Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Гусейн-Заде, Ф. Дельгадо, А. Кампильо, Интегрирование по эйлеровой характеристике по пространству функций и полином Александера особенности плоской кривой, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 6, 127–128

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm338>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 17:08:14

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЭЙЛЕРОВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ ПО ПРОСТРАНСТВУ ФУНКЦИЙ И ПОЛИНОМ АЛЕКСАНДЕРА ОСОБЕННОСТИ ПЛОСКОЙ КРИВОЙ

С. М. Гусейн-Заде, Ф. Дельгадо, А. Кампильо

Пусть $\Delta^C(t_1, \dots, t_r)$ – полином Александера приведенной особенности плоской кривой $C = \bigcup_{i=1}^r C_i$ (C_i – ее неприводимые компоненты), т.е. зацепления $C \cap S_\varepsilon^3 \subset S_\varepsilon^3$ для достаточно малого $\varepsilon > 0$ (см., например, [1]). Вообще говоря, полином Александера определен только с точностью до умножения на моном $\pm t_1^{n_1} \dots t_r^{n_r}$. Мы фиксируем его, полагая, что он действительно является полиномом (т.е. не содержит переменных в отрицательных степенях) и что $\Delta^C(0, \dots, 0) = 1$. Пусть $\zeta_C(t)$ – дзета-функция преобразования классической монодромии особенности C , т.е. ростка функции $f: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ такого, что $C = \{f = 0\}$ (см., например, [2]). Для $r > 1$ имеем $\zeta_C(t) = \Delta^C(t, \dots, t)$ (для $r = 1$ $\zeta_C(t) = \Delta^C(t)/(1 - t)$).

В [3] было показано, что все коэффициенты полинома Александера $\Delta^C(\underline{t})$ ($\underline{t} = (t_1, \dots, t_r)$) могут быть выражены как эйлеровы характеристики некоторых явным образом описанных пространств – дополнений к системам проективных гиперплоскостей в проективных пространствах. Для особенности гиперповерхности произвольной размерности числа Лефшеца итераций преобразования классической монодромии были описаны как эйлеровы характеристики некоторых подпространств в пространстве (усеченных) дуг [4]. Этот результат связан с теорией интегрирования по отношению к эйлеровой характеристике в пространстве дуг. Здесь мы обсуждаем аналогичное понятие (интегрирование по отношению к эйлеровой характеристике) в проективизации $\mathbb{P}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$ кольца $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$ ростков функций на пространстве $\mathbb{C}^n$ в начале координат (рассматриваемое здесь как линейное пространство) и показываем, что полином Александера и дзета-функция особенности плоской кривой могут быть выражены в виде некоторых интегралов по пространству $\mathbb{P}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}$ по отношению к эйлеровой характеристике.

Пусть $J_{\mathbb{C}^n, 0}^k$ – пространство k -струй функций в начале координат в пространстве $\mathbb{C}^n$ ($J_{\mathbb{C}^n, 0}^k = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}/\mathfrak{m}^{k+1} \cong \mathbb{C}^{\binom{n+k}{k}}$, где $\mathfrak{m}$ – максимальный идеал в кольце $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$). Для комплексного линейного пространства L (конечно- или бесконечномерного) обозначим через $\mathbb{P}L$ его проективизацию $(L \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$, пусть $\mathbb{P}^*L$ – несвязное объединение $\mathbb{P}L$ и точки (в некотором смысле $\mathbb{P}^*L = L/\mathbb{C}^*$). Имеются естественные отображения $\pi_k: \mathbb{P}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0} \rightarrow \mathbb{P}^*J_{\mathbb{C}^n, 0}^k$, $\pi_{k, \ell}: \mathbb{P}^*J_{\mathbb{C}^n, 0}^k \rightarrow \mathbb{P}^*J_{\mathbb{C}^n, 0}^\ell$ для $k \geq \ell$. Над $\mathbb{P}J_{\mathbb{C}^n, 0}^\ell \subset \mathbb{P}^*J_{\mathbb{C}^n, 0}^\ell$ отображение $\pi_{k, \ell}$ является локально тривиальным расслоением, слоем которого является комплексное линейное пространство размерности $C_{n+k}^k - C_{n+\ell}^\ell$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Говорят, что подмножество $X \subset \mathbb{P}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$ является цилиндрическим, если $X = \pi_k^{-1}(Y)$ для некоторого полуалгебраического подмножества $Y \subset \mathbb{P}J_{\mathbb{C}^n, 0}^k \subset \mathbb{P}^*J_{\mathbb{C}^n, 0}^k$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Эйлерова характеристика $\chi(X)$ цилиндрического подмножества $X \subset \mathbb{P}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$ ($X = \pi_k^{-1}(Y)$, $Y \subset \mathbb{P}J_{\mathbb{C}^n, 0}^k$) определяется как эйлерова характеристика $\chi(Y)$ множества Y .

