Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Вершик, М. И. Граев, Структура дополнительных серий и особых представлений групп $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 5, 3–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm3389>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 14:26:47

УДК 517.5

Структура дополнительных серий и особых представлений групп $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$

А. М. Вершик, М. И. Граев

В статье дается обзор нескольких, в том числе и новых, моделей неприводимых представлений дополнительной серии и их пределов — особых представлений — для групп $SU(n, 1)$ и $SO(n, 1)$. Указанные группы, геометрический смысл которых общеизвестен, исчерпывают список простых групп Ли, у которых единичное представление не изолировано в пространстве неприводимых унитарных представлений (нет свойства Каждана) и, следовательно, существуют такие неприводимые унитарные представления этих групп — “особые”, — в которых первые когомологии группы с коэффициентами в таких представлениях — нетривиальны. По техническим причинам удобнее рассматривать группы $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$. Большая часть статьи посвящена группе $U(n, 1)$.

Основной акцент делается на так называемые коммутативные модели особых и дополнительных представлений: в них максимальная унитарная подгруппа представлена мультипликаторами — в случае $O(n, 1)$, и в виде канонической модели представлений Гейзенберга в случае $U(n, 1)$. Эти модели изучались ранее только для группы $SL(2, \mathbb{R})$. Они особенно важны для реализации нелокальных представлений групп токов, что будет рассмотрено в другом месте.

Мы существенно используем свойство “плотности” изучаемых неприводимых представлений группы $SO(n, 1)$: их ограничения на максимальную параболическую подгруппу P являются неприводимыми эквивалентными представлениями. Обратно, чтобы продолжить неприводимое представление P до представления $SO(n, 1)$, нужно доопределить лишь одну инволюцию. Для группы $U(n, 1)$ положение сходно, но чуть более сложно.

Библиография: 54 названия.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
§ 1. Группы $O(n, 1)$, $U(n, 1)$ и некоторые их подгруппы	15
Глава I. Представления группы $O(n, 1)$	18
§ 2. Модели неприводимых унитарных представлений дополнительной серии группы $O(n, 1)$ и ее особого представления	18

Первый автор поддержан грантами НШ 2251.2003.1 и RUMI-2662-ST-04; второй автор поддержан РФФИ (грант № 01-04-00363).

© А. М. Вершик, М. И. Граев, 2006

Глава II. Представления подгрупп группы $U(n, 1)$	31
§ 3. Представления группы Гейзенберга H и их продолжения на группы $P_0 = H \rtimes D_0$ и $P = H \rtimes D$	31
§ 4. Представления групп P_0 и P в пространствах $H(\rho)$ и $H_{\pm}^{\lambda}$	37
Глава III. Представления группы $U(n, 1)$	44
§ 5. Модели дополнительной серии неприводимых унитарных представлений группы $U(n, 1)$	44
§ 6. Модели особых представлений группы $U(n, 1)$	53
Глава IV. Добавления.....	69
§ 7. Добавление 1. Канонические состояния и канонические представления.....	69
§ 8. Добавление 2. Вывод некоторых формул.....	79
Список литературы.....	85

Введение

0.1. Особые представления. Неприводимое унитарное неединичное представление T_g группы G в гильбертовом пространстве L называется *особым*, если его можно продолжить до неразложимого, приводимого представления $\hat{T}$ в одномерном расширении $L \oplus \{\xi\}$ пространства $L: \hat{T}_g(h, \xi) = (T_g h + b(g), \xi)$, где отображение $b: G \rightarrow L$ удовлетворяет условию

$$b(g_1 g_2) = b(g_1) + T_{g_1} b(g_2) \quad \text{для любых } g_1, g_2 \in G.^1$$

Такое отображение называется 1-коциклом, и неразложимость представления равносильна нетривиальности этого коцикла, т.е. невозможности представления функции $b(g)$ в виде $b(g) = T_g \xi - \xi$ ни для какого $\xi \in L$. Для любого представления T группы G обычным образом определяется аддитивная группа первых когомологий $H^1(G, T)$ группы G со значениями в этом представлении (факторгруппа аддитивной группы коциклов по подгруппе тривиальных коциклов – т.е. циклов, когомологических нулю). Особость неприводимого представления T означает, таким образом, нетривиальность первых когомологий со значениями в этом представлении.

Коциклы со значением в единичном представлении группы суть ее аддитивные одномерные характеры, и поэтому для групп, у которых есть такие нетривиальные характеры, единичное представление также естественно считать особым. Группа аддитивных характеров группы и есть в этом случае группа когомологий единичного представления.

В работе [2] доказано, что всякое особое неединичное представление локально компактной компактно порожденной группы неотделимо (в топологии Фелла–Джекобсона) от единичного представления, иначе говоря, любая открытая окрестность особого представления имеет непустое пересечение со всякой открытой окрестностью единичного представления. Тем самым, у групп, которые имеют особое неединичное представление, единичное представление неизолировано в множестве всех унитарных неприводимых представлений; иначе говоря, такие группы не обладают свойством (T) Каждана. Группам со свойством Каждана после пионерской работы [3] и последующих изложений (см.,

¹Заметим, что в [1] термин “особое представление” имеет иной смысл.

например, [4]) посвящено большое количество исследований (одна из последних книг – [5]), но нас интересуют полупростые группы, не имеющие этого свойства. Множество неединичных неприводимых унитарных представлений группы, неотделимых от единичного представления, названо в [2] *корой*, а сами такие представления по понятной причине – *бесконечно малыми представлениями*. Как легко убедиться на примере группы евклидовых движений, не всякое бесконечно малое представление является особым.

Возможны случаи, когда особое представление принадлежит замыканию единичного представления. Это эквивалентно тому, что особое представление содержит почти инвариантные векторы ($\forall \varepsilon > 0 \forall g_1, g_2, \dots, g_k \in G \exists h \in L: \|T_{g_i}h - h\| < \varepsilon$).

В работе [2] было высказано также предположение, что у любой локально компактной группы без свойства (T) существует особое (быть может, единичное) представление. Это было доказано в работе Е. Шаломы [6] (см. также [5] и литературу в этой работе), даже в более сильной форме: у всякой такой группы существуют особые представления, при этом нетривиальна не только группа обычных когомологий со значениями в этом представлении, но и группа строгих когомологий. (Группа строгих когомологий есть факторгруппа группы коциклов по замыканию подгруппы тривиальных коциклов, см. [5].) Однако вопрос о вычислениях когомологий и о явном описании особых представлений и даже о числе их далек от решения. Известно, что для абелевых и нильпотентных групп особым является лишь единичное представление. Уже для счетных разрешимых групп положение более сложно. Когомологии изучались в ряде работ (см. [7], книги [8], [9]); о когомологиях группы автоморфизмов дерева см. [10].

Квадрат нормы 1-коцикла есть условно положительно-определенная функция на группе. Для полупростых групп ранга 1 она описана в [11] и несколько позже независимо в [12]. Эквивалентность некогомологичности нулю коцикла и неограниченности нормы коцикла как функции на группе для этого случая следует из [11], а в общей форме для любых унитарных представлений, по видимому, впервые доказана в [13] (см. также [5]).

Среди простых групп Ли особыми представлениями обладают только группы $SO(n, 1)$ и $SU(n, 1)$ [11]. При этом у групп $SO(n, 1)$, $n > 2$, имеется в точности одно, а у групп $SU(n, 1)$ и $SO(2, 1)$ – в точности два особых представления [9; с. 168–169]. О них и пойдет речь в этой статье. Что касается групп ранга выше 1 и групп $Sp(n, 1)$, у которых единичное представление изолировано в пространстве неприводимых унитарных представлений, то для них открыты аналогичные возможности, если перейти к неунитарным представлениям с инвариантной билинейной, но не положительно-определенной формой, – в этом более широком классе представлений особые представления существуют у любой простой группы Ли, но, кажется, эта возможность пока никем подробно не исследована.

Хотя само по себе особое представление для групп ранга 1, конечно, было известно и до работы [11], только после нее стала ясна связь с когомологиями и неограниченными условно положительно-определенными функциями и каноническим состоянием из [14]; см. комментарии к этим двум работам в [15], [16] и др.

Одно из важных применений особых неединичных представлений состоит в том, что по каждому из них можно построить неприводимое нелокальное унитарное представление соответствующей группы токов G^X , т.е. групп ограниченных измеримых отображений $X \rightarrow G$ с поточечным умножением, где X – пространство с мерой; этому посвящен цикл работ [14], [11], [17]–[25]. Однако мы не касаемся этих применений в этой статье.²

Эта статья посвящена неприводимым унитарным представлениям групп $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$, т.е. групп линейных преобразований в $\mathbb{R}^{n+1}$ и $\mathbb{C}^{n+1}$, сохраняющих соответственно квадратичную и эрмитову формы сигнатуры $(n, 1)$. Отметим, что с точностью до центральных подгрупп это группы движений вещественного и комплексного пространств Лобачевского $O(n, 1)/O(n) \times O(1)$ и $U(n, 1)/U(n) \times U(1)$.³

Мы изучаем только особые представления групп $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$ и примыкающую к ним дополнительную серию представлений, оставляя в стороне общую теорию представлений этих групп, чему посвящена обширная литература. Мы выделяем те свойства, которые отличают эти представления и их реализации от других представлений; в частности,

ограничение особого представления группы $O(n, 1)$ или $U(n, 1)$ на максимальную параболическую подгруппу P остается особым неприводимым представлением.

Тем самым, изучение особых представлений групп $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$ сводится к изучению особых представлений их максимальных параболических подгрупп.

Структуры дополнительных и особых представлений для случая $U(n, 1)$ красивее и богаче их структуры для случая $O(n, 1)$. В статье эти группы рассматриваются отдельно, причем случай $O(n, 1)$ изложен более кратко, а основная часть статьи связана с группой $U(n, 1)$. О представлениях группы $O(n, 1)$ см. также [21], [22].

В теоремах статьи описаны различные, в том числе и новые, модели изучаемых представлений.

0.2. Переход к особым представлениям групп $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$ от представлений дополнительной серии. Особые представления групп $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$ получаются предельным переходом из представлений так называемой дополнительной серии, представляющей самостоятельный интерес.

Пусть G – одна из этих групп, P – ее единственная с точностью до сопряженности максимальная параболическая подгруппа. Представлениями дополнительной серии группы G называются ее неприводимые унитарные представления, индуцированные одномерными **неунитарными** представлениями подгруппы P . Эти представления зависят от вещественного параметра λ из интервала $(0, n - 1)$ в случае $O(n, 1)$ и $(0, 2n)$ в случае $U(n, 1)$. Их описание в случае групп $G = SL(2, K)$ см. в [41] для $K = \mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ и в [42] – для неархимедова поля K .

²О представлениях бесконечномерных групп см. также [26]–[36] и монографии [8], [37]. См. также монографии [9], [38] и статьи [39], [40].

³ Замена групп $SO(n, 1)$ и $SU(n, 1)$ их расширениями $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$, не меняя ничего по существу, упрощает построения.

Представления дополнительной серии реализуются, например, в гильбертовых пространствах L^λ функций на сфере $S = G/P$. Другие реализации описаны ниже.

На концах интервалов $(0, n - 1)$ для случая $O(n, 1)$ и соответственно $(0, 2n)$ для случая $U(n, 1)$ пространство L^λ дополнительной серии становится приводимым.

В случае $O(n, 1)$ при $\lambda = 0$ норма $\|f\|_\lambda$ пространства дополнительной серии вырождается на подпространстве L коразмерности 1. Особое представление T группы $O(n, 1)$ реализуется на этом подпространстве L с нормой

$$\|f\| = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{d\|f\|_\lambda}{d\lambda}.$$

Связанный с ним нетривиальный 1-коцикл задается формулой $b(g) = T_g \xi - \xi$, где $\xi \notin L$.

При $\lambda = n - 1$ норма $\|f\|_\lambda$ вырождается на одномерном подпространстве L_0 . Особое представление реализуется на факторпространстве по L_0 с нормой

$$\|f\|_0 = \lim_{\lambda \rightarrow n-1} \|f\|_\lambda.$$

Особые неприводимые унитарные представления группы $O(n, 1)$, отвечающие концам интервала $(0, n - 1)$, эквивалентны.

В случае группы $U(n, 1)$ при $\lambda = 0$ норма $\|f\|_\lambda$ также вырождается на подпространстве L коразмерности 1. В отличие от случая $O(n, 1)$, норма $\|f\| = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{d\|f\|_\lambda}{d\lambda}$ в пространстве L вырождается при $n > 1$ на некотором бесконечномерном подпространстве $L_1 \subset L$. Гильбертово пространство L/L_1 (с унаследованной нормой) распадается в прямую сумму двух неприводимых неэквивалентных инвариантных подпространств H_+ и H_- . Представления группы $U(n, 1)$ в подпространствах H_+ и H_- являются особыми представлениями.

При $\lambda = 2n$ и $n > 1$ норма $\|f\|_\lambda$ вырождается на подпространстве L бесконечной коразмерности. Норма $\|f\| = \lim_{\lambda \rightarrow 2n} \frac{d\|f\|_\lambda}{d\lambda}$ на L вырождается на одномерном подпространстве $L_0 \subset L$. Представление группы $U(n, 1)$ в гильбертовом пространстве L/L_0 распадается в прямую сумму двух неэквивалентных особых неприводимых представлений.

Особые унитарные представления группы $U(n, 1)$, отвечающие концам интервала $(0, 2n)$, эквивалентны.

0.3. Матричные реализации групп $O(n, 1)$, $U(n, 1)$ и некоторых их подгрупп. Матричные реализации групп $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$ соответственно определяются выбором квадратичной и эрмитовой форм сигнатуры $(n, 1)$ в пространствах $\mathbb{R}^{n+1}$ и $\mathbb{C}^{n+1}$. В свою очередь этот выбор равносильен фиксации картановской подгруппы соответствующей группы.

Мы реализуем $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$ как группы линейных преобразований в $\mathbb{R}^{n+1}$ и $\mathbb{C}^{n+1}$, сохраняющих соответственно квадратичную форму $2x_1x_{n+1} + x_2^2 + \dots + x_n^2$ и эрмитову форму $x_1\bar{x}_{n+1} + x_{n+1}\bar{x}_1 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2$.

В этой реализации элементы групп представимы в форме клеточных матриц $g = \|g_{ij}\|$ порядка 3, где диагональные клетки g_{11} , g_{22} и g_{33} — квадратные

матрицы порядков 1 , $n-1$ и 1 соответственно. Максимальные унитарные подгруппы $Z \subset O(n, 1)$ и $H \subset U(n, 1)$ – это соответственно группы матриц вида

$$z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\gamma^* & e & 0 \\ -\frac{\gamma\gamma^*}{2} & \gamma & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad \text{и} \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -z^* & e & 0 \\ it - \frac{zz^*}{2} & z & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{C}^{n-1},$$

где e – единичная матрица порядка $n-1$, $\gamma\gamma^* = \gamma_1^2 + \dots + \gamma_{n-1}^2$, $zz^* = |z_1|^2 + \dots + |z_{n-1}|^2$.

Элементы из H удобно представлять в виде пар (t, z) , $t \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}^{n-1}$, с законом умножения

$$(t_1, z_1)(t_2, z_2) = (t_1 + t_2 - \operatorname{Im}(z_1 z_2^*), z_1 + z_2).$$

Нормализатором этих подгрупп является подгруппа P нижних клеточно треугольных матриц – максимальная параболическая подгруппа. Существенно, что любая группа $O(n, 1)$ или $U(n, 1)$ алгебраически порождена элементами подгруппы P и одним элементом

$$s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & e & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому представления групп $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$ вполне определяются операторами, отвечающими элементам подгруппы P и этому элементу s .

Группа P является полупрямым произведением $P = Z \rtimes D$ и $P = H \rtimes D$ соответственно, где D – подгруппа клеточно диагональных матриц вида

$$\begin{aligned} d &= \operatorname{diag}(\epsilon^{-1}, u, \epsilon), \quad \epsilon \in \mathbb{R}^*, \quad u \in O(n-1), \quad \text{в случае } O(n, 1), \\ d &= \operatorname{diag}(\bar{\epsilon}^{-1}, u, \epsilon), \quad \epsilon \in \mathbb{C}^*, \quad u \in U(n-1), \quad \text{в случае } U(n, 1). \end{aligned}$$

Подгруппа D представима в виде прямого произведения: $D = D_0 \times D_1$, где D_0 – максимальная компактная подгруппа группы D . В случае $U(n, 1)$ D_0 есть подгруппа клеточно диагональных матриц $d = \operatorname{diag}(\epsilon, u, \bar{\epsilon})$, $|\epsilon| = 1$, $u \in U(n-1)$, а $D_1 \cong \mathbb{R}_+^*$ – подгруппа клеточно диагональных матриц вида $d = \operatorname{diag}(r^{-1}, e, r)$, $r > 0$. В случае $O(n, 1)$ определения подгрупп D_0 и D_1 аналогичны.

Через P_0 обозначается подгруппа группы P коразмерности 1 , а именно, $P_0 = Z \rtimes D_0$ и $P_0 = H \rtimes D_0$ соответственно.

0.4. Различие в структурах представлений дополнительной серии и особых представлений групп $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$. Различие в структурах представлений групп $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$ заложено в структуре их максимальных унитарных подгрупп Z и H соответственно.

Подгруппа $Z \subset O(n, 1)$ коммутативна и изоморфна аддитивной группе $\mathbb{R}^{n-1}$; таким образом, все ее неприводимые представления одномерны. Поэтому в случае $O(n, 1)$ существует модель представлений, в которой операторы, отвечающие унитарной подгруппе, действуют как мультипликаторы. Мы называем ее коммутативной моделью, связанной с унитарной подгруппой.

Подгруппа $H \subset U(n, 1)$ изоморфна группе Гейзенберга размерности $2n-1$, а потому она обладает однопараметрическим семейством бесконечномерных

неприводимых унитарных представлений. Аналогом коммутативной модели для $O(n, 1)$ является в этом случае прямой интеграл пространств, кратных неприводимым бесконечномерным подпространствам группы Гейзенберга. Тем самым теория дополнительных и особых представлений группы $U(n, 1)$ объединяется с теорией представлений группы Гейзенберга.

