Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Артамонов, Действия точечных алгебр Хопфа на квантовых многочленах,
УМН, 2000, том 55, выпуск 6, 125–126

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm337>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 16:58:37

ДЕЙСТВИЯ ТОЧЕЧНЫХ АЛГЕБР ХОПФА НА КВАНТОВЫХ МНОГОЧЛЕНАХ

В. А. АРТАМОНОВ

Пусть k – поле, в котором фиксирована квадратная матрица $Q = (q_{ij})$ размера $n \geq 3$, причем элементы $q_{ij} \in k^*$, $i, j = 1, \dots, n$, удовлетворяют условию $q_{ii} = q_{ij}q_{ji} = 1$ для всех i, j .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Через $\Lambda = k_Q[X_1, \dots, X_n]$ обозначается ассоциативная k -алгебра с единицей, порожденная элементами $X_1, \dots, X_n$ с определяющими соотношениями $X_i X_j = q_{ij} X_j X_i$, $1 \leq i, j \leq n$. Алгебра Λ называется *алгеброй квантовых многочленов*. Элементы q_{ij} называются *мультипараметрами*.

Алгебра Λ удовлетворяет условию Оре и потому имеет тела частных $F = k_Q(X_1, \dots, X_n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Алгебра Λ называется *алгеброй общих квантовых многочленов*, если все мультипараметры q_{ij} , $1 \leq i < j \leq n$, независимы в мультипликативной абелевой группе k^* поля k . Другими словами, если $m_{ij} \in \mathbb{Z}$, то

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} q_{ij}^{m_{ij}} = 1 \Leftrightarrow m_{ij} = 0.$$

Всюду в дальнейшем предполагается, что Λ – алгебра общих квантовых многочленов. В работе [1] рассмотрены автоморфизмы алгебры Λ и их инварианты.

ТЕОРЕМА 1 [1]. Пусть γ – инъективный эндоморфизм алгебры Λ . Тогда существуют такие элементы $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in k^*$, что $\gamma(X_j) = \gamma_j X_j$, $j = 1, \dots, n$. В частности, γ является автоморфизмом и группа $\text{Aut } \Lambda$ абелева.

ТЕОРЕМА 2 [1]. Пусть G – конечная подгруппа в $\text{Aut } \Lambda$. Тогда подалгебра инвариантов Λ^G есть нетерова слева и справа алгебра, причем Λ – конечнопорожденный левый и правый Λ^G -модуль. Действие G продолжается на тело частных F , причем подтело инвариантов F^G является телом частных подалгебры Λ^G .

Рассмотрим обобщения этих результатов, связанные с изучением (ко)действий алгебр Хопфа на алгебрах общих квантовых многочленов Λ . Напомним, что для произвольной алгебры Хопфа H через $P(H)$ обозначается (ограниченная) алгебра Ли примитивных элементов, а через $G(H)$ – группа всех элементов из H .

ТЕОРЕМА 3. Пусть задана коммутативная полупростая алгебра Хопфа H , для которой Λ является H -комодульной алгеброй со структурным морфизмом $\rho: \Lambda \rightarrow H \otimes_k \Lambda$. Тогда существуют такие элементы $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in G(H)$, что $\rho(X_i) = \alpha_i \otimes X_i$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Для дальнейшего нам потребуется описание алгебры Ли $\text{Der } \Lambda$ дифференцирований Λ . Подалгебра $\text{Derint } \Lambda$ внутренних дифференцирований является идеалом в $\text{Der } \Lambda$. Кроме того, имеются дифференцирования $\partial_1, \dots, \partial_n$, где $\partial_j(X_i) = \delta_{ij} X_i$. Отметим, что $[\partial_i, \partial_j] = 0$, $[\partial_i, \text{ad}_u] = \text{ad}_{\partial_i u}$. Кроме того, если $\text{char } k = p > 0$, то $\partial_i^p = \partial_i$. Таким образом, линейная оболочка L дифференцирований $\partial_1, \dots, \partial_n$ является абелевой алгеброй Ли размерности n . Следующая теорема выводится из работы [2].

