует, что

$$(129) \quad \Psi(z) \in \mathbb{R}, \quad \Psi(z) > 0 \quad \text{при всех } z \in \mathbb{C}.$$

Используя (129), оценку на положение спектра можно извлечь из следующих лемм, воспроизводящих некоторые элементарные рассуждения из известной книги Р. Куранта и Д. Гильберта [14], хотя в таком виде леммы в [14] не сформулированы.

ЛЕММА 6.1. Пусть $u(x_1, \dots, x_n)$ — гладкий вещественный потенциал в $\mathbb{R}^n$ такой, что $u > \text{const}$ при $|x|^2 > r_0$ и найдется гладкое вещественное положительное решение Ψ уравнения

$$L\Psi = -\Delta\Psi + u\Psi = \epsilon_0, \quad \Psi > 0.$$

Тогда для $\epsilon_{\min}$ имеет место равенство (131) (см. ниже) и всегда $\epsilon_0 \leq \epsilon_{\min}$, где $\epsilon_{\min}$ — уровень основного состояния оператора L в $L_2(\mathbb{R}^n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S — область в $\mathbb{R}^n$, содержащая шар большого радиуса $r \rightarrow \infty$. Энергия $\epsilon_{\min}$ определяется как предел минимумов функционалов при $r \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \min_{S, \varphi} \int \cdots \int_S (|\nabla \varphi|^2 + u\varphi^2) d^n x &= \min_S \epsilon_{\min}(S), \\ \int \cdots \int_S \varphi^2 d^n x &= 1, \quad \varphi|_{\partial S} = 0, \quad \varphi \geq 0. \end{aligned}$$

Пусть $\varphi = \eta\Psi$, где $\eta = 0$ на границе ∂S , $\eta \geq 0$. Мы имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned}
 (130) \quad & \int \cdots \int_S (|\nabla \varphi|^2 + u\varphi^2) d^n x \\
 &= \int \cdots \int_S (-\varphi \Delta \varphi + u\varphi^2) d^n x \\
 &= \int \cdots \int_S [-\eta \Psi \Delta (\eta \Psi) + \eta^2 \Psi^2 u] d^n x \\
 &= \int \cdots \int_S [\eta \Delta \eta \Psi^2 - 2(\eta \nabla \eta \Psi \nabla \Psi) - \eta^2 \Psi \Delta \Psi + u\eta^2 \Psi^2] d^n x \\
 &= \int \cdots \int_S [-\eta \nabla (\nabla \eta \Psi^2) + \eta^2 \Psi (-\Delta \Psi + u\Psi)] d^n x \\
 &= \int \cdots \int_S |\nabla \eta|^2 \Psi^2 d^n x + \epsilon_0 \int \cdots \int_S \eta^2 \Psi^2 d^n x.
 \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$(131) \quad \epsilon_{\min}(S) = \int \cdots \int_S \left| \nabla \frac{\varphi}{\Psi} \right|^2 \Psi^2 d^n x + \epsilon_0,$$

где φ – собственная функция основного состояния области S . Лемма 6.1 доказана.

ЛЕММА 6.2. Пусть при условиях леммы 6.1 потенциал u – быстроубывающий в $\mathbb{R}^n$ и Ψ не совпадает с собственной функцией основного состояния в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\epsilon_0 < \epsilon_{\min}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При этих условиях можно взять $S = \mathbb{R}^n$; пусть φ – собственная функция основного состояния $L\varphi = \epsilon_{\min}$. Мы знаем, что $\varphi > 0$ и $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Из цепочки равенств (130) мы получим (131)

$$(L\varphi, \varphi) = \epsilon_{\min}(\varphi, \varphi) = \epsilon_{\min} = \epsilon_0 + \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \Psi^2 \nabla \left(\frac{\varphi}{\Psi} \right)^2 d^n x,$$

отсюда следует лемма 6.2.

Доказательство п. 3) ничем не отличается от доказательства аналогичного утверждения при положительной энергии.

Докажем п. 4) теоремы 6.2. Мы убедились, что $\chi(z, \lambda)$ ограничена на всем пространстве z, λ и при больших z равномерно по λ стремится к 1. Введем дополнительную функцию

$$h(l, \lambda) = \frac{1}{4\pi^2} \iint e^{\frac{1}{2}[l\bar{z} - \bar{l}z]} u(z) \chi(z, \lambda) dz_R dz_I.$$

Функция $h(l, \lambda)$ непрерывна, ограничена и даже липшицева по l, λ с показателями ϵ_1, ϵ_2 , где $\epsilon_1 < \epsilon, \epsilon_2 < 1$. При $l = \lambda - 1/\bar{\lambda}$ мы получаем функцию $b(\lambda)$:

$$b(\lambda) = h(\lambda - 1/\bar{\lambda}, \lambda).$$

Из (121) вытекает следующее уравнение для h :

$$(132) \quad \frac{\partial h(l, \lambda)}{\partial \bar{\lambda}} = T(\lambda) h(l + 1/\bar{\lambda} - \lambda, 1/\bar{\lambda})$$

(аналоги (132) для многомерного случая активно используются в [72], [61], [6]).