Отметим, что подгруппа Гейзенберга $H \subset U(n, 1)$ обладает, в отличие от максимальной унипотентной подгруппы группы $O(n, 1)$, следующим замечательным свойством. Любое ее бесконечномерное неприводимое унитарное представление продолжается, и притом единственным образом, до унитарного представления подгруппы $P_0 \subset P$ коразмерности 1: $P = P_0 \ltimes D_1$, $D_1 \cong \mathbb{R}_+^*$.

Известно, что группы $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$ алгебраически порождены элементами подгруппы P и одним элементом s порядка 2. Поэтому, если пространство унитарного представления группы $U(n, 1)$ разложено в прямой интеграл бесконечномерных подпространств, инвариантных и неприводимых относительно подгруппы Гейзенберга H , то для описания этого представления достаточно указать только действие операторов однопараметрической подгруппы D_1 и оператора, отвечающего элементу s .

0.5. Ограничения представлений групп $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$ на максимальные компактные и параболические подгруппы. Различие между $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$ проявляется и в ограничениях дополнительных и особых представлений на максимальную компактную подгруппу K и на максимальную параболическую подгруппу P .

В обоих случаях ограничения на K представлений дополнительной серии попарно эквивалентны и содержат единичное представление с кратностью один; спектр этих ограничений является простым только в случае $O(n, 1)$. При переходе к особым представлениям в случае $O(n, 1)$ выпадает единичное представление, а в случае $U(n, 1)$, $n > 1$, – кроме единичного, также некоторое бесконечномерное представление группы K . Каждое из оставшихся неприводимых представлений группы K входит с кратностью один в разложение одного из двух особых представлений.

В обоих случаях ограничения на P всех представлений дополнительной серии эквивалентны одному и тому же представлению группы P , индуцированному единичным представлением ее клеточно диагональной подгруппы.

В случае $O(n, 1)$, $n > 2$, это представление группы P неприводимо и эквивалентно ограничению на P особого представления. Таким образом, на подгруппе P эти представления совпадают. На всей группе $O(n, 1)$ они различаются действиями только одного оператора T_s .

В случае $U(n, 1)$ это представление группы P разлагается в прямую сумму попарно неэквивалентных неприводимых представлений. Ограничения на P двух особых представлений неприводимы и входят в это разложение в качестве двух прямых слагаемых.

Отметим различие между ограничениями на подгруппу Гейзенберга H представлений дополнительной серии и особых представлений группы $U(n, 1)$.

В разложение каждого представления дополнительной серии каждое бесконечномерное представление группы Гейзенберга входит с бесконечной кратностью.

Сумма двух особых представлений группы $U(n, 1)$ разлагается в прямой интеграл всех попарно неэквивалентных представлений группы Гейзенберга.

В оставшейся части введения мы кратко излагаем основные результаты статьи.

0.6. Реализация представлений дополнительной серии и особого представления для группы $O(n, 1)$. Параграф 2 посвящен описанию 6 моделей представлений дополнительной серии и 6 моделей особого представления группы $O(n, 1)$, различающихся между собой выбором системы координат, функционального пространства и концов интервала, отвечающего дополнительной серии.

Более точно, инвариантный билинейный функционал, определяющий гильбертово пространство действия дополнительной серии T^λ , может быть задан при любых значениях параметра $\lambda \in [0, n - 1]$. При этом значения параметра λ и $(n - 1) - \lambda$ (отличным от концов интервала) соответствуют эквивалентные представления дополнительной серии T^λ и $T^{n-1-\lambda}$; реализации их различны.

Это различие в реализации представлений T^λ и $T^{n-1-\lambda}$ особенно наглядно при сравнении случаев $\lambda = 0$ и $\lambda = n - 1$, когда они становятся приводимыми и неэквивалентными. Исходя из T^0 и T^{n-1} , можно получить две модели единственного особого неприводимого представления группы $O(n, 1)$. Эти модели различны. А именно, как уже отмечалось, при $\lambda = 0$ особое представление реализуется в инвариантном подпространстве коразмерности 1, а при $\lambda = n - 1$ – в факторпространстве по одномерному инвариантному подпространству.

Реализация представлений зависит также от выбора системы координат на сфере $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. В модели A представлений используются сферические координаты, а в модели B – локальные координаты сферы с выколотой точкой, задающие биекцию $\mathbb{R}^{n-1}$ и унитарной подгруппы Z .

Таким образом, мы получаем 4 модели для каждого представления дополнительной серии и 4 модели для особого представления группы $O(n, 1)$. Две из этих 4 моделей особого представления получаются при $\lambda = 0$, а две другие – при $\lambda = n - 1$.

Кроме того, возможен переход к преобразованию Фурье в пространстве представления модели B , реализованного в локальных координатах. При этом переходе операторы, отвечающие унитарной подгруппе Z , будут действовать как мультипликаторы, и мы получаем еще 2 модели для представлений группы $O(n, 1)$ (модели C , или коммутативные модели), которые особенно важны в применении к представлениям группы токов $O(n, 1)^X$ [21], [22].

В частности, эта реализация удобна для явной формулы нетривиального 1-коцикла $b: O(n, 1) \rightarrow L^0$, связанного с особым представлением (см. п. 2.7).

В коммутативной модели при $\lambda = 0$ этот 1-коцикл задается формулой

$$b(g) = T_g f - f,$$

где

$$f = |\xi|^{-\frac{1-n}{2}} K_{\frac{1-n}{2}}(\sqrt{2}|\xi|).$$

Здесь $K_\rho(x)$ – функция Бесселя (ξ – не принадлежащий L^0 вектор, инвариантный относительно максимальной компактной подгруппы K группы $O(n, 1)$).

В частности,

$$f = e^{-\sqrt{2}|\xi|} \quad \text{при} \quad n = 2.$$

Для каждой модели дополнительной серии описаны явно сферическая функция и вакуумный вектор ξ , т.е. вектор в пространстве представления, инвариантный относительно максимальной компактной подгруппы. Описаны также вложения пространств дополнительной серии в их тензорное произведение. На этом вложении основана одна из конструкций представления группы токов $O(n, 1)^X$.

0.7. Конструкция неприводимого представления подгруппы $P \subset U(n, 1)$. Параграфы 3–6 посвящены представлениям группы $U(n, 1)$ и ее параболической подгруппы P .

Мы начинаем в § 3 с построения класса унитарных представлений группы P , основываясь на конструкции неприводимых представлений группы Гейзенберга H . Известно, что каждое бесконечномерное унитарное представление группы H задается вещественным параметром $\rho \neq 0$ (постоянная Планка). Рассматривается баргмановская реализация этих представлений. В этой реализации представление индекса $\rho > 0$ задается в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}(\rho)$ целых аналитических функций $f(z)$ на $\mathbb{C}^{n-1}$ с нормой

$$\|f\|^2 = |\rho|^{n-1} \int_{\mathbb{C}^{n-1}} |f(z)|^2 e^{-|\rho||z|^2} d\mu(z), \quad (0.1)$$

где $|z|^2 = zz^* = |z_1|^2 + \dots + |z_{n-1}|^2$, $d\mu(z)$ – лебегова мера на $\mathbb{C}^{n-1}$. Операторы представления, отвечающие элементам $h = (t_0, z_0) \in H$, имеют вид:

$$T_h f(z) = e^{\rho(it_0 - \frac{1}{2}|z_0|^2 - z_0 z_0^*)} f(z + z_0). \quad (0.2)$$

Аналогично, представление индекса $\rho < 0$ задается в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}(\rho)$ целых антианалитических функций на $\mathbb{C}^{n-1}$ с нормой (0.1). Операторы представления, отвечающие элементам $h = (t_0, z_0) \in H$, имеют вид

$$T_h f(z) = e^{i\rho t_0 - |\rho|(\frac{1}{2}|z_0|^2 + z_0 z_0^*)} f(z + z_0). \quad (0.3)$$

Каждое из этих представлений продолжается до унитарного представления группы $P_0 = H \rtimes D_0$. Именно, операторы T_d , отвечающие элементам $d = (\epsilon, u, \epsilon) \in D_0$, задаются при любом ρ формулами

$$T_d f(z) = f(\epsilon z u). \quad (0.4)$$

Для построения унитарных представлений группы P мы связываем с каждым $\lambda \geq 0$ прямые интегралы пространств $\mathcal{H}(\rho)$:

$$\mathcal{H}_+^\lambda = \int_0^\infty \mathcal{H}(\rho) \rho^{\lambda-1} d\rho \quad \text{и} \quad \mathcal{H}_-^\lambda = \int_{-\infty}^0 \mathcal{H}(\rho) |\rho|^{\lambda-1} d\rho.$$

Представления группы P_0 в этих пространствах продолжаются до унитарных представлений группы $P = P_0 \rtimes D_1$. Именно, операторы T_d , отвечающие элементам $d = \text{diag}(r^{-1}, e, r) \in D_1$, имеют вид

$$T_d f(\rho, z) = f(r^2 \rho, r^{-1} z) r^\lambda. \quad (0.5)$$

Так определенные представления группы P в пространствах $\mathcal{H}_+^\lambda$ и, соответственно, в пространствах $\mathcal{H}_-^\lambda$ неприводимы и попарно эквивалентны; представления в $\mathcal{H}_+^\lambda$ и $\mathcal{H}_-^\lambda$ не эквивалентны.

В § 6 показано, что эти представления группы P продолжаются до особых представлений группы $U(n, 1)$.

0.8. Представления группы P в пространствах $H_\pm^\lambda$. В § 4 построено семейство приводимых унитарных представлений подгруппы $P \subset U(n, 1)$ в пространствах H_+^λ и H_-^λ . Как показано затем в § 5, представления подгруппы P в пространствах $H^\lambda = H_+^\lambda \oplus H_-^\lambda$ можно продолжить до (неприводимых) представлений дополнительной серии всей группы $U(n, 1)$.

Пространства $H_\pm^\lambda$ определяются как прямые интегралы

$$H_+^\lambda = \int_0^\infty H(\rho) \rho^{\lambda-1} d\rho \quad \text{и} \quad H_-^\lambda = \int_{-\infty}^0 H(\rho) |\rho|^{\lambda-1} d\rho,$$

где $H(\rho)$ – гильбертово пространство *всех* функций $f(z)$ на $\mathbb{C}^{n-1}$ с нормой (0.1).

На $H(\rho)$ действует унитарное представление группы P_0 , заданное при $\rho > 0$ формулами (0.2) и (0.4): а при $\rho < 0$ – формулами (0.3) и (0.4).

Пространство $H(\rho)$ разлагается в прямую сумму инвариантных неприводимых относительно P_0 попарно неэквивалентных подпространств

$$H(\rho) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} H_m(\rho),$$

где $H_m(\rho)$ при $\rho > 0$ и $\rho < 0$ циклически порождено соответственно векторами $\bar{z}^k = \bar{z}_1^{k_1} \cdots \bar{z}_{n-1}^{k_{n-1}}$ и $z^k = z_1^{k_1} \cdots z_{n-1}^{k_{n-1}}$, где $k_1 + \cdots + k_{n-1} = m$. В частности, $H_0(\rho) = \mathcal{H}(\rho)$.

Представление подгруппы Гейзенберга на каждом подпространстве $H_m(\rho)$ кратно неприводимому представлению индекса ρ . Эта кратность равна числу разбиений m в сумму $n - 1$ целых неотрицательных слагаемых.

В каждом пространстве $H(\rho)$ имеется ортогональный базис $\{f_{pq} \mid p, q \in \mathbb{Z}_+^{n-1}\}$, согласованный с действием группы Гейзенберга H . При любом фиксированном p векторы f_{pq} , $q \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$, образуют ортогональный базис в подпространстве неприводимого представления группы H . В этом базисе описаны матричные элементы представлений группы P_0 в том же подпространстве.

Представления группы P_0 в подпространствах $H_\pm^\lambda$ продолжаются по формуле (0.5) до унитарных представлений группы P . Эти пространства приводимы относительно P и разлагаются в прямую сумму неприводимых попарно неэквивалентных относительно группы P подпространств:

$$H_\pm^\lambda = \bigoplus_{m=0}^{\infty} (H_\pm^\lambda)_m,$$

где

$$(H_+^\lambda)_m = \int_0^\infty H_m(\rho) \rho^{\lambda-1} d\rho \quad \text{и} \quad (H_-^\lambda)_m = \int_{-\infty}^0 H_m(\rho) |\rho|^{\lambda-1} d\rho.$$

0.9. Модели представлений дополнительной серии группы $U(n, 1)$.

В § 5 по аналогии со случаем группы $O(n, 1)$ строятся 6 различных моделей представлений дополнительной серии группы $U(n, 1)$. Мы начинаем с известной реализации этих представлений в пространстве функций на единичной унитарной сфере $S \subset \mathbb{C}^n$ (модель A), а затем переходим к их реализации в пространстве функций на группе Гейзенберга H , т.е. в пространстве функций $\varphi(t, z)$ на $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^{n-1}$ (модель B).

В следующей модели (модель C) дополнительные представления группы $U(n, 1)$ реализуются как прямые интегралы представлений, кратных неприводимым представлениям группы Гейзенберга. Они получаются переходом от функций $\varphi(t, z)$ в модели B к функциям $\psi(\rho, z)$ на $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^{n-1}$, заданным интегралом

$$\psi(\rho, z) = |\rho|^{-n+1} e^{\frac{i\rho}{2}|z|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\rho t} \varphi(t, z) dt.$$

В этой модели пространство L^λ представления дополнительной серии является прямым интегралом подпространств $L(\rho)$, инвариантных относительно подгруппы P_0 :

$$L^\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} L(\rho) |\rho|^{\lambda-1} d\rho,$$

где $L(\rho)$ – пространство функций $\psi(z)$ на $\mathbb{C}^{n-1}$ с нормой

$$\|\psi\|_\rho^2 = |\rho|^{2n-2} \int_{\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^{n-1}} R_\lambda(\rho, z_1, z_2) \psi(\rho, z) \overline{\psi(\rho, z)} d\mu(z_1) d\mu(z_2).$$

Явное выражение функции R_λ через функцию Бесселя $K_{\frac{1-\lambda}{2}}(t)$ см. в п. 5.4.

Операторы представления подгруппы P_0 в пространстве $L(\rho)$ задаются теми же формулами, что и для пространства $H(\rho)$, определенного в п. 0.8.

Общее число моделей каждого представления дополнительной серии группы $U(n, 1)$ равно не 3, а 6, поскольку представления в пространствах L^λ и $L^{2n-\lambda}$ эквивалентны.

Сформулируем основной результат § 5. Доказано, что представления подгруппы P_0 в пространствах $L(\rho)$ и $H(\rho)$ эквивалентны. Таким образом, существует изоморфизм гильбертовых пространств

$$J: H(\rho) \rightarrow L(\rho),$$

коммутирующий с операторами представления группы P_0 . Так как $H(\rho) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} H_m(\rho)$, где $H_m(\rho)$ – инвариантные относительно группы P_0 неприводимые попарно неэквивалентные подпространства, то на каждом из этих подпространств оператор J кратен единичному оператору: $J = c_m \text{id}$ на $H_m(\rho)$. (В статье множитель c_m явно вычисляется.)

Изоморфизм $J: H(\rho) \rightarrow L(\rho)$ индуцирует изоморфизм гильбертовых пространств

$$H^\lambda \rightarrow L^\lambda,$$

коммутирующий с действием всей группы P (а не только подгруппы $P_0 \subset P$).

В силу изоморфизма $H^\lambda \rightarrow L^\lambda$, действие группы $U(n, 1)$ можно перенести с пространства L^λ на пространство H^λ .

Таким образом, пространство H^λ можно рассматривать как новую модель пространства представления дополнительной серии.

В этой новой модели операторы представления подгруппы P задаются теми же формулами, что и на пространстве L^λ . Поэтому для описания представления группы $U(n, 1)$ в новой модели достаточно знать формулу только для оператора T_s .

0.10. Модели особых представлений группы $U(n, 1)$. В § 6 построены 6 моделей особых представлений группы $U(n, 1)$. Они получаются из моделей представлений дополнительной серии предельными переходами при $\lambda \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow 2n$.

О структуре пространств L^0 и L^{2n} , предельных к пространствам L^λ дополнительной серии, уже говорилось в п. 0.2.

Опишем основную модель (модель C , $\lambda = 0$).

Особые представления группы $U(n, 1)$ реализуются в пространствах

$$\mathcal{L}_+ = \int_0^\infty \mathcal{L}(\rho) \rho^{-1} d\rho, \quad \mathcal{L}_- = \int_{-\infty}^0 \mathcal{L}(\rho) |\rho|^{-1} d\rho.$$

Здесь $\mathcal{L}(\rho)$ – пространство функций $\psi(z)$ на $\mathbb{C}^{n-1}$ с нормой

$$\begin{aligned} \|\psi\|_\rho^2 &= |\rho|^{2n-2} \int_{\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^{n-1}} e^{|\rho|(a_\rho(z_1, z_2) - |z_1|^2 - |z_2|^2)} \psi(z_1) \overline{\psi(z_2)} d\mu(z_1) d\mu(z_2), \\ a_\rho(z_1, z_2) &= \begin{cases} z_1 z_2^* & \text{при } \rho > 0 \\ z_2 z_1^* & \text{при } \rho < 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (0.6)$$

факторизованное по подпространству функций с нормой 0.

Пространства $\mathcal{L}^\rho$ неприводимы и попарно неэквивалентны относительно действия группы Гейзенберга H . Тем самым, особые представления группы $U(n, 1)$ разлагаются в прямые интегралы неприводимых попарно неэквивалентных представлений группы Гейзенберга.

Имеет место еще одна реализация особых представлений группы $U(n, 1)$. Именно, доказано, что существует изоморфизм гильбертовых пространств

$$\mathcal{H}_\pm^0 \rightarrow \mathcal{L}_\pm,$$

коммутирующий с действием подгруппы P , где $\mathcal{H}_\pm^0$ – пространства, определенные в п. 0.7 выше.

В силу этого изоморфизма, действие группы $U(n, 1)$ можно перенести с пространств $\mathcal{L}_\pm$ на пространства $\mathcal{H}_\pm^0$.

Реализации особых представлений группы $U(n, 1)$ в пространствах $\mathcal{H}_\pm^0$ мы называем их баргмановскими моделями. В этих моделях действие операторов подгруппы P определено изначально, и для полного описания представления группы $U(n, 1)$ достаточно указать только действие оператора T_s .

