Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Х. Арансон, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, И. А. Тельных, О двумерных базисных множествах грубых диффеоморфизмов трехмерных многообразий, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 6, 123–124

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm336>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 12:44:23

О ДВУМЕРНЫХ БАЗИСНЫХ МНОЖЕСТВАХ ГРУБЫХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

С. Х. АРАНСОН, Е. В. ЖУЖОМА, В. С. МЕДВЕДЕВ, И. А. ТЕЛЬНЫХ

Важным классом структурно устойчивых (грубых) диффеоморфизмов на замкнутых многообразиях M^n являются *диффеоморфизмы Аносова* и структурно устойчивые A -диффеоморфизмы, введенные Смейлом.¹

Пусть $\Omega \subset M^n$ – базисное множество *коразмерности один* (ориентируемое или неориентируемое). Для определенности, будем считать Ω *аттрактором*. Тогда достижимая извне граница множества Ω есть объединение конечного числа неустойчивых многообразий периодических точек аттрактора Ω . Эта достижимая граница разбивается на попарно непересекающиеся связки [1], которые определяются следующим образом. Попарно различные неустойчивые многообразия $W^u(p_i)$ точек p_i ; ($i = 1, \dots, k$) образуют k -связку, если существуют дуги $(x_i, y_i)^s$, принадлежащие одномерным *устойчивым многообразиям*, такие, что: 1) $(x_i, y_i)^s \cap \omega = \emptyset$; 2) $x_i \in W^u(p_i)$, $y_i \in W^u(p_{i+1})$ (здесь $p_{k+1} = p_1$); 3) число k – максимально возможное.

Известно [1], что на замкнутом или открытом M^n ($n \geq 3$) базисные множества Ω коразмерности один могут содержать только 1-связки и 2-связки, при этом если в Ω есть хотя бы одна 1-связка, то Ω неориентируемое, а если в Ω содержатся только 2-связки, то Ω ориентируемое.

Следующая теорема решает проблему о невозможности существования на замкнутых трехмерных многообразиях M^3 важных классов структурно устойчивых диффеоморфизмов.

ТЕОРЕМА. Пусть $f: M^3 \rightarrow M^3$ – структурно устойчивый диффеоморфизм замкнутого трехмерного многообразия M^3 . Тогда f не может иметь двумерных базисных множеств с хотя бы одной 1-связкой.

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Предположим противное. Тогда из существования 1-связки вытекает, что M^3 содержит трехмерную область, гомеоморфную прямому произведению отрезка на лист Мёбиуса, и поэтому M^3 – неориентируемое многообразие. Рассмотрим замкнутое ориентируемое трехмерное многообразие $\widehat{M}^3$, являющееся для M^3 двулистным накрывающим многообразием, и обозначим через p проекцию $\widehat{M}^3$ на M^3 . Тогда существует A -диффеоморфизм $\widehat{f}: \widehat{M}^3 \rightarrow \widehat{M}^3$, накрывающий диффеоморфизм $f: M^3 \rightarrow M^3$ такой, что в спектральном разложении диффеоморфизма $\widehat{f}$ имеется ориентируемое двумерное базисное множество $\widehat{\Omega}$ ($\Omega = p(\widehat{\Omega})$), которое также можно считать аттрактором. Поскольку f структурно устойчив и, следовательно, является A -диффеоморфизмом и удовлетворяет *сильному условию трансверсальности* (R. Mañé, C. Robinson), и так как $p: \widehat{M}^3 \rightarrow M^3$ – локальный диффеоморфизм, то $\widehat{f}$ также структурно устойчив.

По условию, у структурно устойчивого диффеоморфизма f существует открытая компонента $\sigma \subset M^3 \setminus \Omega$, в достижимую границу которой входит 1-связка $W^u(m_0) \subset \Omega$, являющаяся неустойчивым двумерным многообразием периодической точки $m_0 \in \Omega$. Не уменьшая общности, можно считать m_0 неподвижной точкой (она является граничной в смысле терминологии [1])

Возьмем произвольное поднятие $\widehat{m}_1 \in \widehat{\Omega}$ точки m_0 . Поскольку $\widehat{M}^3$ замкнутое и ориентируемое, то $\widehat{\Omega}$ имеет только 2-связки. Поэтому существует еще ровно одна отличная от $\widehat{m}_1$ *граничная периодическая точка* $\widehat{m}_2 \in \widehat{\Omega}$ такая, что $p(\widehat{m}_1) = p(\widehat{m}_2) = m_0$.

В силу [2], для структурно устойчивых диффеоморфизмов с базисными множествами коразмерности один, заданных на замкнутых M^n ($n \geq 3$), и, в частности, для $\widehat{f}$ на $\widehat{M}^3$ выполняется,

Авторы благодарят РФФИ (грант № 99-01-00230) и INTAS (грант № 97-1843) за финансовую поддержку.