В частности, для функции $\tilde{h}(\lambda) = h(0, \lambda)$ получаем

$$\frac{\partial \tilde{h}(\lambda)}{\partial \bar{\lambda}} = T(\lambda) b(1/\bar{\lambda}).$$

С другой стороны, при $|\lambda| = 1$ $b(\lambda) = \tilde{h}(\lambda)$. Интегрируя (132), получаем:

$$b(\lambda) + \frac{1}{\pi} \iint \frac{T(\mu) b(1/\bar{\mu}) d\mu_R d\mu_I}{\mu - \lambda} = \text{const}, \quad |\lambda| = 1.$$

Доказательство теоремы 6.2 завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как было показано в работе [42], с минимальными изменениями приведенное выше рассуждение дает прямое доказательство теоремы о положительности конечнозонных при одной энергии двумерных операторов Шрёдингера, отвечающих M -кривым. Это утверждение было сформулировано в работе [85], однако оригинальное доказательство было неявным и основывалось на связности пространства таких потенциалов.

ДОПОЛНЕНИЕ. *Отрицательные энергии выше основного состояния.* Для энергий выше основного состояния ситуация сложнее и правильная постановка задачи рассеяния до сих пор не ясна. Тем не менее, изложим некоторые предварительные наблюдения.

Пусть энергия ϵ_0 не является уровнем дискретного спектра оператора $L = -\Delta + u$. Определенные выше собственные функции $\Psi(z, \lambda)$ семейства F при $\epsilon = \epsilon_0 < 0$ и “данные обратной задачи” $T(\lambda)$ вводятся по-прежнему и обладают группой редукций (122), (124), однако обе функции T и Ψ уже не являются гладкими во всей λ -плоскости. Как показывает сопоставление с [72], [73], эти функции в ситуации общего положения обладают набором полюсов вдоль кривых Γ_j :

$$(133) \quad f_j(\lambda) = 0, \quad T = T_{-1}/f(\lambda) + T_0, \quad f_j = \bar{f}_j, \quad \Psi = \Psi_{-1}/f_j(\lambda) + \Psi_0,$$

где $T_{-1}, T_0, \Psi_{-1}, \Psi_0$ — гладкие функции.

Функция Ψ всюду, где T гладко, по-прежнему удовлетворяет уравнению (125), т.е. обобщенно аналитична,

$$\partial \Psi / \partial \bar{\lambda} = T \bar{\Psi}.$$

Набор кривых Γ_j в λ -плоскости инвариантен относительно группы редукций $\lambda \rightarrow -\lambda, \lambda \rightarrow 1/\bar{\lambda}$.

В случае общего положения имеем

$$|\partial f_j / \partial \bar{\lambda}| \neq 0, \quad \text{если} \quad f_j = 0.$$

Для $\epsilon > \epsilon_{\min}$ в силу доказанного выше функция $\Psi(z, \lambda)$ обязана иметь нули при $|\lambda| = 1$ и некоторых значениях z . При всех z нули $\Psi(z, \lambda)$ лежат в компактной части λ -плоскости. Легко видеть, что многообразие полюсов $\Gamma = \cup \Gamma_j$ компактно и не зависит от z .

Из уравнения (125) следует, что все нули Ψ , расположенные вне многообразия полюсов Γ , имеют положительный индекс (т.е. приращение аргумента при обходе вокруг

них против часовой стрелки положительно). Действительно, в первом не исчезающем порядке нули обобщенно-аналитических функций имеют вид

$$\phi(\lambda) = c_n(\lambda - \lambda_0)^n + o((\lambda - \lambda_0)^n),$$

т.е. их индекс такой же, как и у нулей аналитических функций равной кратности. Поэтому при тех z , при которых Ψ имеет нули вне Γ , функция Ψ_{-1} обязана иметь нули на кривых Γ отрицательного индекса. При $z \rightarrow \infty$ нули Ψ с положительным индексом подходят к нулям Ψ_{-1} с отрицательным индексом. Обозначим нули через $\gamma_j^\pm(z)$:

$$\Psi_{-1} = 0 \quad \text{при} \quad \lambda = \gamma_j(z), \quad f_j = 0.$$

Из уравнения (125) и разложения (133) легко следует такое равенство для T_{-1} :

$$\frac{1}{T_{-1}} \frac{\partial f_j}{\partial \lambda} = -\frac{\overline{\Psi}_{-1}}{\Psi_{-1}} = -e^{-2ig(\lambda)}, \quad g(\lambda) \in \mathbb{R}.$$

Отсюда следует, в частности, ограничение

$$(134) \quad |T_{-1}| = \frac{\partial f_j}{\partial \lambda} \neq 0, \quad f_j = 0.$$

Наиболее естественным расположением является “гнездо”

$$[0 \subset \Gamma_{-N} \subset \Gamma_{-N+1} \subset \cdots \subset \Gamma_{-1} \subset S^1 \subset \Gamma_1 \subset \cdots \subset \Gamma_N],$$

где S^1 – это единичная окружность $|\lambda| = 1$, все Γ_j инвариантны относительно преобразования $\lambda \rightarrow -\lambda$, Γ_{-j} получается из Γ_j преобразованием $\lambda \rightarrow 1/\bar{\lambda}$. По-видимому, число вращений функции $T_{-1} \neq 0$ вдоль контура Γ_j равно 1.