Установлено, что в случае $\mathcal{H}_+^0$ оператор T_s действует на функции вида $\rho^{|k|} e^{-a\rho} z^k$, где $z^k = z_1^{k_1} \cdots z_{n-1}^{k_{n-1}}$, $|k| = k_1 + \cdots + k_{n-1}$ и $\operatorname{Re} a > 0$, по формуле

$$T_s(\rho^{|k|} e^{-a\rho} z^k) = a^{-|k|} \rho^{|k|} e^{-\frac{\rho}{a}} z^k.$$

В частности, $T_s(e^{-a\rho}) = e^{-\frac{\rho}{a}}$. Аналогично определяется T_s и на пространстве $\mathcal{H}_-^0$.

В баргмановской модели нетривиальные 1-коциклы $b_\pm: U(n, 1) \rightarrow \mathcal{H}_\pm^0$ задаются формулой

$$b_\pm(g) = T_g \xi_\pm - \xi_\pm, \quad \xi_\pm = \chi_\pm(\rho) e^{-|\rho|},$$

где $\chi_\pm$ – характеристические функции полупрямых $\rho > 0$ и $\rho < 0$ соответственно. Поскольку $b_\pm(g) = 0$ на максимальной компактной подгруппе, то эта функция однозначно определяется своим ограничением на подгруппу P_1 – одномерное расширение группы Гейзенберга H .

0.11. Канонические представления. В конструкции особых представлений групп $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$ дополнительную серию можно заменить другой однопараметрической серией унитарных представлений – каноническими представлениями.

Канонические представления были впервые введены в [14], [20] для построения представлений групп токов $O(n, 1)^X$ и $U(n, 1)^X$.

В добавлении 1 сначала дается общее определение канонических представлений для произвольной локально компактной группы G , затем явно строятся канонические представления групп $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$ и устанавливается их связь с представлениями дополнительной серии и особыми представлениями.

В добавлении 2 приведен вывод некоторых формул, использованных в статье.

§ 1. Группы $O(n, 1)$, $U(n, 1)$ и некоторые их подгруппы

1.1. Группы $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$. Через $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$ обозначаются группы всех линейных преобразований в $\mathbb{R}^{n+1}$ и $\mathbb{C}^{n+1}$, сохраняющих соответственно квадратичную и эрмитову формы сигнатуры $(n, 1)$; этим условием группы $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$ определены однозначно, с точностью до изоморфизма. В дальнейшем используются две матричные модели этих групп, определяемые заданием соответствующих квадратичной и эрмитовой форм.

1.1.1. Модель a . Квадратичная и эрмитова формы имеют соответственно вид

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2, \\ |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 - |x_{n+1}|^2.$$

В этой модели элементы групп задаются в форме клеточных матриц

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

где диагональные клетки α, δ – матрицы порядков n и 1 соответственно. В этих обозначениях $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$ – группы соответственно вещественных и комплексных матриц g порядка $n + 1$, удовлетворяющих условию

$$g\sigma g^* = \sigma, \quad \text{где} \quad \sigma = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

т.е.

$$\alpha\alpha^* - \beta\beta^* = e, \quad \alpha\gamma^* - \beta\delta^* = 0, \quad \delta\delta^* - \gamma\gamma^* = 1.$$

Здесь e – единичная матрица порядка n и $*$ – операция сопряжения, т.е. $\alpha^* = \alpha^\top$ в вещественном случае и $\alpha^* = \bar{\alpha}^\top$ в комплексном случае.

1.1.2. *Модель b.* Квадратичная и эрмитова формы имеют соответственно вид

$$2x_1x_{n+1} + x_2^2 + \dots + x_n^2, \\ x_1\bar{x}_{n+1} + x_{n+1}\bar{x}_1 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2.$$

Элементы групп в этой модели задаются в форме клеточных матриц

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix},$$

где диагональные клетки – матрицы порядков $1, n - 1$ и 1 соответственно. В этих обозначениях $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$ – группы соответственно вещественных и комплексных матриц g порядка $n + 1$, удовлетворяющих условию

$$gsg^* = s, \quad \text{где} \quad s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & e & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

e – единичная матрица порядка $n - 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Модель a удобна для описания максимальной компактной подгруппы в $U(n, 1)$. Именно, последняя в модели a состоит из клеточно диагональных матриц $g = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix}$, где $u \in O(n)$, $\epsilon = \pm 1$ в случае $O(n, 1)$ и $u \in U(n)$, $\epsilon \in \mathbb{C}^*$ в случае $U(n, 1)$. Модель b , используемая в основном в этой статье, удобна для описания унитарной подгруппы.

1.1.3. *Переход от модели a к модели b и обратно.* Заметим, что матрицы σ и s связаны соотношением

$$a^{-1}sa = \sigma, \quad \text{где} \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & e & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что переход от модели a к модели b сводится к преобразованию $g \rightarrow aga^{-1}$. Приведем явные формулы перехода. Для этого представим клетки матриц $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ модели a в виде

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma = (\gamma_1, \gamma_2),$$

где α_{22} – матрица порядка $n-1$, β_2, γ_2 – соответственно столбец и строка длины $n-1$. Тогда переход от модели a к модели b задается так:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\alpha_{11} + \delta - \beta_1 - \gamma_1) & \frac{\alpha_{12} - \gamma_2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}(\alpha_{11} - \delta + \beta_1 - \gamma_1) \\ \frac{\alpha_{21} - \beta_2}{\sqrt{2}} & \alpha_{22} & \frac{\alpha_{21} + \beta_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2}(\alpha_{11} - \delta - \beta_1 + \gamma_1) & \frac{\alpha_{12} + \gamma_2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}(\alpha_{11} + \delta + \beta_1 + \gamma_1) \end{pmatrix}.$$

Обратно, переход от модели b к модели a задается так:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

где

$$\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(g_{11} + g_{33} + g_{13} + g_{31}) & \frac{g_{12} + g_{32}}{\sqrt{2}} \\ \frac{g_{21} + g_{23}}{\sqrt{2}} & g_{22} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-g_{11} + g_{33} + g_{13} - g_{31}) \\ \frac{-g_{21} + g_{23}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-g_{11} + g_{33} - g_{13} + g_{31}) & \frac{-g_{12} + g_{32}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \delta = \frac{1}{2}(g_{11} + g_{33} - g_{13} - g_{31}).$$

1.2. Подгруппы Z и H . Обозначим через $Z \subset O(n, 1)$ и $H \subset U(n, 1)$ подгруппы клеточных матриц в модели b :

$$z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\gamma^* & e & 0 \\ -\frac{\gamma\gamma^*}{2} & \gamma & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{R}^{n-1},$$

и

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -z^* & e & 0 \\ it - \frac{zz^*}{2} & z & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{C}^{n-1},$$

где e – единичная матрица порядка $n-1$. Эти группы являются максимальными унитарными подгруппами соответствующих групп. Первая из них изоморфна аддитивной группе $\mathbb{R}^{n-1}$, вторая есть группа Гейзенберга размерности $2n-1$.

Элементы из H будем представлять в виде пар $h = (t, z)$ или $h = (\zeta, z)$, где $\zeta = it - \frac{zz^*}{2}$. В этих обозначениях произведение элементов из H задается формулами:

$$(t, z)(t', z') = (t + t' - \text{Im}(zz'^*), z + z')$$

или

$$(\zeta, z)(\zeta', z') = (\zeta + \zeta' - zz'^*, z + z').$$

Здесь и в дальнейшем $zz'^* = z_1\bar{z}'_1 + \dots + z_{n-1}\bar{z}'_{n-1}$.

В соответствии с формулами перехода от одной модели к другой, в модели a подгруппа H состоит из клеточных матриц $h = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, где

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\zeta}{2} & \frac{z}{\sqrt{2}} \\ -\frac{z^*}{\sqrt{2}} & e \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} -\frac{\zeta}{2} \\ \frac{-z^*}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} \frac{\zeta}{2} & \frac{z}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \delta = 1 - \frac{\zeta}{2}. \quad (1.3)$$

1.3. Подгруппы D , D_0 и D_1 . Обозначим через D подгруппу клеточно диагональных матриц в модели b . Ее элементами являются все клеточно диагональные матрицы вида

$$\begin{aligned} d &= \text{diag}(\epsilon^{-1}, u, \epsilon), \quad \epsilon \in \mathbb{R}^*, \quad u \in O(n-1), \quad \text{в случае } O(n, 1), \\ d &= \text{diag}(\bar{\epsilon}^{-1}, u, \epsilon), \quad \epsilon \in \mathbb{C}^*, \quad u \in U(n-1), \quad \text{в случае } U(n, 1). \end{aligned}$$

Группа D разлагается в прямое произведение:

$$D = D_0 \times D_1,$$

где в случае $U(n, 1)$ $D_0 \cong U(1) \times U(n-1)$ – подгруппа клеточно диагональных матриц вида

$$d = \text{diag}(\epsilon, u, \epsilon), \quad \text{где } |\epsilon| = 1, \quad u \in U(n-1),$$

а $D_1 \cong \mathbb{R}_+^*$ – подгруппа клеточно диагональных матриц вида

$$d = \text{diag}(r^{-1}, e, r), \quad \text{где } r > 0.$$

Аналогично определяются D_0 и D_1 в случае группы $O(n, 1)$.

1.4. Подгруппы P , P_0 и P_1 . Обозначим через P нормализатор максимальной унитарной подгруппы, т.е. максимальную параболическую подгруппу. Очевидно, что в модели b подгруппа P совпадает с подгруппой всех нижних клеточно треугольных матриц и тем самым представима в виде полупрямого произведения

$$P = H \rtimes D.$$

Обозначим далее

$$P_0 = H \rtimes D_0, \quad P_1 = H \rtimes D_1.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. В модели b группы $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$ алгебраически порождаются элементами подгруппы P и элементом $s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & e & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В силу этого утверждения для описания представлений групп $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$ достаточно, кроме их ограничений на подгруппу P , задавать только оператор инволюции I , отвечающий элементу s .

Глава I. Представления группы $O(n, 1)$

§ 2. Модели неприводимых унитарных представлений дополнительной серии группы $O(n, 1)$ и ее особого представления

Каждое представление дополнительной серии задается вещественным числом λ из интервала $0 < \lambda < n-1$. Приведем описание трех моделей этих представлений.

2.1. Модель A : реализация в пространстве функций на единичной сфере $S \subset \mathbb{R}^n$. Единичная сфера:

$$S = \{\omega \in \mathbb{R}^n \mid |\omega|^2 \equiv \omega_1^2 + \dots + \omega_n^2 = 1\},$$

является однородным пространством группы $O(n, 1)$. Именно, если эта группа реализована в матричной модели a , то ее действие на S задается формулой

$$\omega g = (\omega\beta + \delta)^{-1} (\omega\alpha + \gamma) \quad \text{при} \quad g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Представление дополнительной серии номера λ действует в комплексном гильбертовом пространстве L^λ функций $f(\omega)$ на S с нормой

$$\|f\|^2 = \int_{S \times S} (1 - \langle \omega, \omega' \rangle)^{-\lambda} f(\omega) \overline{f(\omega')} d\omega d\omega', \quad (2.1)$$

где $\langle \omega, \omega' \rangle = \omega_1 \omega'_1 + \dots + \omega_n \omega'_n$, а $d\omega$ — инвариантная мера на S .

ЗАМЕЧАНИЕ. Разложив $(1 - \langle \omega, \omega' \rangle)^{-\lambda}$ в степенной ряд, можно представить норму также в следующем виде:

$$\|f\|^2 = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{\Gamma(\lambda + |k|)}{k!} \left| \int_S \omega^k f(\omega) d\omega \right|^2.$$

Здесь обозначено: $|k| = \sum k_i$, $k! = \prod k_i!$, $\omega^k = \prod \omega_i^{k_i}$.

Операторы представления T_g^λ , $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, действуют по формуле

$$T_g^\lambda f(\omega) = f(\omega g) |\omega\beta + \delta|^{1-n+\lambda}. \quad (2.2)$$

Их групповое свойство вытекает из следующего соотношения для функции $b(\omega, g) = |\omega\beta + \delta|$:

$$b(\omega, g_1 g_2) = b(\omega, g_1) b(\omega g_1, g_2) \quad \text{для любых} \quad g_1, g_2 \in O(n, 1)$$

(свойство 1-коцикла). Их унитарность следует из соотношений

$$1 - \langle \omega, \omega' \rangle = (1 - \langle \omega g, \omega' g \rangle) b(\omega, g) b(\omega', g)$$

и

$$\frac{d(\omega g)}{d\omega} = b^{1-n}(\omega, g) \quad \text{для любого} \quad g \in O(n, 1).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Представления T^λ и T^μ дополнительной серии группы $O(n, 1)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $\lambda + \mu = n - 1$ или $\lambda = \mu$.

Сплетающий оператор $R^\lambda: L^\lambda \rightarrow L^{n-1-\lambda}$ задается следующей формулой:

$$(R^\lambda f)(\omega) = \int_S (1 - \langle \omega, \omega' \rangle)^{-\lambda} f(\omega) d\omega'.$$

2.2. Модель В: реализация в пространстве функций на максимальной унипотентной подгруппе $Z \simeq \mathbb{R}^{n-1}$. Модель строится исходя из матричной реализации b группы $O(n, 1)$. Определим действие $z \rightarrow z\bar{g}$ группы $O(n, 1)$ на Z по формуле

$$z\bar{g} = z',$$

где $z' \in Z$ определяется из разложения $zg = b^+ z'$, b^+ – верхняя клеточно-треугольная матрица. В координатах $\gamma \in \mathbb{R}^{n-1}$ на Z и клеточных координатах g_{ij} на $O(n, 1)$ это действие задается следующей формулой:

$$\gamma\bar{g} = \left(-\frac{|\gamma|^2}{2} g_{13} + \gamma g_{23} + g_{33} \right)^{-1} \left(-\frac{|\gamma|^2}{2} g_{12} + \gamma g_{22} + g_{32} \right), \quad (2.3)$$

где g_{ij} – элементы клеточной матрицы $g \in O(n, 1)$. В частности,

$$\begin{aligned} \gamma\bar{g} &= \gamma + \gamma_0 \quad \text{при} \quad g = z(\gamma_0) \in Z; \\ \gamma\bar{g} &= \epsilon^{-1} \gamma u \quad \text{при} \quad g = \text{diag}(\epsilon^{-1}, u, \epsilon); \\ \gamma\bar{s} &= -\frac{2\gamma}{|\gamma|^2}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Преобразование $\gamma \rightarrow \gamma\bar{g}$ имеет следующую геометрическую интерпретацию. Пусть Y – многообразие одномерных подпространств в $\mathbb{R}^{n+1}$, принадлежащих световому конусу

$$2x_1 x_{n+1} + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0.$$

Группа $O(n, 1)$ как группа линейных преобразований в $\mathbb{R}^{n+1}$ транзитивно действует на Y . Для обозначения этого действия мы используем правую запись: $y \rightarrow y\bar{g}$. Отметим, что в другой интерпретации Y есть абсолют n -мерного пространства Лобачевского, реализованного как совокупность одномерных подпространств в $\mathbb{R}^{n+1}$, лежащих внутри светового конуса.

Реализуем $Y \setminus y_0$, где $y_0 = (1, 0, \dots, 0)$, как сечение конуса гиперплоскостью $x_{n+1} = 1$, т.е. как множество точек в $\mathbb{R}^{n+1}$ вида

$$\left(-\frac{|\gamma|^2}{2}, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}, 1 \right),$$

где $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ и $|\gamma| = (\sum \gamma_i^2)^{1/2}$. Согласно этой реализации, определена естественная биекция $Y \setminus y_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$, а потому действие группы G на Y индуцирует ее действие $\gamma \rightarrow \gamma\bar{g}$ на пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$. Подчеркнем, что это действие не является линейным.

Определим далее функцию $\beta(\gamma, g)$ по формуле

$$\beta(\gamma, g) = \left| -\frac{|\gamma|^2}{2} g_{13} + \gamma g_{23} + g_{33} \right|, \quad \gamma \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad g \in G. \quad (2.4)$$

В частности,

$$\begin{aligned} \beta(\gamma, g) &= 1 \quad \text{при} \quad g \in Z; \\ \beta(\gamma, g) &= |\epsilon| \quad \text{при} \quad g = \text{diag}(\epsilon^{-1}, u, \epsilon); \\ \beta(\gamma, s) &= \frac{|\gamma|^2}{2}. \end{aligned}$$

Из определения следует, что $\beta(\gamma, g)$ является 1-коциклом группы $O(n, 1)$ со значениями в $\mathbb{R}^*$, т.е.

$$\beta(\gamma, g_1 g_2) = \beta(\gamma, g_1) \beta(\gamma \bar{g}_1, g_2) \quad \text{для любых } \gamma \in \mathbb{R}^{n-1} \text{ и } g_1, g_2 \in G. \quad (2.5)$$

В модели B представление дополнительной серии действует в комплексном гильбертовом пространстве функций на $Z \cong \mathbb{R}^{n-1}$ со скалярным произведением

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1}} |\gamma' - \gamma''|^{-2\lambda} f_1(\gamma') \overline{f_2(\gamma'')} d\gamma' d\gamma'', \quad (2.6)$$

где $d\gamma = d\gamma_1 \cdots d\gamma_{n-1}$ – лебегова мера на $\mathbb{R}^{n-1}$. Операторы представления имеют вид

$$T_g^\lambda f(\gamma) = f(\gamma \bar{g}) \beta^{1-n+\lambda}(\gamma, g), \quad (2.7)$$

где $\gamma \bar{g}$ и $\beta(\gamma, g)$ задаются соответственно равенствами (2.3) и (2.4). В частности,

$$T_z^\lambda f(\gamma) = f(\gamma + \gamma_0) \quad \text{при } z = z(\gamma_0) \in Z; \quad (2.8)$$

$$T_d^\lambda f(\gamma) = |\epsilon|^{1-n+\lambda} f(\epsilon^{-1} \gamma u) \quad \text{при } d = \text{diag}(\epsilon^{-1}, u, \epsilon); \quad (2.9)$$

$$T_s^\lambda f(\gamma) = f\left(-\frac{2\gamma}{|\gamma|^2}\right) \left(\frac{|\gamma|^2}{2}\right)^{1-n+\lambda} \quad \text{при } s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & e & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Групповое свойство этих операторов следует непосредственно из свойства (2.5) функции $\beta(\gamma, g)$, а унитарность – из соотношений

$$d(\gamma \bar{g}) = \beta^{1-n}(\gamma, g) d\gamma \quad \text{для любого } g \in O(n, 1), \quad (2.11)$$

где $d\gamma = d\gamma_1 \cdots d\gamma_{n-1}$ и

$$|\gamma - \gamma'|^2 = |\gamma \bar{g} - \gamma' \bar{g}|^2 \beta(\gamma, g) \beta(\gamma', g) \quad (2.12)$$

для любых $\gamma, \gamma' \in \mathbb{R}^{n-1}$ и $g \in O(n, 1)$.