¹Здесь и в дальнейшем, если не оговорено отдельно, за всеми определениями и понятиями, введенными различными авторами и используемыми в этой статье, отсылаем читателя к монографии [1].

что $W_\phi^s(\widehat{m}_1)$ и $W_\phi^s(\widehat{m}_2)$ принадлежат, соответственно, трехмерным неустойчивым многообразиям $W^u(\widehat{\alpha}_1)$, $W^u(\widehat{\alpha}_{k+1})$ (k – неотрицательное целое число, зависящее от $\widehat{f}$) отталкивающих периодических точек $\widehat{\alpha}_1$, $\widehat{\alpha}_{k+1}$, принадлежащих области $\widehat{\sigma} \subset \widehat{M}^3 \downarrow \widehat{\Omega}$.² Кроме того, в области $\widehat{\sigma}$ существуют еще отталкивающие периодические точки $\widehat{\alpha}_i$ ($i = 2, \dots, k$) с трехмерными неустойчивыми многообразиями и периодические точки P_i ($i = 1, \dots, k$) с двумерными неустойчивыми многообразиями, которые удовлетворяют следующим условиям: 1) множество

$$a_{12} = \{\widehat{m}_1\} \cup W_\phi^s(\widehat{m}_1) \cup \widehat{\alpha}_1 \cup W^s(P_1) \cup \bigcup_{i=1}^k (P_i \cup \widehat{\alpha}_{i+1}) \cup W_\phi^s(\widehat{m}_2) \cup \{\widehat{m}_2\}$$

есть простая замкнутая дуга с концевыми точками $\widehat{m}_1$ и $\widehat{m}_2$; 2) на a_{12} периодические точки $\widehat{\alpha}_i$; чередуются с периодическими точками P_i (включая точки $\widehat{m}_1$ и $\widehat{m}_2$, размерность неустойчивых многообразий у которых равна двум), и, следовательно, число периодических точек на дуге a_{12} нечетно.

Отсюда и из соотношений $p\widehat{f} = fp$, $p(\widehat{\Omega}) = \Omega$, $p(\widehat{m}_1) = p(\widehat{m}_2) = m_0$ получаем следующие свойства: 1) $p(W_\phi^s(\widehat{m}_1)) = p(W_\phi^s(\widehat{m}_2))$, $p(\widehat{\alpha}_i) = p(\widehat{\alpha}_{k+2-i})$, $p(W^s(P_j)) = p(W^s(P_{k+1-j}))$, $p(P_j) = p(P_{k+1-j})$ ($i = 1, \dots, k+1$, $j = 1, \dots, k$); 2) либо среди периодических точек $\widehat{\alpha}_i$ существует периодическая точка $\widehat{\alpha}_\nu$ с $p(W^s(P_{\nu-1})) = p(W^s(P_\nu))$ (в этом случае k – четное, $\nu = \frac{1}{2}(k+2)$ и $p^{-1}(p(\widehat{\alpha}_\nu)) = \widehat{\alpha}_\nu$); 3) либо среди периодических точек P_i существует периодическая точка P_ν такая, что обе компоненты множества $W^s(P_\nu) \downarrow P_\nu$ отображаются под действием p в одну компоненту множества $W^s(p(P_\nu)) \downarrow p(P_\nu)$ (в этом случае k – нечетное, $\nu = \frac{1}{2}(k+1)$ и $p^{-1}(p(P_\nu)) = P_\nu$).

В случае 2) в окрестности точки $\widehat{\alpha}_\nu$, а случае 3) в окрестности точки P_ν отображение $p: \widehat{M}^3 \rightarrow M^3$ не является локальным гомеоморфизмом, что невозможно.

Авторы благодарят Д. В. Аносова, В. З. Гринеса, М. И. Малкина за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Арансон С. Х., Аносов Д. В., Гринес В. З., Плыкин Р. В., Сатаев Е. А., Сафонов А. Ф., Солодов В. В., Старков А. Н., Стёпин А. М., Шлячков С. В. Динамические системы с гиперболическим поведением // Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Фундам. напр. Т. 66. М.: ВИНТИ, 1991. С. 1–247. [2] Гринес В. З., Жужома Е. В. Структурно устойчивые диффеоморфизмы с ручными базисными множествами коразмерности один (в печати).

Нижегородский государственный технический университет;
НИИ прикладной математики и кибернетики при Нижегородском
государственном университете им. Н. И. Лобачевского

Принято редколлегией
03.10.2000

²Здесь через $W_\phi^s(\widehat{m}_i)$ ($i = 1, 2$) обозначена та из компонент множества $W^s(\widehat{m}_i) \downarrow \widehat{m}_i$, которая не пересекается с $\widehat{\Omega}$.