Имеет место следующая

ЛЕММА 6.3. *Для того чтобы уравнение (125) в окрестности каждой точки контура Γ_j локально имело совокупность решений, зависящих от двух вещественнозначных функций одной переменной (точки контура), необходимо и достаточно, кроме условия (134), выполнение следующих соотношений (135).*

Пусть в окрестности кривой Γ_j задана полугеодезическая система координат α, β , причем α – расстояние до Γ_j , β – натуральный параметр на Γ_j , линии $\beta = \text{const}$ – отрезки прямых, перпендикулярных Γ_j . С учетом (133), (134) получаем

$$\begin{aligned} \Psi &= e^{ig(\beta)} [\varphi_{-1}(\beta)/\alpha + \varphi_0(\beta) + \varphi_1(\beta)\alpha + O(\alpha^2)], \\ T &= e^{i(2g(\beta)+h(\beta))} [-1/(2\alpha) + \tau_0(\beta) + \tau_1(\beta)\alpha + O(\alpha^2)], \\ d\lambda &= e^{ih(\beta)} (d\alpha + id\beta) \quad \text{при} \quad \alpha = 0, \end{aligned}$$

где $g(\beta)$, $h(\beta)$ и $\varphi_{-1}(\beta)$ – вещественные функции. Тогда для того чтобы произвольное решение уравнения (125) в окрестности каждой точки контура Γ_j зависело от двух

вещественных функций одной переменной, необходимо потребовать, чтобы выполнялось

$$(135) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re} \tau_0(\beta) &= K(\beta)/4, \quad K(\beta) = -(\partial e_\beta / \partial \beta, e_\alpha), \\ \operatorname{Im} \tau_1(\beta) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g(\beta)}{\partial \beta^2} + \frac{1}{4} \frac{\partial K(\beta)}{\partial \beta}, \end{aligned}$$

e_β — касательный вектор к Γ_j , e_α — нормальный, $e_\alpha \times e_\beta = 1$. Произвольными функциями, от которых зависит локальное решение, являются $\varphi_{-1}(\beta)$ и $\operatorname{Im} \varphi_1(\beta)$. Если условия (135) выполнены, то локальное решение (125) зависит лишь от одной вещественнозначной функции.

Для решения обратной задачи выполнение условия (135), по-видимому, необходимо. Если условие (135) не выполнено, то обратная задача, вообще говоря, не будет разрешима для уровней энергии вне дискретного спектра.

7. Заключительные замечания

7.1. Задача Коши для уравнения Веселова–Новикова в классе потенциалов, выходящих на бесконечности на ненулевую константу. Как мы уже отмечали, в работе [85] была построена бесконечная иерархия интегрируемых уравнений (уравнений Веселова–Новикова), связанная с задачей рассеяния для двумерного оператора Шрёдингера при фиксированной (в нашем случае нулевой) энергии, а также выписаны ее конечнозонные решения (выражающиеся через θ -функции Прима). Эти уравнения естественно записываются в терминах $L - A - B$ троек Манакова [55]:

$$(136) \quad \frac{\partial L}{\partial t_n} = [A_n, L] + B_n L,$$

где

$$\begin{aligned} L &= -4\partial_z \partial_{\bar{z}} + u(z, \vec{t}), \\ A_n &= 2^{2n+1}(\partial_z^{2n+1} + \partial_{\bar{z}}^{2n+1}) + \dots, \end{aligned}$$

порядок B_n меньше $2n + 1$.

В частности, при $n = 1$

$$\begin{aligned} A_1 &= 8\partial_z^3 + 8\partial_{\bar{z}}^3 + 2w(z, \vec{t})\partial_z + 2\bar{w}(z, \vec{t})\partial_{\bar{z}}, \\ B_1 &= 2w_z(z, \vec{t}) + 2\bar{w}_{\bar{z}}(z, \vec{t}), \end{aligned}$$

и уравнения имеют вид:

$$(137) \quad u_t = 8\partial_z^3 u + 8\partial_{\bar{z}}^3 u + 2\partial_z(uw) + 2\partial_{\bar{z}}(u\bar{w}),$$

где

$$u(z, \vec{t}) = \bar{u}(z, \vec{t}), \quad \partial_{\bar{z}} w(z, \vec{t}) = -3\partial_z u(z, \vec{t})$$

(как и везде в этой работе, мы опускаем в формулах зависимость от $\bar{z}$, не предполагая при этом голоморфности).

Наличие члена с B_n в (136) связано с тем, что операторы $\partial_t - A_n$ и L коммутируют лишь на нулевых собственных функциях L , поэтому их коммутатор уже не нуль, а лишь элемент идеала, порожденного L .

Построенное выше преобразование рассеяния при фиксированной ненулевой энергии позволяет решить задачу Коши для иерархии Веселова–Новикова в классе потенциалов, выходящих на бесконечности на фиксированную ненулевую константу $-\epsilon_0$ в предположении, что в начальный момент функция $u(z) + \epsilon_0$ удовлетворяет условию малости нормы при $E = \epsilon_0$. Действительно, если $u(z) \rightarrow -\epsilon_0$ при $|z| \rightarrow \infty$, то задача рассеяния для оператора $L = -4\partial_z \partial_{\bar{z}} + u(z)$ при нулевой энергии – то же самое, что задача рассеяния при энергии ϵ_0 для убывающего на бесконечности потенциала $u(z) + \epsilon_0$.

Легко проверяется, что иерархия Веселова–Новикова порождает следующую динамику данных рассеяния.