Соотношения (2.11) и (2.12) легко проверяются для элементов из Z , D и для элемента s . Отсюда и из свойства 1-коцикла $\beta(\gamma, g)$ следует, что они верны для любого элемента $g \in O(n, 1)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Функции $F(\omega)$ на S и $f(\gamma)$ на $\mathbb{R}^{n-1}$ в моделях A и B связаны соотношением*

$$f(\omega) = \left(1 + \frac{|\gamma|^2}{2}\right)^{\lambda+1-n} F(\tau\gamma), \quad (2.13)$$

где $\tau\gamma = \omega$ задается равенствами

$$\omega_1 = \frac{1 - |\gamma|^2/2}{1 + |\gamma|^2/2}, \quad \omega_i = \frac{2^{1/2}\gamma}{1 + |\gamma|^2/2}, \quad i = 2, \dots, n.$$

2.3. Коммутативная модель представления дополнительной серии.

Опишем новую модель представления T^λ дополнительной серии группы $O(n, 1)$, в которой операторы подгруппы Z действуют умножением на функции. Мы называем ее коммутативной моделью относительно подгруппы Z .

Эта модель получается переходом от функций $f(\gamma)$ в модели B к их преобразованию Фурье

$$\varphi(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i\langle \xi, \gamma \rangle} f(\gamma) d\gamma.$$

ТЕОРЕМА 2.1. *Коммутативная модель представления T^λ дополнительной серии реализуется в гильбертовом пространстве L^λ комплекснозначных функций на $\mathbb{R}^{n-1}$ с нормой*

$$\|\varphi\|^2 = \frac{2^{-2\lambda}\Gamma((n-1)/2 - \lambda)}{\Gamma(\lambda)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\xi|^{1-n+2\lambda} |\varphi(\xi)|^2 d\xi, \quad |\xi| = \langle \xi, \xi \rangle^{1/2}. \quad (2.14)$$

Операторы представления задаются формулой

$$T_g^\lambda \varphi(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} A^\lambda(\xi, \xi', g) \varphi(\xi') d\xi', \quad (2.15)$$

где

$$A^\lambda(\xi, \xi', g) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(\langle \xi, \gamma \rangle - \langle \xi', \gamma \bar{g} \rangle)} \beta^{1-n+\lambda}(\gamma, g) d\gamma. \quad (2.16)$$

В частности,

$$\begin{aligned} T_z^\lambda \varphi(\xi) &= e^{-i\langle \xi, \gamma_0 \rangle} \varphi(\xi) \quad \text{при } z = z(\gamma_0) \in Z; \\ T_d^\lambda \varphi(\xi) &= |\epsilon|^\lambda \varphi(\epsilon \xi u) \quad \text{при } d = \text{diag}(\epsilon^{-1}, u, \epsilon). \end{aligned} \quad (2.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В новой модели скалярный квадрат задается формулой

$$\|\varphi\|^2 = \int_{\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1}} R(\xi, \xi') \varphi(\xi) \overline{\varphi(\xi')} d\xi d\xi',$$

где

$$\begin{aligned} R(\xi, \xi') &= \int_{\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1}} |\gamma - \gamma'|^{-2\lambda} e^{i(\langle \xi, \gamma \rangle - \langle \xi', \gamma' \rangle)} d\gamma d\gamma' \\ &= \delta(\xi - \xi') \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\gamma|^{-2\lambda} e^{i\langle \xi, \gamma \rangle} d\gamma. \end{aligned}$$

Равенство (2.14) вытекает из следующего соотношения:

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\gamma|^{-2\lambda} e^{i\langle \xi, \gamma \rangle} d\gamma = c_n \frac{2^{-2\lambda}\Gamma((n-1)/2 - \lambda)}{\Gamma(\lambda)} |\xi|^{2\lambda-n+1}. \quad (2.18)$$

где коэффициент c_n зависит только от n . Вывод (2.18) см. в добавлении 2 (п. 8.1).

Формулы для операторов представления в новой модели получаются непосредственно из формул для этих операторов в исходной модели переходом от функций $f(\gamma)$ к их преобразованию Фурье. Теорема 2.1 доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. В коммутативной модели представления T^λ ядро $A(\xi, \xi') = A^\lambda(\xi, \xi', s)$ оператора T_s^λ , отвечающего элементу $s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & e & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, имеет следующий вид:

$$A(\xi, \xi') = 2^{1-\lambda} \int_0^\infty \cos\left(\xi x + \frac{2\xi'}{x}\right) x^{2\lambda-2} dx \quad \text{при } n = 2, \quad (2.19)$$

$$A(\xi, \xi') = c_n 2^{-\lambda} \int_0^\infty r^{2\lambda-n} |r\xi + 2r^{-1}\xi'|^{-\frac{n-3}{2}} J_{\frac{n-3}{2}}(|r\xi + 2r^{-1}\xi'|) dr \quad \text{при } n = 2, \quad (2.20)$$

где $J_{\frac{n-3}{2}}$ – функция Бесселя первого рода.

В самом деле, поскольку $\gamma\bar{s} = \frac{-2\gamma}{|\gamma|^2}$ и $\beta(\gamma, s) = \frac{|\gamma|^2}{2}$, то из (2.16) следует:

$$A(\xi, \xi') = 2^{n-1-\lambda} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(\langle \xi, \gamma \rangle + \langle \xi', 2\gamma/|\gamma|^2 \rangle)} |\gamma|^{2-2n+2\lambda} d\gamma.$$

При $n = 2$ отсюда непосредственно следует (2.19). При $n > 2$, перейдя к сферическим координатам, получим:

$$A(\xi, \xi') = c_n 2^{-\lambda} \int_0^\infty \int_0^\pi e^{i|r\xi + 2r^{-1}\xi'| \cos \varphi} r^{2\lambda-n} (\sin \varphi)^{n-3} d\varphi dr.$$

Интегрируя по φ , получаем (2.20).

ЗАМЕЧАНИЕ. При $n = 2$ ядро $A(\xi, \xi')$ можно выразить через функции Бесселя J_λ и I_λ (см. [43; т. 2]):

$$\begin{aligned} A(\xi, \xi') &= c(\cos(\pi\lambda))^{-1} |\xi'\xi^{-1}|^{1/2} [J_{2\lambda-1}(2^{3/2}|\xi\xi'|) - J_{1-2\lambda}(2^{3/2}|\xi\xi'|)] \quad \text{при } \xi\xi' < 0, \\ A(\xi, \xi') &= c(\cos(\pi\lambda))^{-1} |\xi'\xi^{-1}|^{1/2} [I_{2\lambda-1}(2^{3/2}|\xi\xi'|) - I_{1-2\lambda}(2^{3/2}|\xi\xi'|)] \quad \text{при } \xi\xi' > 0. \end{aligned}$$

2.4. Вакуумные векторы и сферические функции. В пространстве L^λ любого представления дополнительной серии существует и притом единственный, с точностью до множителя, вектор f_λ , инвариантный относительно максимальной компактной подгруппы K группы $O(n, 1)$. Назовем этот вектор $f_\lambda \in L^\lambda$ вакуумным вектором данного представления.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. С точностью до множителя, вакуумный вектор $f_\lambda \in L^\lambda$ имеет вид:

$$f_\lambda(\omega) = \text{const} \quad \text{в модели } A, \quad (2.21)$$

$$f_\lambda(\gamma) = \left(1 + \frac{|\gamma|^2}{2}\right)^{\lambda+1-n} \quad \text{в модели } B, \quad (2.22)$$

$$f_\lambda(\xi) = |\xi|^{-\lambda-\frac{n-1}{2}} K_{\lambda-\frac{n-1}{2}}(\sqrt{2}|\xi|) \quad \text{в коммутативной модели,} \quad (2.23)$$

где $K_\nu(x)$ – функция Бесселя, см. [43; т. 2].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для модели A утверждение следует из явных формул операторов представления. Отсюда на основании предложения 2.2 следует утверждение для модели B .

Выражение для f_λ в коммутативной модели получается из (2.22) преобразованием Фурье. Для этого достаточно воспользоваться следующей формулой:

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(1 + \frac{|\gamma|^2}{a^2}\right)^{-\lambda} e^{i\langle \xi, \gamma \rangle} d\gamma = c_n \frac{2a^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\lambda)} |\xi|^{\lambda-(n-1)/2} K_{\frac{n-1}{2}-\lambda}(a|\xi|). \quad (2.24)$$

Вывод формулы (2.24) приведен в добавлении 2 (п. 8.1). Предложение 2.4 доказано.

Сферическая функция представления T^λ дополнительной серии есть по определению функция на группе $O(n, 1)$, заданная формулой

$$\psi_\lambda(g) = \langle T_g^\lambda \mathbb{I}, \mathbb{I} \rangle,$$

где $\mathbb{I}$ – вакуумный вектор с нормой 1. Эта функция однозначно, с точностью до эквивалентности, определяет само представление.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. В матричной модели a группы $O(n, 1)$ сферическая функция задается формулой

$$\psi_\lambda(g) = c_\lambda |\beta|^{1-n/2} P_{\lambda-n/2}^{1-n/2}(|\delta|) \quad \text{при} \quad g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

где P_ν^μ – функция Лежандра, $|\beta| = (\delta^2 - 1)^{1/2}$ – норма вектора $\beta \in \mathbb{R}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\mathbb{I} = \text{const}$ в модели a , из описания представления T^λ следует:

$$\psi_\lambda(g) = c_\lambda \int_{S \times S} |\omega\beta + \delta|^{\lambda+1-n} (1 - \langle \omega, \omega' \rangle)^{-\lambda} d\omega d\omega' \quad \text{при} \quad g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Интегрируя по ω' , получаем:

$$\psi_\lambda(g) = c_\lambda \int_S |\omega\beta + \delta|^{\lambda+1-n} d\omega.$$

В силу равенства $|\beta|^2 = \delta^2 - 1$, этот интеграл есть функция только от $|\delta|$. Поэтому его достаточно вычислить для матрицы $g \in O(n, 1)$ с клетками

$$\alpha = \begin{pmatrix} \text{ch } \tau & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \text{sh } \tau \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma = (\text{sh } \tau, 0), \quad \delta = \text{ch } \tau.$$

Для этой матрицы, перейдя на S к сферическим координатам, получаем:

$$\psi_\lambda(g) = c_\lambda \int_0^\pi (\sin \alpha \text{sh } \tau + \text{ch } \tau)^{\lambda+1-n} (\sin \alpha)^{n-2} d\alpha.$$

Полученный интеграл выражается через функцию Лежандра $P_\nu^\mu(x)$ согласно следующей формуле, см. [43; т. 1, с. 156, формула (7)]:

$$P_\nu^\mu(\text{ch } \tau) = \frac{2^\mu (\text{sh } \tau)^{-\mu}}{\pi^{1/2} \Gamma(1/2 - \mu)} \int_0^\pi (\sin \alpha \text{sh } \tau + \text{ch } \tau)^{\mu+\nu} (\sin \alpha)^{-2\mu} d\alpha.$$

Предложение 2.5 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Совпадение сферических функций двух эквивалентных представлений, т.е. представлений с номерами λ и $n - 1 - \lambda$, следует из соотношения для функции Лежандра: $P_{-\nu-1}^\mu(\operatorname{ch} \tau) = P_\nu^\mu(\operatorname{ch} \tau)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Выражение для $\psi_\lambda(g)$ в матричной модели b группы $O(n, 1)$ получается заменой $|\delta|$ в (2.25) на $\frac{1}{2}|g_{11} + g_{33} - g_{13} - g_{31}|$.

2.5. Вложение в тензорное произведение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. Для любых вещественных положительных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ таких, что $\sum \lambda_j < n - 1$, существует изометрическое вложение пространств дополнительной серии

$$\tau: L^\lambda \rightarrow \bigotimes_{j=1}^m L^{\lambda_j}, \quad \lambda = \sum \lambda_j,$$

коммутирующее с действием группы $O(n, 1)$. В модели B оно задается формулой

$$\tau f(\gamma^1, \dots, \gamma^m) = f(\gamma^1) \prod_{j=2}^m \delta(\gamma^1 - \gamma^j), \quad (2.26)$$

а в коммутативной модели – формулой

$$\tau \varphi(\xi_1, \dots, \xi_m) = \varphi(\xi_1 + \dots + \xi_m). \quad (2.27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_m$ – скалярные произведения в пространствах L^λ и $\bigotimes_{j=1}^m L^{\lambda_j}$ соответственно, заданных в модели B . Тогда очевидно, что

$$\langle \tau f, \tau f \rangle_m = \int_{\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1}} \prod_{j=1}^m |\gamma' - \gamma''|^{-2\lambda_j} f(\gamma') \overline{f(\gamma'')} d\gamma' d\gamma'' = \langle f, f \rangle.$$

Таким образом, отображение τ изометрично. Его перестановочность с действием группы $O(n, 1)$ очевидна.

Коммутативная модель получается переходом от функций f в модели B к их преобразованиям Фурье. Пусть образ $f(\gamma)$ при этом преобразовании есть $\varphi(\xi)$. Убедимся, что образ $\tau f(\gamma^1, \dots, \gamma^m)$ есть $\varphi(\xi_1 + \dots + \xi_m)$. В самом деле, согласно (2.26), этот образ равен

$$\int_{(\mathbb{R}^{n-1})^m} f(\gamma_1) \prod_{j=2}^m \delta(\gamma_1 - \gamma_j) \prod_{j=1}^m e^{i\langle \xi_j, \gamma_j \rangle} d\gamma_j = \varphi(\xi_1 + \dots + \xi_m).$$

Предложение 2.6 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. На этом вложении основана одна из моделей неприводимого нелокального унитарного представления группы токов $O(n, 1)^X$, т.е. группы измеримых отображений $X \rightarrow O(n, 1)$, где X – пространство с мерой.

2.6. Модели особого представления группы $O(n, 1)$, $n > 2$. Особое неприводимое унитарное представление группы $O(n, 1)$, $n > 2$, получается из представлений дополнительной серии предельными переходами при $\lambda \rightarrow 0$ или $\lambda \rightarrow n - 1$.

При $\lambda \rightarrow 0$ норма $\|f\|_\lambda$ в пространстве дополнительной серии вырождается на подпространстве L^0 коразмерности 1. Особое представление реализуется в подпространстве L^0 с нормой

$$\|f\|^2 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{d\|f\|_\lambda^2}{d\lambda}.$$

При $\lambda = n - 1$ норма $\|f\|_\lambda$ вырождается на одномерном инвариантном подпространстве L_0 группы $O(n, 1)$. Особое представление реализуется в факторпространстве L^{n-1}/L_0 с нормой

$$\|f\|^2 = \lim_{\lambda \rightarrow n-1} \|f\|_\lambda^2.$$

Операторы особого представления получаются из операторов дополнительной серии предельными переходами при $\lambda \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow n - 1$. Так определенные унитарные представления группы $O(n, 1)$ в пространствах L^0 и L^{n-1}/L_0 неприводимы и эквивалентны.

Поскольку каждое из пространств L^0 и L^{n-1} можно задавать в трех различных моделях, то тем самым получается 6 различных моделей особого представления.

Опишем явно пространства L^0 и L^{n-1} в моделях A и B .

2.6.1. Модель A . L^0 – подпространство функций $f(\omega)$ на единичной сфере $S = S^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию

$$\int_S f(\omega) d\omega = 0.$$

Норма в пространстве L^0 :

$$\|f\|^2 = - \int_{S \times S} \log(1 - \langle \omega, \omega' \rangle) f(\omega) \overline{f(\omega')} d\omega d\omega'. \quad (2.28)$$

Норма в пространстве L^{n-1} функций на сфере S :

$$\|f\|^2 = \int_{S \times S} (1 - \langle \omega, \omega' \rangle)^{-n+1} f(\omega) \overline{f(\omega')} d\omega d\omega'. \quad (2.29)$$

Сплетающий оператор $R: L^0 \rightarrow L^{n-1}$:

$$(Rf)(\omega) = \int_S \log(1 - \langle \omega, \omega' \rangle) f(\omega') d\omega'. \quad (2.30)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В силу (2.30) норму в L^0 можно представить в виде интеграла по S :

$$\|f\|^2 = \int_S (Rf)(\omega) \overline{f(\omega)} d\omega.$$

2.6.2. *Модель В.* L^0 – подпространство функций $f(\gamma)$ на $\mathbb{R}^{n-1}$, удовлетворяющих условию

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(\gamma) d\gamma = 0.$$

Норма в пространстве L^0 :

$$\|f\|^2 = - \int_{\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1}} \log |\gamma - \gamma'| f(\gamma) \overline{f(\gamma')} d\gamma d\gamma'. \quad (2.31)$$

Норма в пространстве L^{n-1} функций на $\mathbb{R}^{n-1}$:

$$\|f\|^2 = \int_{\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1}} |\gamma - \gamma'|^{-2n+2} f(\gamma) \overline{f(\gamma')} d\gamma d\gamma'. \quad (2.32)$$

Сплетающий оператор $R: L^0 \rightarrow L^{n-1}$:

$$\|f\|^2 = - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \log |\gamma - \gamma'| f(\gamma') d\gamma'. \quad (2.33)$$

2.6.3. Коммутативная модель.

ТЕОРЕМА 2.2. В коммутативных моделях, отвечающих $\lambda = 0$ и $\lambda = n - 1$, особое представление группы $O(n, 1)$, $n > 2$, реализуется в гильбертовых пространствах функций $f(\xi)$ на $\mathbb{R}^{n-1}$ с нормами соответственно

$$\|f\|^2 = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f(\xi)|^2 |\xi|^{1-n} d\xi \quad \text{и} \quad \|f\|^2 = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f(\xi)|^2 |\xi|^{n-1} d\xi. \quad (2.34)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В исключительном случае группы $O(2, 1)$ каждое из пространств L^0 и L^{n-1}/L_0 распадается на два неприводимых подпространства, и мы получаем не одно, а два особых представления этой группы. В модели A на каждом конце отрезка $[0, 1]$ они реализуются в подпространствах функций на единичной окружности граничных к функциям соответственно аналитическим и антианалитическим в круге $|z| < 1$. Этот случай сводится к случаю группы $U(1, 1)$, рассматриваемому в § 6.