ТЕОРЕМА 4. Имеется прямое разложение векторных пространств $\text{Der } \Lambda = \text{Derint } \Lambda \oplus L$. Любая конечномерная подалгебра Ли в $\text{Derint } \Lambda$ является абелевой.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 99-01-00382, 00-15-96128) и программы “Университеты России” № 5527.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $\text{char } k = 0$ и ∂ – произвольное дифференцирование Λ . Предположим, что существует такой ненулевой многочлен $f(T) \in k[T]$, что $f(\partial) = 0$. Тогда $\partial = 0$.

Пусть U – универсальная (ограниченная) обертывающая алгебра для Der . Группа автоморфизмов $G = \text{Aut } \Lambda$ действует на U с помощью сопряжений. Действительно, по теореме 1

$$\alpha \partial_j \alpha^{-1} = \partial_j, \quad \alpha \text{ad}_u \alpha^{-1} = \text{ad}_{\alpha(u)}.$$

Положим $H_\Lambda = U \sharp kG$. Тогда Λ является H_Λ -модульной алгеброй.

ТЕОРЕМА 6. Пусть поле k алгебраически замкнуто и имеет нулевую характеристику. Предположим, что H – кокоммутативная алгебра Хопфа, для которой Λ является H -модульной алгеброй. Тогда существуют такой гомоморфизм алгебр Хопфа $\xi: H \rightarrow H_\Lambda$, что действие H в Λ индуцировано морфизмом ξ и действием H_Λ на Λ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [3; с. 45]. Пусть H – алгебра Хопфа, действующая на Λ . Расширение Λ/Λ^H называется целым в смысле Шелтера, если для любого элемента $f \in \Lambda$ найдется такое натуральное число m , что $f^m + q(f) = 0$, где q – сумма элементов вида

$$a_1 f^{n_1} \cdots a_d f^{n_d} a_{d+1}$$

для некоторых $a_1, \dots, a_{d+1} \in \Lambda^H$, где $n_1 + \dots + n_d < m$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть H – подалгебра Хопфа в H_Λ и поле k алгебраически замкнуто и имеет нулевую характеристику. Предположим, что расширение Λ/Λ^H является целым в смысле Шелтера. Если $P(H) \neq 0$, то Λ^H и $P(H)$ коммутативны.

ТЕОРЕМА 8. Пусть H – подалгебра Хопфа в H_Λ . Действие H на Λ можно продолжить на тело частных $F = k_Q(X_1, \dots, X_n)$. Предположим, что F имеет конечную левую (правую) размерность над подтелом инвариантов F^H . Пусть характеристика поля k равна нулю и некоторый мультипараметр q_{ij} , $1 \leq i < j \leq n$, алгебраически независим над полем рациональных чисел $\mathbb{Q} \subseteq k$. Тогда $P(H) = 0$, и поэтому $H = kG$, где G – подгруппа в $\text{Aut } \Lambda$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Алгебра Хопфа H над полем k называется точечной, если все простые подалгебры в H имеют размерность 1.

ТЕОРЕМА 9. Пусть H – точечная конечномерная алгебра Хопфа, действующая на алгебре общих квантовых многочленов Λ , $n \geq 3$. Предположим, что поле k содержит примитивный корень из 1 степени $\dim H$ и $\text{char } k$ взаимно проста с $\dim H$. Пусть I – аннулятор Λ в H . Тогда I является идеалом Хопфа в H и H/I как алгебра Хопфа изоморфна групповой алгебре $k\Omega$. Существует такой эпиморфизм групп $\tau: \mathbb{Z}^n \rightarrow \Omega$, что $\Lambda^H = \Lambda^\Omega$ как векторное пространство порождается всеми такими одночленами X^l , в которых $l \in (\mathbb{N} \cup 0)^n \cap \ker \tau$. Если $\pi: H \rightarrow H/I = k\Omega$ – естественный эпиморфизм, то $\pi(G(H)) = \Omega$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Artamonov V. A., Wisbauer R. Homological properties of quantum polynomials // Algebras and Representation Theory (to appear). [2] Alev J., Chamarie M. // Comm. Algebra. 1992. V. 20. № 6. P. 1787–1802. [3] Montgomery S. Hopf Algebras and Their Actions on Rings. Providence RI: Amer. Math. Soc., 1993.