Если $\epsilon_0 = \varkappa^2 > 0$, то

$$(138) \quad \begin{aligned} R(\lambda, \lambda', \vec{t}) &= e^{-\sum_{j=1}^{\infty} (i\varkappa)^{2j+1} (\lambda^{2j+1} + \bar{\lambda}^{2j+1} - (\lambda')^{2j+1} - (\bar{\lambda}')^{2j+1}) t_j} R(\lambda, \lambda', \vec{0}), \\ T(\lambda, \vec{t}) &= e^{-\sum_{j=1}^{\infty} (i\varkappa)^{2j+1} (\lambda^{2j+1} + \frac{1}{\lambda^{2j+1}} + \bar{\lambda}^{2j+1} + \frac{1}{\bar{\lambda}^{2j+1}}) t_j} T(\lambda, \vec{0}). \end{aligned}$$

Если же $\epsilon_0 = -\varkappa^2 < 0$, то

$$T(\lambda, \vec{t}) = e^{-\sum_{j=1}^{\infty} \varkappa^{2j+1} (\lambda^{2j+1} + \frac{1}{\lambda^{2j+1}} - \bar{\lambda}^{2j+1} - \frac{1}{\bar{\lambda}^{2j+1}}) t_j} T(\lambda, \vec{0}).$$

7.2. Убывающие потенциалы на конечнозонном фоне и $\bar{\partial}$ -проблема на римановых поверхностях. В нашей работе мы обсуждали теорию рассеяния для убывающих на бесконечности потенциалов. Оказывается, что построенная выше теория допускает естественное обобщение для случая быстроубывающих потенциалов на конечнозонном фоне, т.е. для

$$(139) \quad u(x, y) = u_0(x, y) + u_1(x, y),$$

где $u_0(x, y)$ – неособый потенциал, построенный по алгебраической кривой Γ и дивизору на ней, которые считаются известными, $u_1(x, y)$ достаточно быстро убывает при $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$.

Для уравнений с одной пространственной переменной задачи такого типа рассматривались рядом авторов, в частности, Е. А. Кузнецовым и А. В. Михайловым [47], И. М. Кричевером [46], Н. Е. Фирсовой [28], Р. Ф. Бикбаевым и Р. А. Шариповым [8].

Двумерное преобразование рассеяния при нулевой энергии в предположении, что Γ – M -кривая, потенциал $u_0(x, y)$ вещественен (именно такая ситуация обсуждалась в [86], [85]), а функция $u_1(x, y)$ вещественна и удовлетворяет некоторому условию “малости нормы”, построено автором в работах [35], [36]. Оказывается, что при этом волновая функция определена не на сфере Римана, а на кривой Γ , где и удовлетворяет $\bar{\partial}$ -уравнению

$$(140) \quad \bar{\partial}\Psi(\lambda, x, y) = T(\lambda)\Psi(\tau(\lambda), x, y),$$

обобщающему (121). Здесь τ – антиголоморфная инволюция Γ из работ [86], [85], $T(\lambda)$ – некоторая $(0, 1)$ -форма, удовлетворяющая аналогам соотношений (122), (124), оператор $\bar{\partial}$ в локальной координате k имеет вид

$$\bar{\partial} = d\bar{k} \frac{\partial}{\partial \bar{k}}.$$

Как и в задаче при фиксированной отрицательной энергии, уравнение (140) оказывается однозначно разрешимым в соответствующем пространстве функций даже без предположения о малости нормы $T(\lambda)$.

По-видимому, если рассматривать потенциалы $u_0(x, y)$ общего вида (их теория была развита в работах С. М. Натансона [62]–[64] и И. А. Тайманова [80], [81]), то мы одновременно получим нелокальную задачу Римана и $\bar{\partial}$ -проблему на алгебраической поверхности, однако строгое доказательство этого факта пока отсутствует.

7.3. Обратная задача при $\epsilon_0 = 0$ –. Как мы уже отмечали, построение прямого преобразования рассеяния в классе убывающих на бесконечности потенциалов при нулевой энергии сталкивается с дополнительными трудностями, и мы не будем обсуждать его здесь. Однако, как отмечалось в [42], предел обратного преобразования рассеяния при $\epsilon_0 \rightarrow 0$ – в предположении несингулярности “данных рассеяния” оказывается хорошо определенным, хотя и дает лишь часть потенциалов.

Пусть $\mu_+ = \varkappa\lambda/2$, $\mu_- = 1/(2\varkappa\lambda)$, $\epsilon_0 = -\varkappa^2$. В описываемом пределе контур $|\lambda| = 1$ стягивается в точку, которую мы обозначим B_0 , а сфера Римана спектрального параметра распадается на две S_+ и S_- с координатами μ_+ и μ_- соответственно, пересекающиеся по точке B_0 , $\mu_+ = \mu_- = 0$. Редукции (122), (124) переходят в соотношения

$$(141) \quad \begin{aligned} b(\mu_{\pm}) &= b(-\bar{\mu}_{\mp}), \\ b(\mu_{\pm}) &= \overline{b(\bar{\mu}_{\mp})}. \end{aligned}$$

Уравнения обратной задачи приобретают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(z, \mu_{\pm})}{\partial \bar{\mu}_{\pm}} &= T(\mu_{\pm}) \Psi(z, \bar{\mu}_{\mp}), \\ \Psi(z, \mu_+) \big|_{\mu_+=0} &= \Psi(z, \mu_-) \big|_{\mu_-=0}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} T(\mu_{\pm}) &= \pi b(\mu_{\pm}) / \bar{\mu}_{\pm}, \\ \Psi(z, \mu_+) &= e^{\mu_+ z} (1 + o(1)) \quad \text{при } \mu_+ \rightarrow \infty, \\ \Psi(z, \mu_-) &= e^{\mu_- \bar{z}} (c(z) + o(1)) \quad \text{при } \mu_- \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

$c(z)$ – некоторая заранее не фиксированная функция (из редукции потенциальности (141) следует, что в действительности $c(z) \equiv 1$).