2.7. Нетривиальный 1-коцикл, связанный с особым представлением. Пространство L особого представления обладает нетривиальным 1-коциклом, т.е. отображением $b: O(n, 1) \rightarrow L$, удовлетворяющим условию

$$b(g_1 g_2) = b(g_1) + T_{g_2} b(g_1) \quad \text{для любых} \quad g_1, g_2 \in O(n, 1)$$

и не представимым в виде $b(g) = T_g \xi - \xi$, $\xi \in L$.

Опишем явно 1-коцикл b в различных реализациях этого представления.

ТЕОРЕМА 2.3. (i) 1-коцикл $b: O(n, 1) \rightarrow L^0$ задается формулой

$$b(g) = T_g \xi - \xi,$$

где ξ – не принадлежащий L^0 вектор, инвариантный относительно максимальной компактной подгруппы U группы $O(n, 1)$. Коцикл b нетривиален.

(ii) 1-коцикл $b': O(n, 1) \rightarrow L^{n-1}$ задается формулой

$$b'(g) = Rb(g),$$

где $R: L^0 \rightarrow L^{n-1}$ – сплетающий оператор.

Коцикл b нетривиален, так как в пространстве L^0 отсутствуют U -инвариантные векторы.

Явные выражения для ξ в различных моделях получаются из формул для вакуумного вектора в пространствах дополнительной серии предельным переходом при $\lambda \rightarrow 0$. А именно,

$$\begin{aligned}\xi &= \text{const} && \text{в модели } A, \\ \xi &= \left(1 + \frac{|\gamma|^2}{2}\right)^{1-n} && \text{в модели } B, \\ \xi &= |\xi|^{-\frac{1-n}{2}} K_{\frac{1-n}{2}}(\sqrt{2}|\xi|) && \text{в коммутативной модели,}\end{aligned}$$

где $K_\rho(x)$ – функция Бесселя, [43; т. 2]. В частности, $\xi = e^{-\sqrt{2}|\xi|}$ при $n = 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ. При $\lambda = n - 1$ K -инвариантный вектор инвариантен относительно всей группы $O(n, 1)$.

Имеем, далее:

$$\begin{aligned}b'(\omega, g) &= \int_S \log(1 - \langle \omega, \omega' \rangle) |\omega' \beta + \delta|^{1-n} d\omega' && \text{в модели } A, \\ b'(\omega, g) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \log(|\gamma - \gamma'|) \cdot \left| -\frac{|\gamma'|^2}{2} g_{13} + \gamma' g_{23} + g_{33} \right|^{1-n} d\gamma' && \text{в модели } B.\end{aligned}$$

2.8. Ограничение на максимальную параболическую подгруппу P .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. Ограничения представлений дополнительной серии T^λ группы $O(n, 1)$, $n > 2$, и ее особого представления $T^0 \simeq T^{n-1}$ на максимальную параболическую подгруппу P неприводимы и попарно эквивалентны. В коммутативной модели сплетающий оператор $\tau: L^\lambda \rightarrow L^0$ имеет вид $(\tau\varphi)(\xi) = |\xi|^\lambda \varphi(\xi)$.

Так возникающее унитарное представление подгруппы P является ее особым представлением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В коммутативной модели представления T^λ , включая особое представление T^0 , реализуются в гильбертовых пространствах L^λ с нормой

$$\|\varphi\|_\lambda^2 = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\varphi(\xi)|^2 |\xi|^{1-n+2\lambda} d\xi.$$

Из явных формул (2.17) для операторов подгруппы P следует, что τ является сплетающим оператором $L^\lambda \rightarrow L^0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для описания расширения этого особого представления подгруппы P до произвольного представления T^λ дополнительной серии достаточно задать только оператор T_s^λ .

2.9. Исследование отделимости особых представлений групп $O(n, 1)$ и P от единичных представлений в топологии Фелла. Говорят, что унитарное представление T локально компактной группы G в гильбертовом пространстве H содержит почти инвариантные векторы, если для любого компакта $K \subset G$ и любого $\varepsilon > 0$ существует единичный вектор $h \in H$ такой, что норма $\|T_k h - h\| < \varepsilon$ для всех $k \in K$.

Множество всех представлений с почти инвариантными векторами совпадает с пересечением всех окрестностей единичного представления группы G в топологии Фелла на множестве ее унитарных представлений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.8. 1) *Особое представление T группы $O(n, 1)$ не содержит почти инвариантных векторов.*

2) *Ограничение T' представления T на максимальную параболическую подгруппу P содержит почти инвариантные векторы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Представление T группы $O(n, 1)$. Пусть K – максимальная компактная подгруппа группы $G = O(n, 1)$. Поскольку T – особое представление, в пространстве H не существует K -инвариантных векторов, а потому

$$\int_K \langle T_k h, h \rangle dk = 0$$

для любого единичного вектора $h \in H$. Проинтегрировав по K равенство

$$\|T_k h - h\|^2 = 2 - \langle T_k h, h \rangle - \langle h, T_k h \rangle,$$

мы получим $\int_K \|T_k h - h\|^2 dk = 2$. Следовательно, представление T не содержит почти инвариантных векторов.

2) Представление T' подгруппы P . Воспользуемся коммутативной моделью особого представления группы $O(n, 1)$. Положим

$$h(\xi) = \chi_\eta(|\xi|)|\xi|^\lambda \quad (\lambda > 0),$$

где χ_η – характеристическая функция интервала $(0, \eta)$. Очевидно, что $h(\xi) \in H$ при любых $\eta > 0$ и $\lambda > 0$. Убедимся, что для любого компакта $K \subset P$ и любого $\varepsilon > 0$ для всех достаточно малых η и λ имеет место неравенство

$$\|T'_k h - h\|^2 < \varepsilon \|h\|^2 \quad \text{при } k \in K.$$

Представим элементы $k \in K$ в виде $k = z(\gamma) \operatorname{diag}(r^{-1}, u, r)$. Тогда

$$(T'_k h)(\xi) = e^{-i\langle \xi, \gamma \rangle} \chi_\eta(|r\xi|)|r\xi|^\lambda.$$

Не нарушая общности, можно предполагать, что $|r| < 1$ на K . При этом предположении имеем $\chi_\eta(|r\xi|)\chi_\eta(|\xi|) = \chi_\eta^2(|\xi|)$ при $|\xi| < \eta$, а потому

$$\begin{aligned} \|T'_k h - h\|^2 &= 2 \int_{|\xi| < \eta} (h(\xi) - (T'_k h)(\xi))h(\xi)|\xi|^{1-n} d\xi \\ &= 2 \int_{|\xi| < \eta} (1 - |r|^\lambda e^{-i\langle \xi, \gamma \rangle})h^2(\xi)|\xi|^{1-n} d\xi. \end{aligned}$$

Отсюда непосредственно следует утверждение.

ЗАМЕЧАНИЕ. Предложение остается справедливым для особых представлений T группы $U(n, 1)$, рассматриваемых в § 6.

2.10. Замечание о представлениях в вещественных пространствах.

В моделях A и B операторы представления сохраняют пространства вещественнозначных функций. Поэтому пространства представлений дополнительной серии и особого представления, рассматриваемые как линейные пространства над $\mathbb{R}$, распадаются в прямую сумму двух инвариантных вещественных гильбертовых подпространств – пространства функций с вещественными и с чисто мнимыми значениями. Представления группы $O(n, 1)$ в этих вещественных гильбертовых пространствах неприводимы и эквивалентны.

В коммутативной модели пространство представления распадается в прямую сумму инвариантных подпространств над $\mathbb{R}$ – пространства функций $f(\xi) + f(-\xi)$ и пространства функций $f(\xi) - f(-\xi)$.

2.11. Приложение коммутативной модели особого представления группы $O(n, 1)$ к построению неприводимого унитарного представления группы токов $O(n, 1)^X$. Роль коммутативной модели особого представления группы $O(n, 1)$ проявляется в том, что по ней естественно строится неприводимое унитарное представление группы токов $O(n, 1)^X$, т.е. группы измеримых отображений $X \rightarrow O(n, 1)$ с поточечным умножением, где X – пространство с конечной мерой $m(x)$.

Мы исходим из пространства $L^2(|\xi|^{1-n} d\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$, в коммутативной модели особого представления группы $O(n, 1)$ и строим σ -конечную меру ν в пространстве $\Phi^* = \Phi(X)$ векторных распределений $\xi(x) = (\xi_1(x), \dots, \xi_{n-1}(x))$, обладающую следующими свойствами инвариантности:

- 1) мера ν инвариантна относительно действия группы $O(n-1)^X$, т.е.

$$d\nu(\xi u) = d\nu(\xi) \quad \text{для любого } u(x) \in O(n-1)^X;$$

- 2) мера ν проективно инвариантна относительно умножения на любую ограниченную борелевскую функцию $\epsilon(x) \in (\mathbb{R}^*)^X$, для которой сходится интеграл $\int_X |\epsilon(x)| dm(x)$, а именно,

$$d(\epsilon\xi) = e^{\int_X \log |\epsilon(x)| dm(x)} d\nu(\xi).$$

В частности, $d\nu(\epsilon\xi) = d\nu(\xi)$, если $\int_X \log |\epsilon(x)| dm(x) = 0$.

В силу этих свойств мы называем ν лебеговой мерой на Φ^* .

Унитарное представление группы P^X реализуется в гильбертовом пространстве $L^2(\nu)$ функций $f(\xi)$ на Φ^* . По аналогии с коммутативной моделью особого представления группы $O(n, 1)$, элементы $\gamma(x) \in Z^X$ действуют как мультипликаторы

$$(T_\gamma f)(\xi) = e^{i\langle \xi, \gamma \rangle} f(\xi),$$

а элементы $d = (\epsilon^{-1}, u, \epsilon) \in D^X$ действуют по формуле

$$(T_d f)(\xi) = e^{\frac{1}{2} \int_X \log |\epsilon(x)| dm(x)} f(\epsilon\xi u).$$

Легко убедиться, что эти операторы порождают представление всей группы P^X . Унитарность операторов T_γ очевидна, а унитарность операторов T_d следует из лебеговости меры ν .

Так построенное унитарное представление группы P^X неприводимо. Как было доказано в [21], [22], оно продолжается до унитарного представления всей группы $O(n, 1)^X$.

Глава II. Представления подгрупп группы $U(n, 1)$

§ 3. Представления группы Гейзенберга H и их продолжения на группы $P_0 = H \rtimes D_0$ и $P = H \rtimes D$

Эта глава будет посвящена конструкции представлений максимальной унипотентной подгруппы – группы Гейзенберга $H \subset U(n, 1)$, и параболической подгруппы P – нормализатора подгруппы H . В гл. III будет дано описание различных моделей дополнительных и особых представлений группы $U(n, 1)$.

3.1. Описание неприводимых унитарных представлений группы Гейзенберга. Известно (см., например, [44]), что неприводимые унитарные представления группы Гейзенберга H распадаются на два класса: одномерные представления, зависящие от $2(n - 1)$ вещественных параметров, и бесконечномерные, зависящие от одного вещественного параметра $\rho \neq 0$ (постоянная Планка). Приведем описание баргмановской модели бесконечномерных неприводимых представлений.

Неприводимое представление индекса $\rho > 0$ реализуется в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}(\rho)$ целых аналитических функций $f(z)$ относительно $z = (z_1, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ с нормой

$$\|f\|^2 = |\rho|^{n-1} \int_{\mathbb{C}^{n-1}} |f(z)|^2 e^{-|\rho||z|^2} d\mu(z), \quad (3.1)$$

где $|z|^2 = zz^* = |z_1|^2 + \dots + |z_{n-1}|^2$, а $d\mu(z)$ – лебегова мера на $\mathbb{C}^{n-1}$, нормированная условием

$$\int_{\mathbb{C}^{n-1}} e^{-|z|^2} d\mu(z) = 1.$$

Операторы представления T_h группы H , отвечающие элементам $h = (t_0, z_0)$, имеют вид

$$T_h f(z) = e^{\rho(it_0 - \frac{1}{2}|z_0|^2 - zz_0^*)} f(z + z_0). \quad (3.2)$$

Их унитарность и групповое свойство легко проверяются.

Неприводимое представление индекса $\rho < 0$ реализуется в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}(\rho)$ целых антианалитических функций $f(z)$ относительно $z = (z_1, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ с такой же нормой (3.1).

Операторы представления T_h группы H , отвечающие элементам $h = (t_0, z_0)$, имеют вид

$$T_h f(z) = e^{i\rho t_0 - |\rho|(\frac{1}{2}|z_0|^2 + z_0 z^*)} f(z + z_0). \quad (3.3)$$

Заметим, что переход от пространства $\mathcal{H}(\rho)$ к пространству $\mathcal{H}(-\rho)$ сводится к замене функций $f(z)$ функциями $\bar{f}(z)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Представления группы Гейзенберга H в пространствах $\mathcal{H}(\rho)$, $\rho \neq 0$, неприводимы, попарно неэквивалентны, и ими исчерпываются все бесконечномерные неприводимые унитарные представления группы H .*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Мономы $z^k = z_1^{k_1} \dots z_{n-1}^{k_{n-1}}$ и $\bar{z}^k = \bar{z}_1^{k_1} \dots \bar{z}_{n-1}^{k_{n-1}}$, $k \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$, образуют ортогональные базисы в пространствах $\mathcal{H}(\rho)$ соответственно при $\rho > 0$ и $\rho < 0$ с нормой

$$\|z^k\|^2 = \|\bar{z}^k\|^2 = k! |\rho|^{-|k|},$$

где

$$|k| = k_1 + \dots + k_{n-1}, \quad k! = k_1! \dots k_{n-1}!.$$

В этом базисе при $\rho > 0$ операторы T_h , $h = (t_0, z_0)$, имеют вид

$$T_h z^k = e^{\rho(it_0 - \frac{1}{2}|z_0|^2)} \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^{n-1}} a_{km}(\rho, z_0) z^m, \quad (3.4)$$

где

$$a_{km}(\rho, z_0) = k! \sum_s \frac{(-\rho)^{|m-s|} z_0^{k-s} \bar{z}_0^{m-s}}{s! (k-s)! (m-s)!}. \quad (3.5)$$

Формула для операторов T_h при $\rho < 0$ аналогична.

ЗАМЕЧАНИЕ. Преобразование переменных $z \rightarrow z' = |\rho|^{1/2} z$ задает изоморфизмы гильбертовых пространств $\mathcal{H}(\rho) \rightarrow \mathcal{H}(1)$ и $\mathcal{H}(\rho) \rightarrow \mathcal{H}(-1)$ соответственно при $\rho > 0$ и $\rho < 0$. Таким образом, любое неприводимое бесконечномерное представление группы H индекса ρ можно реализовать в гильбертовом пространстве целых аналитических (антианалитических) функций с нормой

$$\|f\|^2 = \int_{\mathbb{C}^{n-1}} |f(z)|^2 e^{-|z|^2} d\mu(z).$$

В этой реализации операторы представления имеют вид

$$\begin{aligned} T_h f(z) &= e^{\rho(it_0 - \frac{1}{2}|z_0|^2) - \rho^{1/2} z z_0^*} f(z + \rho^{1/2} z_0) & \text{при } \rho > 0; \\ T_h f(z) &= e^{i\rho t_0 - \frac{1}{2}|\rho||z_0|^2 - |\rho|^{1/2} z_0 z^*} f(z + |\rho|^{1/2} z_0) & \text{при } \rho < 0. \end{aligned}$$

3.2. Другое выражение для нормы в пространствах $\mathcal{H}(\rho)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Для любой целой аналитической функции $f(z)$ на $\mathbb{C}^{n-1}$ при любом $\rho > 0$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{C}^{n-1}} |f(z)|^2 e^{-\rho|z|^2} d\mu(z) \\ &= \rho^{n-1} \int_{\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^{n-1}} f(z) \overline{f(z')} e^{\rho(z' z^* - |z|^2 - |z'|^2)} d\mu(z) d\mu(z'). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Аналогично, для любой целой антианалитической функции $f(z)$ на $\mathbb{C}^{n-1}$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{C}^{n-1}} |f(z)|^2 e^{-|\rho||z|^2} d\mu(z) \\ &= |\rho|^{n-1} \int_{\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^{n-1}} f(z) \overline{f(z')} e^{|\rho|(z(z')^* - |z|^2 - |z'|^2)} d\mu(z) d\mu(z'). \end{aligned} \quad (3.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем равенство (3.6). Достаточно доказать это равенство для всех мономов $f(z) = z^k$. Пусть I_1 и I_2 – соответственно левая и правая части равенства (3.6) при $f(z) = z^k$. Очевидно, что $I_1 = k! \rho^{-|k|-n+1}$. С другой стороны: подставим в выражение для I_2 разложение $e^{\rho z' z^*}$ в степенной ряд, $e^{\rho z' z^*} = \sum_l \frac{\rho^{|l|}}{l!} (z')^l \bar{z}^l$. Замечая, что слагаемые полученной суммы равны нулю при $l \neq k$, имеем:

$$I_2 = \frac{\rho^{|k|+n-1}}{k!} \left| \int_{\mathbb{C}^{n-1}} z^k \bar{z}^k e^{-\rho|z|^2} d\mu(z) \right|^2 = \frac{\rho^{|k|+n-1}}{k!} I_1^2 = k! \rho^{-|k|-n+1}.$$

Таким образом, $I_1 = I_2$. Доказательство равенства (3.7) аналогично.

СЛЕДСТВИЕ. Нормы (3.1) в пространствах $\mathcal{H}(\rho)$ совпадают при $\rho > 0$ и $\rho < 0$ соответственно с нормами

$$\|f\|^2 = \rho^{2n-2} \int_{\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^{n-1}} f(z) \overline{f(z')} e^{\rho(z' z^* - |z|^2 - |z'|^2)} d\mu(z) d\mu(z'); \quad (3.8)$$

$$\|f\|^2 = |\rho|^{2n-2} \int_{\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^{n-1}} f(z) \overline{f(z')} e^{|\rho|(z(z')^* - |z|^2 - |z'|^2)} d\mu(z) d\mu(z'). \quad (3.9)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. На пространстве всех функций $f(z)$ норма (3.1) строго положительна, а нормы (3.8) и (3.9) вырождены.