ЗАМЕЧАНИЕ. Полуалгебраическое подмножество конечномерного проективного пространства (например, множество Y выше) может быть представлено в виде объединения конечного числа непересекающихся клеток. Эйлерова характеристика такого множества определяется как альтернированная сумма чисел клеток различных размерностей. Определенная таким образом эйлерова характеристика обладает свойством аддитивности: $\chi(Y_1 \cup Y_2) = \chi(Y_1) + \chi(Y_2) - \chi(Y_1 \cap Y_2)$, и поэтому может рассматриваться как обобщенная (неположительная) мера на алгебре полуалгебраических подмножеств.

Пусть $\psi: \mathbb{P}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0} \rightarrow A$ – функция со значениями в абелевой группе A .

Работа первого автора выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-01-00612) и фонда INTAS (грант № 97-1644).

Работа последних двух авторов выполнена при частичной поддержке гранта DGICYT PB97-0471 и гранта Кастилии и Леона VA51/97.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Говорят, что функция $\psi: \mathbb{P}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0} \rightarrow A$ является цилиндрической, если для любого ненулевого элемента $a \in A$ множество $\psi^{-1}(a) \subset \mathbb{P}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ является цилиндрическим.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Интеграл цилиндрической функции ψ по $\mathbb{P}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ по отношению к эйлеровой характеристике – это $\int_{\mathbb{P}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}} \psi d\chi = \sum_{a \in A, a \neq 0} \chi(\psi^{-1}(a)) \cdot a$, если эта сумма имеет смысл в A .

Если интеграл существует (имеет смысл), то говорят, что функция ψ интегрируема.

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогичным образом можно определить обобщенную эйлерову характеристику $[X]$ цилиндрического подмножества пространства $\mathbb{P}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ (или пространства $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$) со значениями в кольце Гротендика комплексных полуалгебраических пространств, локализованном по классу $\mathbb{L}$ комплексной прямой, и тем самым соответствующее понятие интегрирования (см., например, [5]). Для этого можно определить $[X]$ как $[Y] \cdot \mathbb{L}^{-C_{n+k}^k}$.

Для особенности $C = \bigcup_{i=1}^r C_i \subset (\mathbb{C}^2, 0)$ плоской кривой пусть $\varphi_i: (C_i, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ – параметризации (униформизации) компонент C_i кривой C (т.е. $\text{Im } \varphi_i = C_i$ и φ_i является изоморфизмом между $\mathbb{C}_i$ и C_i вне начала координат). Для ростка $g \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ обозначим через $v_i(g)$ степень начального члена в разложении в степенной ряд ростка $g \circ \varphi_i: (C_i, 0) \rightarrow \mathbb{C}: g \circ \varphi_i(\tau_i) = c_i \cdot \tau_i^{v_i} + (\text{члены более высокой степени})$, где $c_i \neq 0$. Если $g \circ \varphi_i(t) \equiv 0$, то полагаем $v_i(g)$ равным бесконечности (∞). Положим $\underline{v}(g) = (v_1(g), \dots, v_r(g)) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$, $v(g) = \|\underline{v}(g)\| = v_1(g) + \dots + v_r(g)$. Пусть $\mathbb{Z}[[t]]$ (соответственно $\mathbb{Z}[[t_1, \dots, t_r]]$) – группа (по отношению к сложению) формальных степенных рядов по переменной t (соответственно по переменным $t_1, \dots, t_r$). Для $\underline{v} = (v_1, \dots, v_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ положим $\underline{t}^{\underline{v}} = t_1^{v_1} \dots t_r^{v_r}$; мы полагаем $t^\infty = 0$.