Если потребовать L_p -интегрируемость функции $T(\mu)$ с $p > 2$ в окрестности 0 вместе с достаточно быстрым убыванием на бесконечности, то доказательства несингулярности потенциала (без предположения о малости нормы $T(\mu)$) и отсутствия дискретного спектра в точности воспроизводят соответствующие рассуждения теоремы 6.2. Однако в размерности 2 сколь угодно мелкая потенциальная яма имеет хотя бы одно связанное состояние и, тем самым, не может быть получена в рамках описанной процедуры.

7.4. Предельный переход к нестационарному одномерному оператору Шрёдингера и параболическому оператору. Другой интересный предельный случай – когда фиксированная энергия ϵ_0 стремится к $\pm\infty$, а потенциал медленно зависит от переменной y . Тогда в зависимости от знака энергии оператор Шрёдингера переходит либо в нестационарный одномерный оператор Шрёдингера ($\epsilon_0 \rightarrow +\infty$), либо в оператор теплопроводности ($\epsilon_0 \rightarrow -\infty$). При этом уравнения Веселова–Новикова переходят в уравнения Кадомцева–Петвиашвили I и Кадомцева–Петвиашвили II соответственно. Этот переход был исследован в работах В. Е. Захарова и Е. И. Шульмана [92], [93].

В терминах обратной задачи этот переход выглядит следующим образом. Пусть $\epsilon_0 = \varkappa^2 \rightarrow +\infty$, функция $R(\lambda, \lambda')$ локализована в окрестности точек $\lambda \sim \lambda' \sim \pm i$ в области, размер которой имеет порядок $1/\varkappa$. Поскольку в этом случае $\bar{\partial}$ -проблема связывает волновую функцию в точках λ и $-1/\bar{\lambda}$, то $T(\lambda)$ “отвечает” за быстроосциллирующие члены в потенциале и для получения разумного предела ее нужно положить везде равной 0. Введем новые переменные $X = x, Y = y/\varkappa, \mu = \varkappa(\lambda + i)$. Пусть $\Psi_1(X, Y, \mu) = e^{i\varkappa y} \Psi(x, y, \lambda)$. Мы видим, что окружность $|\lambda| = 1$, на которой волновая функция имеет разрыв, в терминах нового спектрального параметра μ записывается как $|\mu - i\varkappa| = \varkappa$, т.е. она проходит через точку $\mu = 0$ и вблизи нее мало отличается от прямой $\text{Im } \mu = 0$. Учитывая, что при $\mu \sim 0$

$$\Psi_1(X, Y, \mu) = e^{i\mu X + i\mu^2 Y/2} (1 + o(1)),$$

мы получаем в точности построенную в [56] нелокальную задачу Римана для нестационарного оператора Шрёдингера

$$L = 2i\partial_Y - \partial_X^2 + u(X, Y).$$

Если же $\epsilon_0 = -\varkappa^2 \rightarrow -\infty$, то функцию $T(\lambda)$ нужно считать сосредоточенной в окрестности точек $\lambda = \pm i$ размера порядка $1/\varkappa$ и, как и ранее, ввести переменные $X = x, Y = y/\varkappa, \mu = \varkappa(\lambda + i)$. Уравнение $\bar{\partial}$ -проблемы в пределе приобретает вид

$$\frac{\partial \Psi_1(X, Y, \mu)}{\partial \bar{\lambda}} = T_1(\mu) \Psi_1(X, Y, \bar{\mu}),$$

редукция (124) переходит в

$$(142) \quad T_1(\bar{\lambda}) = -\overline{T_1(\lambda)}.$$

Полагая $\Psi_1(X, Y, \mu) = e^{\varkappa y} \Psi(x, y, \lambda)$, мы получаем

$$\Psi_1(X, Y, \mu) = e^{\mu X + \mu^2 Y/2} (1 + o(1)),$$

т.е. мы приходим к построенной в [29] волновой функции параболического оператора

$$L = 2\partial_Y - \partial_X^2 + u(X, Y).$$

Как было отмечено в [42], использование теории обобщенно-аналитических функций позволяет доказать несингулярность потенциала $u(X, Y)$, входящего в параболический оператор, без предположений о малости нормы $T_1(\mu)$ точно так же, как в разделе 6 доказывалась неособость оператора Шрёдингера в задаче при отрицательной

энергии. Отметим, что локальная форма $\bar{d}$ -проблемы типа (126) для параболического оператора использовалась в работе В. Д. Липовского [54], однако однозначная разрешимость без предположения о малости нормы в работе [54] явно отмечена не была.