3.3. Продолжение представления группы Гейзенберга H на группу $P_0 = H \ltimes D_0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Существует продолжение бесконечномерных представлений группы Гейзенберга H на группу $P_0 = H \ltimes D_0$. Именно, в баргмановской модели $\mathcal{H}(\rho)$ представлений группы H операторы T_d , отвечающие элементам $d = \text{diag}(\epsilon, u, \epsilon) \in D_0$, задаются формулой

$$T_d f(z) = f(\epsilon^{-1} z u). \quad (3.10)$$

СЛЕДСТВИЕ. Ограничение представления группы P_0 в пространства $\mathcal{H}(\rho)$ на подгруппу $U(n-1) \subset D_0$ распадается в прямую сумму неприводимых попарно неэквивалентных подпространств – подпространств однородных полиномов от $z \in \mathbb{C}^{n-1}$ при $\rho > 0$ и однородных полиномов от $\bar{z}$ при $\rho < 0$.

В частности, в пространстве представления существует, и притом единственный, с точностью до множителя, вектор, инвариантный относительно подгруппы $U(n-1)$, а именно, $f(z) = \text{const}$.

Из явного выражения (3.1) для нормы и выражений для операторов представления группы P_0 в пространствах $\mathcal{H}(\rho)$ следует:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. Для каждого $r > 0$ отображение $f(z) \rightarrow f(r^{-1}z)$ является изоморфизмом гильбертовых пространств $\mathcal{H}(\rho) \rightarrow \mathcal{H}(r^{-2}\rho)$, преобразующим операторы T_b , $b \in P_0$, на $\mathcal{H}(\rho)$ в операторы $T_{d_1 b d_1^{-1}}$ на $\mathcal{H}(r^{-2}\rho)$, где $d_1 = \text{diag}(r^{-1}, e, r)$.

3.4. Прямые интегралы представлений группы P_0 и их продолжение до представлений параболической группы $P = P_0 \ltimes D_1 = H \ltimes D$. Свяжем с каждым вещественным числом $\lambda \geq 0$ прямые интегралы гильбертовых пространств $\mathcal{H}(\rho)$:

$$\mathcal{H}_-^\lambda = \int_{-\infty}^0 \mathcal{H}(\rho) |\rho|^{\lambda-1} d\rho, \quad \mathcal{H}_+^\lambda = \int_0^{+\infty} \mathcal{H}(\rho) \rho^{\lambda-1} d\rho.$$

Подробнее, $\mathcal{H}_+^\lambda$ есть гильбертово пространство функций $f(\rho, z)$ на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{C}^{n-1}$, целых аналитических относительно z , с нормой

$$\|f\|^2 = \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{C}^{n-1}} |f(\rho, z)|^2 e^{-|\rho||z|^2} d\mu(z) \right) \rho^{n+\lambda-2} d\rho. \quad (3.11)$$

Аналогично определяется пространство $\mathcal{H}_-^\lambda$.

Унитарные представления группы P_0 в пространствах $\mathcal{H}(\rho)$ индуцируют ее унитарные представления в пространствах $\mathcal{H}_\pm^\lambda$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. *Представления группы P_0 в пространствах $\mathcal{H}_\pm^\lambda$ продолжаются до унитарных представлений группы $P = P_0 \ltimes D_1$. Именно, операторы T_d , отвечающие элементам $d \in D_1$, задаются формулой*

$$T_d f(\rho, z) = f(r^2 \rho, r^{-1} z) r^\lambda \quad \text{при} \quad d = \text{diag}(r^{-1}, e, r), \quad r > 0. \quad (3.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Унитарность операторов T_d следует из определения нормы в пространствах $\mathcal{H}_\pm^\lambda$. Далее, из предложения 3.5 следует, что $T_d T_b T_{d^{-1}} = T_{dbd^{-1}}$ для любых элементов $d \in D_1$ и $b \in P_0$. Значит, операторы T_d , $d \in D_1$, и T_b , $b \in P_0$, порождают представление группы P .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.7. *Представления группы P в пространствах $\mathcal{H}_+^\lambda$ (соответственно, в пространствах $\mathcal{H}_-^\lambda$) неприводимы и попарно эквивалентны. Представления в пространствах $\mathcal{H}_+^\lambda$ и $\mathcal{H}_-^\mu$ не эквивалентны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неприводимость следует непосредственно из определения операторов подгруппы D_1 и попарной неэквивалентности неприводимых представлений подгруппы P_0 в пространствах $\mathcal{H}(\rho)$. Сплетающий оператор $\tau: \mathcal{H}_+^\lambda \rightarrow \mathcal{H}_+^\mu$ имеет вид

$$\tau: f(\rho, z) = |\rho|^{\frac{1}{2}(\mu-\lambda)} f(\rho, z).$$

3.5. Действие операторов T_g , $g \in P$, на элементы вида $f_k(\rho) z^k$ и $f_k(\rho) \bar{z}^k$. Обозначим через $(L_k^+)^{\lambda} \subset \mathcal{H}_+^{\lambda}$ и $(L_k^-)^{\lambda} \subset \mathcal{H}_-^{\lambda}$, $k \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$, подпространства функций вида $f_k(\rho) z^k$ и $f_k(\rho) \bar{z}^k$ соответственно. Из определения следует, что

$$\mathcal{H}_\pm^\lambda = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_+^{n-1}} (L_k^\pm)^\lambda.$$

Опишем действие операторов группы P на элементы подпространств $(L_k^\pm)^\lambda$. Для определенности ограничимся случаем подпространств $\mathcal{H}_+^\lambda$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.8. Операторы T_g^+ , отвечающие элементам $g = (t_0, z_0) \in H$ и $d = \text{diag}(\bar{\epsilon}^{-1}, u, \epsilon) \in D$, действуют на элементы $f_k(\rho)z^k \in L_k^+$ по формулам

$$T_{(t_0, z_0)}^+(f_k(\rho)z^k) = \sum_m a_{km}(t_0, z_0; \rho)z^m, \quad (3.13)$$

где

$$a_{km}(t_0, z_0; \rho) = k! e^{\rho(it_0 - \frac{1}{2}|z_0|^2)} f_k(\rho) \sum_s \frac{(-\rho)^{|m-s|} z_0^{k-s} \bar{z}_0^{m-s}}{s! (k-s)! (m-s)!},$$

$$T_d^+(f_k(\rho)z^k) = k! |\epsilon|^\lambda \bar{\epsilon}^{-|k|} f_k(|\epsilon|^2 \rho) \sum_{|l|=|k|} L_{kl}(u) z^l. \quad (3.14)$$

Здесь

$$L_{kl}(u) = \sum_{M(k, l)} \frac{u_{ij}^{m_{ij}}}{m_{ij}!}, \quad (3.15)$$

суммирование в (3.15) – по множеству $M(k, l)$ целочисленных $(n-1)$ -матриц $m = \|m_{ij}\|$, $m_{ij} \geq 0$, удовлетворяющих условиям

$$\sum_j m_{ij} = l_i, \quad \sum_i m_{ij} = k_j.$$

Аналогично действуют операторы T_g^- на элементы из L_k^- .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из описания операторов T_g в пространстве $\mathcal{H}_+$ следует:

$$\begin{aligned} T_{(t_0, z_0)}^+(f_k(\rho)z^k) &= e^{\rho(it_0 - \frac{1}{2}|z_0|^2)} e^{-\rho z z_0^*} f_k(\rho)(z + z_0)^k \\ &= e^{\rho(it_0 - \frac{1}{2}|z_0|^2)} \left(\sum_l \frac{(-\rho)^{|l|}}{l!} \bar{z}_0^l z^l \right) \left(k! \sum_{s \leq k} \frac{z^s \bar{z}_0^{k-s}}{s! (k-s)!} \right) f_k(\rho) \\ &= k! e^{\rho(it_0 - \frac{1}{2}|z_0|^2)} f_k(\rho) \sum_m \left(\sum_s \frac{(-\rho)^{|m-s|} z_0^{k-s} \bar{z}_0^{m-s}}{s! (k-s)! (m-s)!} \right) z^m. \end{aligned}$$

Отсюда следует (3.13). Далее, имеем:

$$T_d^+(f_k(\rho)z^k) = |\epsilon|^\lambda f_k(|\epsilon|^2 \rho) (\bar{\epsilon}^{-1} z u)^k.$$

Очевидно, что

$$(\bar{\epsilon}^{-1} z u)^k = k! \bar{\epsilon}^{-|k|} \sum_{|l|=|k|} L_{kl}(u) z^l,$$

где $L_{kl}(u)$ задается равенством (3.15). Отсюда следует (3.14).

ЗАМЕЧАНИЕ. В §5 будет показано, что представление группы P в пространствах $\mathcal{H}_\pm^0$ продолжаются до унитарных представлений всей группы $U(n, 1)$. Эти представления группы $U(n, 1)$, называемые особыми, обладают нетривиальными 1-коциклами.

3.6. Вложения представлений групп P_0 и P в пространствах $\mathcal{H}(\rho)$ и $\mathcal{H}_\pm^\lambda$ в их тензорные произведения.

ТЕОРЕМА 3.1. *Для любых чисел $\rho_1 > 0, \dots, \rho_m > 0$ существует, и притом единственное, вложение гильбертовых пространств*

$$\tau: \mathcal{H}(\rho_1 + \dots + \rho_m) \rightarrow \bigotimes_{k=1}^m \mathcal{H}(\rho_k), \quad (3.16)$$

коммутирующее с действием подгруппы P_0 . Именно,

$$\tau f(z) = F(z_1, \dots, z_n) = f\left(\rho^{-1} \sum \rho_i z_i\right), \quad \text{где } \rho = \sum \rho_i. \quad (3.17)$$

Аналогично определяется единственное вложение (3.16), коммутирующее с действием подгруппы P_0 , для любых $\rho_1 < 0, \dots, \rho_m < 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 3.4 (следствие) вытекает, что тензорное произведение $\bigotimes_{k=1}^m \mathcal{H}(\rho_k)$ содержит единственный вектор, инвариантный относительно подгруппы D_0 . Поэтому существует не более одного вложения (3.16), перестановочного с действием группы P_0 . Покажем, что (3.17) – требуемое вложение.

По определению,

$$\begin{aligned} \|\tau f\|^2 &= \prod_{i=1}^m \rho_i^{n-1} \int_{(\mathbb{C}^{n-1})^m} \left| f\left(\rho^{-1} \sum_{i=1}^m \rho_i z_i\right) \right|^2 e^{-\sum_{i=1}^m \rho_i |z_i|^2} \prod_{i=1}^m d\mu(z_i) \\ &= \int_{(\mathbb{C}^{n-1})^m} \left| f\left(\rho^{-1} \sum_{i=1}^m \rho_i^{1/2} z_i\right) \right|^2 e^{-\sum_{i=1}^m |z_i|^2} \prod_{i=1}^m d\mu(z_i). \end{aligned}$$

Перейдем в этом интеграле от переменных $z_1, \dots, z_m$, $z_i \in \mathbb{C}^{n-1}$, к новым переменным

$$z = \rho^{-1/2} \sum_{i=1}^m \rho_i^{1/2} z_i \quad \text{и} \quad w_k = \sum_{i=1}^m a_{ki} z_i, \quad k = 1, \dots, m-1,$$

где векторы $a_k = (a_{k1}, \dots, a_{km})$, $k = 1, \dots, m-1$, образуют вместе с вектором $a = (\rho^{-1/2} \rho_1^{1/2}, \dots, \rho^{-1/2} \rho_m^{1/2})$ ортонормированный базис в $\mathbb{R}^m$. Мы получим

$$\begin{aligned} \|\tau f\|^2 &= \int_{\mathbb{C}^{n-1}} |f(\rho^{-1/2} z)|^2 e^{-|z|^2} d\mu(z) \int_{(\mathbb{C}^{n-1})^{m-1}} e^{-\sum_{i=1}^{m-1} |w_i|^2} \prod_{i=1}^{m-1} d\mu(w_i) \\ &= \rho^{n-1} \int_{\mathbb{C}^{n-1}} |f(z)|^2 e^{-\rho |z|^2} d\mu(z) = \|f\|^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что τ – вложение гильбертовых пространств. Перестановочность τ с операторами представлений подгруппы P_0 устанавливается непосредственно. Теорема 3.1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Нетрудно убедиться, что представление группы Гейзенберга H в тензорном произведении $\bigotimes_{i=1}^m \mathcal{H}(\rho_i)$ кратно неприводимому представлению порядка $\rho = \sum \rho_i$.

ТЕОРЕМА 3.2. Для любых чисел $\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_m > 0$ существует вложение гильбертовых пространств

$$\tau: \mathcal{H}_+^\lambda \rightarrow \bigotimes_{i=1}^m \mathcal{H}_+^{\lambda_i}, \quad \lambda = \sum_{i=1}^m \lambda_i,$$

коммутирующее с действием группы P . Именно:

$$\tau f(\rho, z) = \left(\frac{\prod \Gamma(\lambda_i)}{\Gamma(\lambda)} \right)^{-\frac{1}{2}} f\left(\sum \rho_i, \rho^{-1} \sum \rho_i z_i\right), \quad (3.18)$$

где $\rho = \sum \rho_i$. Аналогично, для любых чисел $\lambda_1 < 0, \dots, \lambda_m < 0$ определяется вложение гильбертовых пространств

$$\tau: \mathcal{H}_-^\lambda \rightarrow \bigotimes_{i=1}^m \mathcal{H}_-^{\lambda_i}, \quad \lambda = \sum_{i=1}^m \lambda_i,$$

коммутирующее с действием подгруппы P .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению,

$$\begin{aligned} \|\tau f\|^2 &= \left(\frac{\prod \Gamma(\lambda_i)}{\Gamma(\lambda)} \right)^{-1} \\ &\times \int_{\mathbb{R}_+^m} \left(\int_{(\mathbb{C}^{n-1})^m} \left| f\left(\sum \rho_i, \rho^{-1} \sum \rho_i z_i\right) \right|^2 e^{-\sum \rho_i |z_i|^2} \prod d\mu(z_i) \right) \prod \rho_i^{n+\lambda_i-2} d\rho_i. \end{aligned}$$

Отсюда на основании теоремы 3.1 получаем:

$$\|\tau f\|^2 = \left(\frac{\prod \Gamma(\lambda_i)}{\Gamma(\lambda)} \right)^{-1} \int_{\mathbb{R}_+^m} \left(\int_{\mathbb{C}^{n-1}} |f(\rho, z)|^2 e^{-\rho |z|^2} d\mu(z) \right) \rho^{n-1} \prod \rho_i^{\lambda_i-1} d\rho_i.$$

Полученное выражение преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \|\tau f\|^2 &= \left(\frac{\prod \Gamma(\lambda_i)}{\Gamma(\lambda)} \right)^{-1} \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{C}^{n-1}} |f(\rho, z)|^2 e^{-\rho |z|^2} d\mu(z) \right) \rho^{n+\lambda-2} d\rho \\ &\times \int_{\sum \rho_i=1} \prod \rho_i^{\lambda_i-1} d\rho_i. \end{aligned}$$

Заметим, что второй интеграл равен $\frac{\prod \Gamma(\lambda_i)}{\Gamma(\lambda)}$. Следовательно, $\|\tau f\| = \|f\|$, т.е. τ – вложение. Перестановочность τ с действием группы P следует из явных формул для операторов представления. Теорема 3.2 доказана.

§ 4. Представления групп P_0 и P в пространствах $H(\rho)$ и $H_\pm^\lambda$

4.1. Представления группы P_0 в пространстве $H(\rho)$. Обозначим через $H(\rho)$, $\rho \neq 0$, гильбертово пространство всех функций $f(z)$ на $\mathbb{C}^{n-1}$ с нормой (3.1):

$$\|f\|^2 = |\rho|^{n-1} \int_{\mathbb{C}^{n-1}} |f(z)|^2 e^{-|\rho| |z|^2} d\mu(z).$$

Отметим, что $H(\rho)$ натянуто на мономы $z^k \bar{z}^l$, $k, l \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$.

Определим унитарное представление группы P_0 теми же формулами, что и в случае пространства $\mathcal{H}(\rho)$, т.е. формулами (3.2), (3.10) при $\rho > 0$ и формулами (3.3), (3.10) при $\rho < 0$.

В частности, $\mathcal{H}(\rho)$ является инвариантным подпространством пространства $H(\rho)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Теорема 3.1 о вложении пространств $\mathcal{H}(\rho)$ в их тензорные произведения переносится без изменения на пространства $H(\rho)$.*

4.2. Разложение $H(\rho)$ на неприводимые подпространства. Рассмотрим для определенности случай $\rho > 0$. Аналогичные результаты при $\rho < 0$ получаются заменой функций на комплексно сопряженные.

Обозначим через K_m , $m = 0, 1, 2, \dots$, подпространство в $H(\rho)$ всех однородных полиномов от $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{n-1}$ степени однородности m .

Очевидно, что пространства K_m инвариантны, неприводимы и попарно неэквивалентны относительно подгруппы $U(n-1) \subset P_0$. Очевидно также, что пространства K_m взаимно ортогональны. Заметим, что вектором младшего веса в K_m является вектор $\bar{z}_{n-1}^m$ веса $(0, \dots, 0, -m)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обозначим через $H_m(\rho)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, инвариантное подпространство в $H(\rho)$, циклически порожденное векторами $\psi \in K_m$.

В частности, $H_0(\rho)$ есть введенное ранее пространство $\mathcal{H}(\rho)$ целых аналитических функций от z_i .