ТЕОРЕМА 1. Для любого $\underline{v} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ подмножество $\{g \in \mathbb{P}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0} : \underline{v}(g) = \underline{v}\}$ является цилиндрическим. Поэтому функции $\underline{t}^{\underline{v}(g)}$ и $t^{v(g)}$ на пространстве $\mathbb{P}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ со значениями в $\mathbb{Z}[[t_1, \dots, t_r]]$ и $\mathbb{Z}[[t]]$ соответственно являются цилиндрическими.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из того факта, что для $g \in \mathfrak{m}^s$ $v_i(g) \geq s$, т.е. ряд Тейлора ростка $g \circ \varphi_i(\tau_i)$ начинается с члена степени не менее s . Поэтому функции $\underline{t}^{\underline{v}(g)}$ и $t^{v(g)}$ на $\mathbb{P}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ являются интегрируемыми (поскольку $\sum_{\underline{v} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r} \ell(\underline{v}) \underline{t}^{\underline{v}} \in \mathbb{Z}[[t_1, \dots, t_r]]$ для любых целых $\ell(\underline{v})$).

ТЕОРЕМА 2. При $r > 1$ $\int_{\mathbb{P}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}} \underline{t}^{\underline{v}(g)} d\chi = \Delta^C(t_1, \dots, t_r)$; при $r \geq 1$ $\int_{\mathbb{P}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}} t^{v(g)} d\chi = \zeta_C(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из результатов работы [3]. Пусть $\mathbb{P}\widehat{S}_C$ – проективизация расширенной полугруппы кривой C (см. [3]). Для $\underline{v} = (v_1, \dots, v_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ пусть $k = 1 + \max_{1 \leq i \leq r} v_i$ и пусть $Y_{\underline{v}} \subset \mathbb{P}J_{\mathbb{C}^2,0}^k$ – множество $\{j^k g \in J_{\mathbb{C}^2,0}^k : \underline{v}(g) = \underline{v}\}$ (мы указывали, что выполнение условия $\underline{v}(g) = \underline{v}$ определяется k -струей $j^k g$ ростка g). Естественное отображение $Y_{\underline{v}} \rightarrow \mathbb{P}F_{\underline{v}}$ множества $Y_{\underline{v}}$ в слой $\mathbb{P}F_{\underline{v}}$ проективизации расширенной полугруппы $\mathbb{P}\widehat{S}_C$ (см. [3]) является локально тривиальным расслоением, слоем которого является комплексное линейное пространство некоторой размерности. Теперь теорема 2 вытекает из того, что $\chi(\mathbb{P}\widehat{S}_C) = \Delta^C(t_1, \dots, t_r)$ (см. [3]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Eisenbud D., Neumann W. Three-Dimensional Link Theory and Invariants of Plane Curve Singularities. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1985. (Ann. of Math. Stud. V. 110.)
- [2] A'Campo N. // Comment. Math. Helv. 1975. V. 50. P. 233–248. [3] Гусейн-Заде С. М., Дельгадо Ф., Кампилио А. // УМН. 1999. Т. 54. №3. С. 157–158. [4] Denef J., Loeser F. Lefschetz numbers of iterates of the monodromy and truncated arcs // Preprint math.AG/0001105.
- [5] Craw A. An introduction to motivic integration // Preprint math.AG/9911179.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;
Университет г. Вальядолид, Испания

Принято редколлегией
03.10.2000

E-mail: sabir@mccme.ru, fdelgado@agt.uva.es, campillo@cpd.uva.es