Сопоставляя это утверждение с результатом о неособости прямого преобразования рассеяния для параболического оператора с экспоненциально убывающим на бесконечности вещественным потенциалом (норма которого может быть сколь угодно большой), доказанным в [37], мы получаем теорему о гладкой разрешимости задачи Коши для уравнения Кадомцева–Петвиашвили II с хорошо локализованной начальной функцией. Аналогичная теорема для периодических начальных данных была доказана Бурженом в [10] без использования теории рассеяния с помощью аналитических оценок на поведение коэффициентов Фурье решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. S., Segur H. Method for solving the Sine-Gordon equation // *Phys. Rev. Lett.* 1973. V. 30. № 4. P. 1262–1264.
- [2] Ablowitz M. J., Bar Jaakov D., Fokas A. S. On the inverse scattering of the time-dependent Schrödinger equation and the associated Kadomtsev–Petviashvili equation // *Stud. Appl. Math.* 1983. V. 69. № 2. P. 135–143.
- [3] Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.
- [4] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.
- [5] Beals R., Coifman R. R. Scattering, transformations spectrales et équations d'évolution nonlinéaire I, II // *Séminaire Goulaouic–Meyer–Schwartz Equations Dériv. Partielles* (Ecole Polytechnique, Palaiseau), 1980–1981, exp. 22; 1981–1982, exp. 21.
- [6] Beals R., Coifman R. R. Multidimensional inverse scattering and nonlinear partial differential equations // *Proc. Sympos. Pure Math.* 1985. V. 43. P. 45–70.
- [7] Belokolos E. D., Bobenko A. I., Enol'skii V. Z., Its A. R., Matveev V. B. *Algebro-Geometric Approach to Nonlinear Integrable Equations*. Berlin: Springer-Verlag, 1994.
- [8] Бикбаев Р. Ф., Шарипов Р. А. Временная асимптотика при $t \rightarrow \infty$ задачи Коши для уравнения КдФ с конечнозонными граничными условиями // *ТМФ*. 1989. Т. 78. № 3. С. 244–252.
- [9] Boiti M., Leon J., Manna M., Pempinelli F. On a spectral transform of a KDV-like equation related to the Schrödinger operator in the plane // *Inverse Problems*. 1987. V. 3. P. 25–36.
- [10] Bourgain J. On the Cauchy problem for the Kadomtsev–Petviashvili equation // *Geom. Funct. Anal.* 1993. V. 3. № 4. P. 315–341.
- [11] Burov V. A., Morozov S. A., Rumiantseva O. D., Sukhov E. G., Vecherin S. N., Zhucovets A. Yu. *Exact Solutions of Two-Dimensional Monochromatic Inverse Scattering Problem and Secondary Sources Space Spectrum*. New York: Plenum Press, 1999. (Acoustical Imaging. V. 24.)
- [12] Калоджеро Ф., Дегасперис А. Спектральное преобразование и солитоны. М.: Мир, 1985.
- [13] Шадан К., Сабатье П. Обратные задачи в квантовой теории рассеяния. М.: Мир, 1980.
- [14] Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.: Гостехиздат, 1954.
- [15] Deift P., Trubowitz E. Inverse scattering on the line // *Comm. Pure Appl. Math.* 1979. V. 32. № 2. P. 121–251.
- [16] Дрюма В. С. Об аналитическом решении двумерного уравнения Кортевега–де Вриза (КДВ) // *Письма в ЖЭТФ*. 1974. Т. 19. № 12. С. 753–755.
- [17] Дубровин Б. А. Обратная задача теории рассеяния для периодических конечнозонных потенциалов // *Функц. анализ и его прил.* 1975. Т. 9. № 1. С. 65–66.