ЗАМЕЧАНИЕ. Приведем другое эквивалентное определение пространств $H_m(\rho)$. Из описания представления непосредственно следует, что операторы $\partial_i = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}$, $i = 1, \dots, n-1$, удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$\partial_i T_h = T_h \partial_i \quad \text{для всех } h \in H, \quad (4.1)$$

$$\partial_i T_{\epsilon, u} = \epsilon^{-1} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \bar{u}_{ij} \partial_j \right) T_{\epsilon, u} \quad \text{для всех } (\epsilon, u) \in D_0. \quad (4.2)$$

Обозначим через $L_m(\rho)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, гильбертово подпространство функций $\psi \in H(\rho)$ таких, что

$$p_m(\partial_1, \dots, \partial_{n-1})\psi = 0$$

для всех однородных полиномов p_m степени m . Очевидно, $L_m(\rho) \subset L_{m+1}(\rho)$. В этих обозначениях имеем:

$$H_m(\rho) = L_{m+1}(\rho) \ominus L_m(\rho), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Представления подгруппы P_0 в подпространствах $H_m(\rho)$ неприводимы и попарно неэквивалентны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $H_m(\rho)$ приводимо, а потому существует разложение $H_m(\rho) = H_1 \oplus H_2$ на инвариантные подпространства. Поскольку $H_m(\rho)$ содержит единственный вектор младшего веса, то этот вектор

принадлежит одному из подпространств H_1 и H_2 , например, H_1 . Но тогда $K_m \subset H_1$ и, значит, $H_1 = H_m(\rho)$.

Поскольку векторы младшего веса в пространствах $H_m(\rho)$ имеют различные веса, то эти пространства попарно неэквивалентны.

СЛЕДСТВИЕ. *Подпространства $H_m(\rho)$ взаимно ортогональны, и пространство $H(\rho)$ является их прямой суммой:*

$$H(\rho) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} H_m(\rho).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. *Ограничение представления группы P_0 в пространстве $H_m(\rho)$ на подгруппу H кратно неприводимому представлению группы H индекса ρ с кратностью $\dim K_m$. Разложение $H_m(\rho)$ на подпространства, неприводимые относительно H , можно представить в виде*

$$H_m(\rho) = \bigoplus_{|k|=m} H_{mk}(\rho),$$

где $H_{mk}(\rho)$ – неприводимое относительно H подпространство, порожденное вектором $\bar{z}^k \in K_m$.

4.3. Ортогональный базис в $H_m(\rho)$, ассоциированный с действием группы Гейзенберга H . Обозначим:

$$f_p(z) = \bar{z}^p = \bar{z}_1^{p_1} \cdots \bar{z}_{n-1}^{p_{n-1}}, \quad p \in \mathbb{Z}_+^{n-1}. \quad (4.3)$$

Из определения нормы в $H(\rho)$ следует:

$$\|f_p\|^2 = p! \rho^{-|p|}. \quad (4.4)$$

Пусть $L_p(\rho) \subset H(\rho)$ – инвариантное относительно H подпространство, циклически порожденное вектором $f_p(\rho)$. Согласно предложению 4.3, пространство $L_p(\rho)$ неприводимо и

$$H_m(\rho) = \bigoplus_{|p|=m} L_p(\rho), \quad H(\rho) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}_+^{n-1}} L_p(\rho).$$

Зададим ортогональный базис в каждом подпространстве $L_p(\rho)$. Согласно определению, операторы представления T_h , $h = (t, z) \in H$, действуют на векторы f_p по формуле

$$T_h f_p(z) = (\bar{z} + \bar{a})^p e^{\rho(it - \frac{aa^*}{2} - za^*)},$$

где $\bar{z}^p = \bar{z}_1^{p_1} \cdots \bar{z}_{n-1}^{p_{n-1}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Определим функции $f_{p,q}(z)$, $p, q \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$, как коэффициенты следующего разложения:

$$(\bar{z} + \bar{a})^p e^{-\rho za^*} = \sum_{q \in \mathbb{Z}_+^{n-1}} f_{p,q}(z) \bar{a}^q, \quad \bar{a}^q = \bar{a}_1^{q_1} \cdots \bar{a}_{n-1}^{q_{n-1}}, \quad (4.5)$$

или, что эквивалентно, как коэффициенты разложения

$$e^{b(z+a)^* - \rho z a^*} = \sum_{p,q \in \mathbb{Z}_+^{n-1}} (p!)^{-1} f_{p,q}(z) b^p \bar{a}^q. \quad (4.6)$$

В частности, $f_{p,0} = f_p$. Из определения следует, что

- 1) $f_{p,q}$ – полиномы относительно z_i и $\bar{z}_i$;
- 2) при любом фиксированном p функции $f_{p,q}$ линейно порождают $L_p(\rho)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. *Полиномы $f_{p,q}$ имеют следующее явное выражение:*

$$f_{p,q}(z) = p! \sum_s (-\rho)^{|q-s|} \frac{z^{q-s} \bar{z}^{p-s}}{s! (p-s)! (q-s)!}, \quad (4.7)$$

суммирование по $s \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$ таким, что $s \leq p$, $s \leq q$.

В самом деле, имеем:

$$\begin{aligned} e^{b(z+a)^* - \rho z a^*} &= e^{bz^*} e^{(b-\rho z)a^*} = \sum_r \frac{b^r \bar{z}^r}{r!} \sum_q \frac{(b-\rho z)^q \bar{a}^q}{q!} \\ &= \sum_{r,s,q} (-\rho)^{|q-s|} \frac{\bar{z}^r z^{q-s}}{r! s! (q-s)!} b^{r+s} \bar{a}^q \\ &= \sum_{p,q} \left(\sum_s \frac{(-\rho)^{|q-s|} \bar{z}^{p-s} z^{q-s}}{s! (p-s)! (q-s)!} \right) b^p \bar{a}^q. \end{aligned}$$

Отсюда следует (4.7).

ТЕОРЕМА 4.1. *Полиномы $f_{p,q}$, $|p| = m$, образуют ортогональный базис в $H_m(\rho)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, и*

$$\|f_{p,q}\|^2 = \frac{\rho^{|q|}}{q!} \|f_p\|^2 \quad \text{при любых } p, q. \quad (4.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ортогональность $f_{p,q}$ и $f_{p',q'}$ при $p \neq p'$ следует из взаимной ортогональности пространств $L_p(\rho)$. Далее, подставив в равенство $\langle T_h f_p, T_h f_p \rangle = \langle f_p, f_p \rangle$, выражение для $T_h f_p$, получаем:

$$\sum_{q,q'} \langle f_{p,q}, f_{p,q'} \rangle \bar{a}^q a^{q'} = \langle f_p, f_p \rangle e^{\rho a a^*} = \langle f_p, f_p \rangle \sum_q \frac{\rho^{|q|}}{q!} \bar{a}^q a^q.$$

Отсюда следует (4.8).

СЛЕДСТВИЕ. *Имеем для любых $p, q \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$:*

$$\|f_{pq}\|^2 = \frac{p!}{q!} \rho^{|q-p|}. \quad (4.9)$$

4.4. Формулы для операторов представления группы P_0 в базисе $\{f_{p,q}\}$ на $H(\rho)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. Операторы $T_{t,a}$, $(t, a) \in H$ имеют вид

$$T_{t,a}f_{p,q} = e^{\rho(it - \frac{a\bar{a}^*}{2})} \sum_{q'} c_{qq'}(\rho, a) f_{p,q'}, \quad (4.10)$$

где

$$c_{qq'}(\rho, a) = \sum_s \frac{(-\rho)^{|s|}}{s!(q-s)!(q'-q+s)!} a^s \bar{a}^{q'-q+s}, \quad (4.11)$$

суммирование по всем $s \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$ таким, что $s \leq q$ и $q' - q + s \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем для любого $b \in \mathbb{C}^{n-1}$:

$$\begin{aligned} \sum_q (T_{t,a}f_{p,q}(z))\bar{b}^q &= T_{t,a}[(\bar{z} + \bar{b})^p e^{-\rho z b^*}] \\ &= e^{\rho(it - \frac{a\bar{a}^*}{2} - z a^*)} (\bar{z} + \bar{b} + \bar{a})^p e^{-\rho(z+a)b^*} \\ &= e^{\rho(it - \frac{a\bar{a}^*}{2})} (\bar{z} + \bar{b} + \bar{a})^p e^{-\rho z(b+a)^*} e^{-\rho ab^*}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$(\bar{z} + \bar{b} + \bar{a})^p e^{-\rho z(b+a)^*} = \sum_{q'} f_{p,q'}(\bar{b} + \bar{a})^{q'} = \sum_{r,q'} \frac{q'!}{r!(q'-r)!} f_{p,q'} \bar{b}^r \bar{a}^{q'-r}$$

и $e^{-\rho ab^*} = \sum_s \frac{(-\rho)^{|s|}}{s!} a^s \bar{b}^s$, получаем:

$$\sum_q (T_{t,a}f_{p,q}(\rho, z))\bar{b}^q = e^{\rho(it - \frac{a\bar{a}^*}{2})} \sum_{r,s,q'} \frac{(-\rho)^{|s|}}{r!(q'-r)!s!} a^s \bar{a}^{q'-r} \bar{b}^{r+s}.$$

Отсюда следует предложение 4.5.

Для описания операторов T_d , $d = \text{diag}(\epsilon, u, \epsilon)$, где $|\epsilon| = 1$, $u \in U(n-1)$, воспользуемся полиномами, введенными ранее в п. 3.5:

$$L_{pq}(x) = \sum_{M(p,q)} \left(\prod \frac{x_{ij}^{l_{ij}}}{l_{ij}!} \right), \quad p, q \in \mathbb{Z}_+^{n-1},$$

где суммирование ведется по множеству $M(p, q)$ целочисленных $(n-1)$ -матриц $m = \|m_{ij}\|$, $m_{i,j} \geq 0$, удовлетворяющих условию

$$\sum_i l_{ij} = p_j \quad \text{для всех } j; \quad \sum_j l_{ij} = q_i \quad \text{для всех } i \quad (4.12)$$

(полиномы Люка). Отметим, что эти полиномы являются коэффициентами разложения

$$e^{axb} = \sum_{p,q} L_{pq}(x) a^q b^p, \quad a, b \in \mathbb{C}^{n-1}, \quad (4.13)$$

где $axb = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_i x_{ij} b_j$.

Очевидно, что $L_{pq}(x) = L_{qp}(x')$, где штрих обозначает транспонирование.

Заметим, что $L_{pq}(x)$ можно представить в виде суммы по подгруппе M_0 всех целочисленных матриц l , у которых сумма всех строк и сумма всех столбцов равны 0:

$$L_{pq}(x) = \sum_{l \in M_0} \left(\prod \frac{x_{ij}^{l_{ij} + l_{ij}^0}}{\Gamma(l_{ij} + l_{ij}^0 + 1)} \right),$$

где l^0 – произвольная фиксированная целочисленная матрица, удовлетворяющая условию (4.12).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6. Операторы T_d , $d = \text{diag}(\epsilon, u, \epsilon)$, где $|\epsilon| = 1$, $u \in U(n-1)$, действуют на базисные векторы по формуле

$$T_{\epsilon, u} f_{p, q} = p! \epsilon^{|q-p|} \sum_{p', q'} q'! L_{pp'}(\bar{u}) L_{qq'}(u) f_{p', q'}. \quad (4.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, имеем:

$$\begin{aligned} \sum_q (T_{\epsilon, e} f_{p, q}) \bar{a}^q &= T_{\epsilon, e} (\bar{z} + \bar{a})^p e^{-\rho z a^*} = (\bar{\epsilon} \bar{z} + \bar{a})^p e^{-\rho \epsilon z a^*} \\ &= \bar{\epsilon}^{|p|} (\bar{z} + \epsilon \bar{a})^p e^{-\rho \epsilon z a^*} = \bar{\epsilon}^{|p|} \sum_q f_{p, q} (\epsilon \bar{a})^q = \epsilon^{|q-p|} \sum_q f_{p, q} \bar{a}^q. \end{aligned}$$

Значит,

$$T_{\epsilon, e} f_{p, q} = \epsilon^{|q-p|} f_{p, q}. \quad (4.15)$$

Далее, для любого $u \in U(n-1)$

$$\begin{aligned} \sum_q (T_{1, u} f_{p, q}) \bar{a}^q &= (\bar{z} \bar{u} + \bar{a})^p e^{-\rho z u a^*} = ((z + \overline{au^*}) \bar{u})^p e^{-\rho z (au^*)^*} \\ &= p! \sum_{p'} L_{pp'}(\bar{u}) (z + \overline{au^*})^{p'} e^{-\rho z (au^*)^*} = p! \sum_{p', q'} L_{pp'}(\bar{u}) f_{p', q'} (\overline{au^*})^{q'} \\ &= p! \sum_{p', q', q} q'! L_{pp'}(\bar{u}) f_{p', q'} L_{q'q}(u') \bar{a}^q. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$T_{1, u} f_{p, q} = p! \sum_{p', q'} q'! L_{pp'}(\bar{u}) L_{q'q}(u') f_{p', q'}. \quad (4.16)$$

Комбинируя (4.15) и (4.16) и учитывая, что $L_{q'q}(u') = L_{qq'}(u)$, получаем (4.14).

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим следующее свойство полиномов L_{pq} . Матрицы

$$D^m(x) = \|D_{pq}(x)\|_{|p|=|q|=m}, \quad \text{где} \quad D_{pq}(x) = (p! q!)^{1/2} L_{pq}(x)$$

удовлетворяют соотношениям

$$D^m(xy) = D^m(x) D^m(y). \quad (4.17)$$

Соотношение (4.17) остается справедливым и при замене $(p! q!)^{1/2}$ в определении $D_{pq}(x)$ на $\prod_{i=1}^{n-1} p_i^{\alpha_i} q_i^{\beta_i}$, где $\alpha_i + \beta_i = 1$, $i = 1, \dots, n-1$, в частности, при замене $(p! q!)^{1/2}$ на $p!$ или $q!$.

4.5. Представления группы P в пространствах $H_{\pm}^{\lambda}$. Определим, по аналогии с пространствами $\mathcal{H}_{\pm}^{\lambda}$, пространства $H_{\pm}^{\lambda}$ как прямые интегралы

$$H_{-}^{\lambda} = \int_{-\infty}^0 H(\rho) |\rho|^{\lambda-1} d\rho, \quad H_{+}^{\lambda} = \int_{-\infty}^0 H(\rho) \rho^{\lambda-1} d\rho.$$

Подробнее, H_{+}^{λ} есть гильбертово пространство *всех* функций $f(\rho, z)$ на $\mathbb{R}_{+} \times \mathbb{C}^{n-1}$ с нормой

$$\|f\|^2 = \int_0^{\infty} \left(\int_{\mathbb{C}^{n-1}} |f(\rho, z)|^2 e^{-|\rho||z|^2} d\mu(z) \right) \rho^{n+\lambda-2} d\rho. \quad (4.18)$$

Аналогично определяется пространство H_{-}^{λ} .

Унитарные представления группы P_0 в пространствах $\mathcal{H}(\rho)$ индуцируют ее унитарные представления в пространствах $H_{\pm}^{\lambda}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.7. *Представления группы P_0 в пространствах $\mathcal{H}_{\pm}^{\lambda}$ продолжаются до унитарных представлений группы $P = P_0 \rtimes D_1$. Именно, операторы T_d , отвечающие элементам $d \in D$, задаются формулой (3.12):*

$$T_d f(\rho, z) = f(r^2 \rho, r^{-1} z) r^{\lambda} \quad \text{при} \quad d = \text{diag}(r^{-2}, e, r), \quad r > 0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.8. *Пространства $H_{\pm}^{\lambda}$ разлагаются в прямую сумму неприводимых относительно P попарно неэквивалентных подпространств:*

$$H_{\pm}^{\lambda} = \bigoplus_{m=0}^{\infty} (H_{\pm}^{\lambda})_m,$$

где

$$(H_{-}^{\lambda})_m = \int_{-\infty}^0 H_m(\rho) |\rho|^{\lambda-1} d\rho, \quad (H_{+}^{\lambda})_m = \int_0^{\infty} H_m(\rho) \rho^{\lambda-1} d\rho.$$

СЛЕДСТВИЕ. *Представления группы P в пространствах $(H_{+}^{\lambda})_m$, и, соответственно, в пространствах $(H_{-}^{\lambda})_m$, попарно неэквивалентны.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.9. *Теорема 3.2 о вложении пространств $\mathcal{H}_{\pm}^{\lambda}$ в их тензорные произведения переносится без изменения на пространства $H_{\pm}^{\lambda}$.*

4.6. Другая реализация представлений групп P_0 и P .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.10. *Любой эрмитов функционал в пространстве функций $f(z)$ на $\mathbb{C}^{n-1}$, инвариантный относительно операторов (3.2), (3.10) при $\rho > 0$ представления группы P_0 , можно представить в виде*

$$\Phi(f) = \int_{\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^{n-1}} f(z) \overline{f(z')} e^{\rho(z'z^* - |z|^2 - |z'|^2)} Q(\rho|z - z'|) d\mu(z) d\mu(z'), \quad (4.19)$$

где ядро Q – произвольная (обобщенная) функция.

В частности, если Q – дельта-функция, то этот функционал, с точностью до множителя, есть квадрат нормы в пространстве $H_{+}(\rho)$.

Предположим, что функционал Φ положительно определен, и обозначим через $H(Q, \rho)$ гильбертово пространство функций $f(z)$ на $\mathbb{C}^{n-1}$ с нормой $\|f\|^2 = \Phi(f)$. Формулы (3.2), (3.10) задают унитарное представление группы P_0 в этом пространстве.

Аналогично определяется представление в $H(Q, \rho)$ при $\rho < 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.11. Если $H(Q, \rho)$ содержит все мономы $z^k \bar{z}^l$, $k, l \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$ и порождено ими, то представление группы P_0 в $H(Q, \rho)$ эквивалентно ее представлению в пространстве $H(\rho)$.

Введем далее прямые интегралы гильбертовых пространств $H(Q, \rho)$:

$$H_+^\lambda(Q) = \int_0^\infty H(Q, \rho) \rho^{2n+\lambda-3} d\rho.$$

Представления группы P_0 в пространствах $H_+^\lambda(Q)$ продолжаются до унитарных представлений группы P теми же формулами, что и для пространства H_+^λ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.12. При всех Q , удовлетворяющих условию положительности и условиям предложения 4.11, и при любых λ представления группы P в пространствах $H_+^\lambda(Q)$ эквивалентны ее представлению в пространстве H_+^λ .

Глава III. Представления группы $U(n, 1)$

§ 5. Модели дополнительной серии неприводимых унитарных представлений группы $U(n, 1)$

Каждое представление дополнительной серии задается вещественным числом λ из интервала $0 < \lambda < 2n$. Опишем несколько моделей этих представлений.