- [18] Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Новиков С. П. Уравнение Шрёдингера в периодическом поле и римановы поверхности // Докл. АН СССР. 1976. Т. 229. № 1. С. 15–18.
- [19] Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П. Нелинейные уравнения типа Кортевега–де Вриза, конечнозонные линейные операторы и Абелевы многообразия // УМН. 1976. Т. 31. № 1. С. 56–136.
- [20] Дубровин Б. А., Натанзон С. М. Вещественные тета-функциональные решения уравнения Кадомцева–Петвиашвили // УМН. 1988. Т. 55. № 2. С. 267–286.
- [21] Фаддеев Л. Д. Единственность решения обратной задачи рассеяния // Вестник ЛГУ. 1956. Т. 7. С. 126–130.
- [22] Фаддеев Л. Д. О связи S -матрицы и потенциала для одномерного оператора Шрёдингера // Докл. АН СССР. 1958. Т. 121. С. 63–66.
- [23] Фаддеев Л. Д. Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц // Труды МИАН. 1963. Т. 69.
- [24] Фаддеев Л. Д. Свойства S -матрицы одномерного оператора Шрёдингера // Труды МИАН. 1964. Т. 73. С. 314–336.
- [25] Фаддеев Л. Д. Растущие решения уравнения Шрёдингера // Докл. АН СССР. 1965. Т. 165. № 3. С. 514–517.
- [26] Фаддеев Л. Д. Факторизация S -матрицы для многомерного оператора Шрёдингера // Докл. АН СССР. 1966. Т. 167. № 1. С. 69–72.
- [27] Фаддеев Л. Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Т. 3. М.: ВИНТИ, 1974.
- [28] Фирсова Н. Е. О решении задачи Коши для уравнения КдВ с начальными данными, являющимися суммой периодической и быстроубывающей функций // Матем. сб. 1988. Т. 135 (137). № 2. С. 261–268.
- [29] Fokas A. S., Ablowitz M. J. On the inverse scattering transform for the Kadomtsev–Petviashvili equation // Stud. Appl. Math. 1983. V. 69. № 3. P. 211–228.
- [30] François J.-P., Novikov R. G. Solutions rationnelles des équations de type Korteweg–de Vries en dimension 2 + 1 et problèmes à m corps sur la droite // C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I. Math. 1992. V. 314. № 2. P. 109–113.
- [31] Gardner C. S., Green J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. A method for solving the Korteweg–de Vries equation // Phys. Rev. Lett. 1967. V. 19. P. 1095–1098.
- [32] Гельфанд И. М., Левитан Б. М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1951. Т. 15. № 2. С. 309–360.
- [33] Гельфанд И. М., Левитан Б. М. Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка // Докл. АН СССР. 1955. Т. 88. № 4. С. 593–596.
- [34] Гриневиц П. Г. Рациональные солитоны уравнений Веселова–Новикова – безотражательные при фиксированной энергии двумерные потенциалы // ТМФ. 1986. Т. 69. № 2. С. 307–310.
- [35] Гриневиц П. Г. Быстроубывающие потенциалы на фоне конечнозонных и $\bar{\partial}$ -проблема на римановых поверхностях // Функц. анализ и его прил. 1989. Т. 23. № 4. С. 79–80.
- [36] Grinevich P. G. Fast decaying potentials on the finite-gap background and the $\bar{\partial}$ -problem on the Riemann surfaces // ТМФ. 1994. Т. 99. № 2. С. 300–308.
- [37] Grinevich P. G. Nonsingularity of the direct scattering transform for the Kadomtsev–Petviashvili 2 equation with real exponentially decaying at infinity potential // Lett. Math. Phys. 1997. V. 40. P. 59–73.
- [38] Гриневиц П. Г., Манаков С. В. Обратная задача теории рассеяния для двумерного оператора Шрёдингера, $\bar{\partial}$ -метод и нелинейные уравнения // Функц. анализ и его прил. 1986. Т. 20. № 2. С. 14–24.
- [39] Гриневиц П. Г., Новиков Р. Г. Аналоги многосолитонных потенциалов для двумерного оператора Шрёдингера // Функц. анализ и его прил. 1985. Т. 19. № 4. С. 32–42.
- [40] Гриневиц П. Г., Новиков Р. Г. Аналоги многосолитонных потенциалов для двумерного оператора Шрёдингера и нелокальная задача Римана // Докл. АН СССР. 1986. Т. 286. № 1. С. 19–22.

- [41] Grinevich P. G., Novikov R. G. Transparent potentials at fixed energy in dimension two. Fixed-energy dispersion relations for the fast decaying potentials // *Comm. Math. Phys.* 1995. V. 174. P. 409–446.
- [42] Гриневич П. Г., Новиков С. П. Двумерная “обратная задача рассеяния” для отрицательных энергий и обобщенно-аналитические функции. 1. Энергии ниже основного состояния // *Функц. анализ и его прил.* 1988. Т. 22. №1. С. 23–33.
- [43] Henkin G. M., Novikov R. G. A multidimensional inverse problem in quantum and acoustic scattering // *Inverse Problems*. 1988. V. 4. P. 103–121.
- [44] Итс А. Р., Матвеев В. Б. Операторы Шрёдингера с конечным числом лагун и много-солитонные решения уравнения Кортевега–де Фриза // *ТМФ*. 1975. Т. 23. №1. С. 51–67.
- [45] Kato T. Growth properties of solutions of the reduced wave equation with a variable coefficient // *Comm. Pure Appl. Math.* 1959. V. 12. P. 403–425.
- [46] Кричевер И. М. Безотражательные потенциалы на фоне конечнозонных // *Функц. анализ и его прил.* 1975. Т. 9. №2. С. 161–163.
- [47] Кузнецов Е. А., Михайлов А. В. Устойчивость стационарных волн в нелинейных средах со слабой дисперсией // *ЖЭТФ*. 1974. Т. 40. №5. С. 855–859.
- [48] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. I: Механика. М.: Наука, 1973.
- [49] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. III: Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1974.
- [50] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. VI: Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
- [51] Lax P. D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves // *Comm. Pure Appl. Math.* 1968. V. 21. P. 467–490.
- [52] Lax P. D. Periodic solutions of the KdV equation // *Nonlinear Wave Motion – Proc. Summer Seminar (Potsdam, NY, 1972). Lectures in Appl. Math.* V. 15, 1974. P. 85–96.
- [53] Лакс П., Филлипс Р. Теория рассеяния. М.: Мир, 1971.
- [54] Липовский В. Д. Гамильтонова структура уравнения Кадомцева–Петвиашвили II в классе убывающих данных Коши // *Функц. анализ и его прил.* 1986. Т. 20. №4. С. 35–43.
- [55] Манаков С. В. Метод обратной задачи рассеяния и двумерные эволюционные уравнения // *УМН*. 1986. Т. 31. №5. С. 245–246.
- [56] Manakov S. V. The inverse scattering transform for the time-dependent Schrödinger equation and Kadomtsev–Petviashvili equation // *Phys. D*. 1981. V. 3. №1–2. P. 420–427.
- [57] Марченко В. А. Восстановление потенциальной энергии по фазам рассеянных волн // *Докл. АН СССР*. 1955. Т. 104. №5. С. 695–698.
- [58] Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977.
- [59] McKean H. P., Van Moerbeke P. The spectrum of Hill’s equation // *Invent. Math.* 1975. V. 30. P. 217–274.
- [60] Melin A. Operator methods for inverse scattering on the real line // *Comm. Partial Differential Equations*. 1985. V. 10. №7. P. 677–766.
- [61] Nachman A. J., Ablowitz M. J. A multidimensional inverse-scattering method // *Stud. Appl. Math.* 1984. V. 71. №3. P. 243–250.
- [62] Натанзон С. М. Примианы вещественных кривых и их приложения к эффективизации операторов Шрёдингера // *Функц. анализ и его прил.* 1989. Т. 23. №1. С. 41–55.
- [63] Натанзон С. М. Дифференциальные уравнения на тета-функции Прима. Критерий вещественности двумерных конечнозонных потенциальных операторов Шрёдингера // *Функц. анализ и его прил.* 1992. Т. 26. №1. С. 17–26.
- [64] Natanzon S. M. Real nonsingular finite zone solutions of soliton equations // *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*. 1995. V. 170. №2. P. 153–183.
- [65] Newton R. G. Construction of potentials from the phase shifts at fixed energy // *J. Math. Phys.* 1962. V. 3. P. 75–82.
- [66] Newton R. G. The Three-Dimensional Inverse Scattering Problem in Quantum Mechanics. Bloomington: Indiana Univ., 1974.
- [67] Newton R. G. Scattering Theory of Waves and Particles. Berlin: Springer-Verlag, 1982.

- [68] Newton R. G. Inverse Schrödinger Scattering in Three Dimensions. Berlin: Springer-Verlag, 1989.
- [69] Новиков Р. Г. Построение двумерного оператора Шрёдингера по амплитуде рассеяния при фиксированной энергии // ТМФ. 1986. Т. 66. № 2. С. 234–240.
- [70] Новиков Р. Г. Восстановление двумерного оператора Шрёдингера по амплитуде рассеяния при фиксированной энергии // Функц. анализ и его прил. 1986. Т. 20. № 3. С. 90–91.
- [71] Novikov R. G. The inverse scattering problem on a fixed energy level for the two-dimensional Schrödinger operator // J. Funct. Anal. 1992. V. 103. P. 409–463.
- [72] Новиков Р. Г., Хенкин Г. М. Решение многомерной обратной задачи на основе обобщенных дисперсионных соотношений // Докл. АН СССР. 1987. Т. 292. № 4. С. 814–818.
- [73] Новиков Р. Г., Хенкин Г. М. $\bar{\partial}$ -уравнение в многомерной обратной задаче рассеяния // УМН. 1987. Т. 42. № 3. С. 93–152.
- [74] Новиков С. П. Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриза I // Функц. анализ и его прил. 1974. Т. 8. № 3. С. 54–66.
- [75] Повзнер А. Я. О разложении произвольных функций по собственным функциям оператора $-\Delta u + cu$ // Матем. сб. 1953. Т. 32. № 1. С. 109–156.
- [76] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. М.: Мир, 1977.
- [77] Regge T. Introduction to complexe orbital momenta // Nuovo Cimento. 1959. V. 14. P. 951–976.
- [78] Sabatier P. C. Asymptotic properties of the potentials in the inverse-scattering problem at fixed energy // J. Math. Phys. 1966. V. 7. P. 1515–1531.
- [79] Sigal I. M. Scattering Theory for Many-Body Quantum Mechanical Systems – Rigorous Results. Berlin: Springer-Verlag, 1983.
- [80] Тайманов И. А. Эффективизация тета-функциональных формул для двумерных потенциальных операторов Шрёдингера, конечнозонных на одном уровне энергии // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285. № 5. С. 1067–1070.
- [81] Тайманов И. А. Многообразия Прима разветвленных накрытий и нелинейные уравнения // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 7. С. 934–950.
- [82] Тахтаджан Л. А. Точная теория распространения импульсов в двухуровневых средах // ЖЭТФ. 1974. Т. 66. № 2. С. 476–489.
- [83] Tsai T. Y. The Schrödinger operator in the plane // Inverse Problems. 1993. V. 9. P. 763–767.
- [84] Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1980.
- [85] Веселов А. П., Новиков С. П. Конечнозонные двумерные операторы Шрёдингера. Явные формулы и эволюционные уравнения // Докл. АН СССР. 1984. Т. 279. № 1. С. 20–24.
- [86] Веселов А. П., Новиков С. П. Конечнозонные двумерные операторы Шрёдингера. Потенциальные операторы // Докл. АН СССР. 1984. Т. 279. № 4. С. 784–788.
- [87] Захаров В. Е., Манаков С. В. Многомерные нелинейные интегрируемые системы и методы построения их решений // Зап. науч. сем. ЛОМИ. 1984. Т. 133. С. 77–91.
- [88] Захаров В. Е., Манаков С. В. Построение многомерных интегрируемых систем и их решений // Функц. анализ и его прил. 1985. Т. 19. № 2. С. 11–25.
- [89] Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
- [90] Захаров В. Е., Шабат А. Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // ЖЭТФ. 1971. Т. 34. С. 118–134.
- [91] Захаров В. Е., Шабат А. Б. Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи теории рассеяния // Функц. анализ и его прил. 1974. Т. 8. № 3. С. 43–53.
- [92] Zakharov V. E., Schulman E. I. On additional motion invariants of classical Hamiltonian wave systems // Phys. D. 1988. V. 29. № 3. P. 283–320.
- [93] Zakharov V. E., Schulman E. I. Integrability of nonlinear systems and perturbation theory // What is integrability? Berlin: Springer-Verlag, 1991. P. 185–250.