5.1. Модель A: реализация в пространстве функций на единичной унитарной сфере $S = S^{2n-1}$ в $\mathbb{C}^n$. Единичная унитарная сфера в $\mathbb{C}^n$,

$$S: |\omega| \equiv |\omega_1|^2 + \dots + |\omega_n|^2 = 1,$$

является однородным пространством группы $U(n, 1)$. Именно, если эта группа реализована в матричной модели a (см. § 1), то ее действие на S задается формулой

$$\omega g = (\omega\beta + \delta)^{-1}(\omega\alpha + \gamma) \quad \text{при} \quad g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Представление дополнительной серии номера λ действует в гильбертовом пространстве L^λ функций $f(\omega)$ на S с нормой

$$\|f\|^2 = \int_{S \times S} |1 - \langle \omega, \omega' \rangle|^{-\lambda} f(\omega) \overline{f(\omega')} d\omega d\omega', \quad (5.1)$$

где $\langle \omega, \omega' \rangle = \omega_1 \bar{\omega}'_1 + \dots + \omega_n \bar{\omega}'_n$, а $d\omega$ — инвариантная мера на S .

ЗАМЕЧАНИЕ. В интервале $n < \lambda < 2n$ интеграл нужно понимать в смысле регуляризованного значения, см. [20].

Операторы представления T_g^λ , $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, действуют по формуле

$$T_g^\lambda f(\omega) = f(\omega g) |\omega\beta + \delta|^{\lambda-2n}. \quad (5.2)$$

Их групповое свойство вытекает из следующего соотношения для функции $b(\omega, g) = |\omega\beta + \delta|$:

$$b(\omega, g_1 g_2) = b(\omega, g_1) b(\omega g_1, g_2) \quad \text{для любых } g_1, g_2 \in U(n, 1)$$

(свойство 1-коцикла). Их унитарность следует из соотношений

$$|1 - \langle \omega, \omega' \rangle| = |1 - \langle \omega g, \omega' g \rangle| b(\omega, g) b(\omega', g)$$

и

$$\frac{d(\omega g)}{d\omega} = b^{-2n}(\omega, g) \quad \text{для любого } g \in U(n, 1).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Представления T^λ и T^μ дополнительной серии группы $U(n, 1)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $\lambda + \mu = 2n$ либо $\lambda = \mu$.*

Сплетающий оператор $R^\lambda: L^\lambda \rightarrow L^{2n-\lambda}$ имеет вид

$$(R^\lambda f)(\omega) = \int_S |1 - \langle \omega, \omega' \rangle|^{-\lambda} f(\omega) d\omega'.$$

5.2. Модель B : реализация в пространстве функций на группе Гейзенберга H . В модели B используется матричная модель b группы $U(n, 1)$.

Представление дополнительной серии с номером λ реализуется в гильбертовом пространстве L^λ функций $f(h) = f(t, z)$ на группе Гейзенберга H с нормой

$$\|f\|^2 = \int_{H \times H} R^{-\lambda}(h, h') f(h) \overline{f(h')} dh dh', \quad (5.3)$$

где $R(h_1, h_2) = |(h_1 h_2^{-1})_{31}|$, $dh = dt d\mu(z)$ – инвариантная мера на H .

В координатной форме:

$$R(h, h') = |\zeta + \bar{\zeta}' + zz'^*| = \left| i(t - t' + \text{Im}(zz'^*)) - \frac{1}{2}|z - z'|^2 \right|, \quad (5.4)$$

где $\zeta = it - \frac{zz^*}{2}$.

Для описания операторов представления определим действие группы $U(n, 1)$ на H равенством $h\bar{g} = h'$, где $h' \in H$ определяется из соотношения $hg = b^* h'$, $b^* \in sPs$ (подгруппа верхних клеточно треугольных матриц). В координатной форме:

$$(\zeta, z)\bar{g} = (\zeta', z'),$$

где

$$\zeta' = (\zeta g_{13} + z g_{23} + g_{33})^{-1} (\zeta g_{11} + z g_{21} + g_{31}), \quad (5.5)$$

$$z' = (\zeta g_{13} + z g_{23} + g_{33})^{-1} (\zeta g_{12} + z g_{22} + g_{32}). \quad (5.6)$$

Положим далее

$$\beta(h, g) = \beta(\zeta, z, g) = |\zeta g_{13} + z g_{23} + g_{33}| \quad \text{для любых } h \in H, \quad g \in U(n, 1). \quad (5.7)$$

Операторы представления T_g^λ группы $U(n, 1)$ в пространстве L^λ задаются формулой

$$T_g^\lambda f(h) = f(h\bar{g}) \beta^{\lambda-2n}(h, g). \quad (5.8)$$

В частности,

$$\begin{aligned} T_{t_0, z_0}^\lambda f(\zeta, z) &= f(\zeta + \zeta_0 - zz_0^*, z + z_0), \quad (\zeta_0, z_0) \in H, \\ T_{\epsilon, u}^\lambda f(\zeta, z) &= f(|\epsilon|^{-2}\zeta, \bar{\epsilon}^{-1}zu)|\epsilon|^{\lambda-2n}, \quad (\epsilon, u) \in D, \\ T_s^\lambda f(\zeta, z) &= f(1/\zeta, z/\zeta)|\zeta|^{\lambda-2n}. \end{aligned}$$

Их групповое свойство и унитарность следуют из соотношений

$$R(h, h') = R(h\bar{g}, h'\bar{g})\beta(h, g)\beta(h', g)$$

и

$$\frac{d(h\bar{g})}{dh} = \beta^{-2n}(h, g).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Сплетающий оператор $A^\lambda: L^\lambda \rightarrow L^{2n-\lambda}$ эквивалентных между собой представлений имеет вид*

$$A^\lambda f(h) = \int_H R^{-\lambda}(h, h')f(h') dh. \quad (5.9)$$

Таким образом, справедливы соотношения

$$T_g^{2n-\lambda} A^\lambda = A^\lambda T_g^\lambda \quad \text{для любого } g \in U(n, 1), \quad (5.10)$$

$$\|f\|_\lambda = c(\lambda) \|A^\lambda f\|_{2n-\lambda}, \quad (5.11)$$

т.е.

$$R^{-\lambda}(h_1, h_2) = c(\lambda) \int_{Z \times Z} R^{-\lambda}(h_1, h'_1) R^{-\lambda}(h_2, h'_2) R^{\lambda-2n}(h'_1, h'_2) dh'_1 dh'_2. \quad (5.12)$$

(Интеграл понимается в смысле регуляризованного значения.)

5.3. Связь между моделями A и B . В матричной модели b стационарная подгруппа точки $\omega_0 = (1, 0, \dots, 0)$ сферы S совпадает с подгруппой $P^* = sPs$ верхних клеточно треугольных матриц, т.е. $S = P^* \setminus U(n, 1)$. Отсюда следует, что группа H является сечением расслоения $\tau: U(n, 1) \rightarrow S$ над сферой с выколотой точкой,

$$\tau(h) = \omega_0 h, \quad h \in H.$$

Положим

$$\varphi(h) = f(\tau h).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. *Норма в пространстве функций на сфере S в координатах $h = (\zeta, z)$ имеет, с точностью до постоянного множителя, следующий вид:*

$$\|\varphi\|^2 = \int_{H \times H} |\zeta + \bar{\zeta}' + zz'^*|^{-\lambda} |1 - \zeta|^{\lambda-2n} |1 - \bar{\zeta}'|^{\lambda-2n} \varphi(h) \overline{\varphi(h')} dh dh'. \quad (5.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соотношения $\omega = \omega_0 h$ следует при $h = (\zeta, z)$, что

$$\omega_1 = \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta}, \quad \omega' = \frac{\sqrt{2}z}{1 - \zeta},$$

где $\omega' = (\omega_2, \dots, \omega_n)$. Отсюда получаем:

$$|1 - \langle \omega, \omega' \rangle| = 2|\zeta + \bar{\zeta}' + zz'^*| |1 - \zeta| |1 - \zeta'|.$$

Далее, легко убедиться, что мера $d\omega$ на S и мера dh на группе H связаны соотношением

$$d\omega = |1 - \zeta|^{-2n} dh.$$

Подставив эти выражения в формулу (5.1), получаем (5.13).

Сравнивая (5.13) с выражением (5.3) для нормы, заключаем:

СЛЕДСТВИЕ. Функция $F(\omega)$, $\omega \in S$, в модели A и функции $f(h)$, $h \in R$, в модели B связаны соотношением

$$f(h) = |1 - \zeta|^{\lambda-2n} F(\tau h).$$

5.4. Модель C : реализация в пространстве функций $\psi(\rho, z)$ на $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^{n-1}$. Модель C представлений дополнительной серии группы $U(n, 1)$ получается из предыдущей переходом от функций $f(h) = f(t, z)$ в модели B к функциям $\psi(\rho, z)$ на $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^{n-1}$, заданным равенством

$$\psi(\rho, z) = |\rho|^{-n+1} e^{\frac{i\rho|z|^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\rho t} f(t, z) dt.$$

Согласно формуле обращения для преобразования Фурье, имеем:

$$f(t, z) = |\rho|^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\rho, z) |\rho|^{n-1} e^{i\rho t - \frac{i\rho|z|^2}{2}} d\rho.$$

Для описания пространства L^λ и операторов представления в этой модели положим:

$$Q_\lambda(t) = t^{\frac{1-\lambda}{2}} e^{\frac{t}{2}} K_{\frac{1-\lambda}{2}}\left(\frac{|t|}{2}\right), \quad K_\nu - \text{функция Бесселя}, \quad (5.14)$$

$$a_\rho(z_1, z_2) = \begin{cases} z_1 z_2^* & \text{при } \rho > 0, \\ z_2 z_1^* & \text{при } \rho < 0, \end{cases} \quad (5.15)$$

$$R_\lambda(\rho, z_1, z_2) = e^{|\rho|(a_\rho(z_1, z_2) - |z_1|^2 - |z_2|^2)} Q_\lambda(|\rho| |z_1 - z_2|^2). \quad (5.16)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. В модели C представление T^λ дополнительной серии группы $U(n, 1)$ реализуется в гильбертовом пространстве L^λ функций $\psi(\rho, z)$, $\rho \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}^{n-1}$, с нормой

$$\|\psi\|^2 = \frac{2\pi^{1/2}}{\Gamma(\lambda/2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \|\psi\|_\rho^2 |\rho|^{\lambda-1} d\rho, \quad (5.17)$$

где

$$\|\psi\|_\rho^2 = |\rho|^{2n-2} \int_{\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^{n-1}} R_\lambda(\rho, z_1, z_2) \psi(\rho, z) \overline{\psi(\rho, z)} d\mu(z_1) d\mu(z_2). \quad (5.18)$$

Операторы представления группы $U(n, 1)$ задаются формулами

$$T_{t_0, z_0}^\lambda \psi(\rho, z) = e^{i\rho t_0 - |\rho|(\frac{|z_0|^2}{2} + a_\rho(z_0, z))} \psi(\rho, z + z_0) \quad \text{при } (t_0, z_0) \in H, \quad (5.19)$$

$$T_d^\lambda \psi(\rho, z) = \begin{cases} \psi(\rho, \epsilon z u) & \text{при } d = \text{diag}(\epsilon, u, \epsilon) \in D_0, \\ r^\lambda \psi(r^2 \rho, r^{-1} z) & \text{при } d = \text{diag}(r^{-1}, e, r) \in D_1, \end{cases} \quad (5.20)$$

$$T_s^\lambda \psi(\rho, z) = |\rho|^{-n+1} e^{\frac{|\rho|}{2}|z|^2} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\rho + \rho'|\zeta|^{-2}} |\rho'|^{n-1} |\zeta|^{\lambda-2n} e^{-\frac{|\rho||z|^2}{2|\zeta|^2}} \psi\left(\rho', \frac{z}{\zeta}\right) dt d\rho', \quad (5.21)$$

$$де \zeta = it - \frac{|z|^2}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формулы для операторов представления следуют непосредственно из их формул в предыдущей модели.

Приведем вывод формулы (5.17) для нормы в модели C .

Из определению нормы в модели B следует:

$$\|\psi\|^2 = \int F(\rho_1, z_1; \rho_2, z_2) \psi(\rho_1, z_1) \overline{\psi(\rho_2, z_2)} d\mu(z_1) d\mu(z_2) |\rho_1 \rho_2|^{n-1} d\rho_1 d\rho_2,$$

где

$$\begin{aligned} F(\rho_1, z_1; \rho_2, z_2) &= e^{-\frac{1}{2}(|\rho_1||z_1|^2 + |\rho_2||z_2|^2)} \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\rho_1 t_1 - \rho_2 t_2)} \left| (t_1 - t_2 + \text{Im}(z_1 z_2^*))^2 + \frac{1}{4}|z_1 - z_2|^4 \right|^{-\lambda/2} dt_1 dt_2 \\ &= \delta(\rho_1 - \rho_2) 2e^{-i\rho_1 \text{Im}(z_1 z_2^*) - \frac{|\rho_1|}{2}(|z_1|^2 + |z_2|^2)} \\ &\times \int_0^{+\infty} \left| t^2 + \frac{1}{4}|z_1 - z_2|^4 \right|^{-\lambda/2} \cos \rho_1 t dt. \end{aligned}$$

Согласно [45; с. 11, формула (7)],

$$\int_0^{+\infty} (t^2 + a^2)^{-\nu - \frac{1}{2}} \cos \rho t dt = \frac{\pi^{1/2}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \left(\frac{|\rho|}{2a} \right)^\nu K_\nu(a|\rho|).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} F(\rho_1, z_1; \rho_2, z_2) &= \delta(\rho_1 - \rho_2) \frac{2\pi^{1/2}}{\Gamma(\lambda/2)} e^{-i\rho_1 \text{Im}(z_1 z_2^*) - \frac{|\rho_1|}{2}(|z_1|^2 + |z_2|^2)} \\ &\times \left(\frac{|\rho|}{|z_1 - z_2|^2} \right)^{\frac{\lambda-1}{2}} K_{\frac{\lambda-1}{2}} \left(\frac{|\rho|}{2} |z_1 - z_2|^2 \right) \\ &= \delta(\rho_1 - \rho_2) \frac{2\pi^{1/2}}{\Gamma(\lambda/2)} e^{s(\rho, z_1, z_2)} Q_\lambda(|\rho| |z_1 - z_2|^2) |\rho|^{\lambda-1}, \end{aligned}$$

где

$$s(\rho, z_1, z_2) = -i\rho_1 \operatorname{Im}(z_1 z_2^*) - \frac{|\rho_1|}{2}(|z_1|^2 + |z_2|^2) - \frac{|\rho|}{2}|z_1 - z_2|^2.$$

Для доказательства формулы (5.17) достаточно заметить, что

$$s(\rho, z_1, z_2) = \begin{cases} \rho(z_2 z_1^* - |z_1|^2 - |z_2|^2) & \text{при } \rho > 0, \\ |\rho|(z_1 z_2^* - |z_1|^2 - |z_2|^2) & \text{при } \rho < 0. \end{cases} \quad (5.22)$$

Предложение 5.4 доказано.

5.5. Пространства $L^\lambda(\rho)$ и их разложение на подпространства, инвариантные относительно подгруппы P_0 . В дальнейшем будем исходить из модели C представлений дополнительной серии.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обозначим через L_+^λ и L_-^λ подпространства функций $\psi(\rho, z) \in L^\lambda$, сосредоточенных относительно ρ соответственно на полупрямых $\rho > 0$ и $\rho < 0$.

В силу определения, L_+^λ и L_-^λ – гильбертовы пространства с нормами

$$\|\psi\|_+^2 = \int_0^{+\infty} \|\psi\|_\rho^2 \rho^{\lambda-1} d\rho \quad \text{и} \quad \|\psi\|_-^2 = \int_{-\infty}^0 \|\psi\|_\rho^2 |\rho|^{\lambda-1} d\rho$$

и пространство L^λ является их прямой суммой:

$$L^\lambda = L_+^\lambda \oplus L_-^\lambda.$$

Из определения также следует, что L_+^λ и L_-^λ являются прямыми интегралами гильбертовых пространств $L^\lambda(\rho)$ функций $\psi(z)$ на $\mathbb{C}^{n-1}$ с нормами $\|\psi\|_\rho$:

$$L_+^\lambda = \int_0^{+\infty} L^\lambda(\rho) \rho^{\lambda-1} d\rho \quad \text{и} \quad L_-^\lambda = \int_{-\infty}^0 L^\lambda(\rho) |\rho|^{\lambda-1} d\rho.$$

Из явных формул для операторов представления в модели C следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.5. 1) Подпространства L_+^λ и L_-^λ инвариантны относительно подгруппы P .

2) Пространства $L^\lambda(\rho)$ инвариантны относительно подгруппы P_0 .

Согласно (5.20), (5.19), формулы для операторов T_d , $d = \operatorname{diag}(\epsilon, u, \epsilon) \in D$, и T_h , $h = (t_0, z_0) \in H$, не зависят от λ и имеют вид

$$T_d \psi(z) = \psi(\epsilon z u), \quad T_h \psi(z) = \begin{cases} e^{\rho(it_0 - \frac{|z_0|^2}{2} - z z_0^*)} \psi(z + z_0) & \text{при } \rho > 0, \\ e^{i\rho t_0 - |\rho|(\frac{|z_0|^2}{2} - z z_0^*)} \psi(z + z_0) & \text{при } \rho < 0. \end{cases}$$

Сравним представления группы P_0 в пространствах $L^\lambda(\rho)$ и $H(\rho)$, где $H(\rho)$ – пространство, введенное в п. 4.1.

Согласно предложению 4.2, пространство $H(\rho)$ разлагается в прямую сумму неприводимых и попарно неэквивалентных относительно подгруппы P_0 подпространств $H_m(\rho)$:

$$H(\rho) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} H_m(\rho).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.6. *Представления подгруппы P_0 в пространствах $L^\lambda(\rho)$ и $H(\rho)$ эквивалентны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что пространство $L^\lambda(\rho)$ линейно порождено теми же полиномами от z и $\bar{z}$, что и пространство $H(\rho)$, и при этом формулы для операторов представления подгруппы P_0 совпадают. Отсюда следует, что пространство $L^\lambda(\rho)$ эквивалентно подпространству в $H(\rho)$. Изоморфизм $L^\lambda(\rho)$ и $H(\rho)$ следует из невырожденности нормы на $L^\lambda(\rho)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пространство $L^\lambda(\rho)$ разлагается в прямую сумму неприводимых и попарно неэквивалентных относительно подгруппы P_0 подпространств $L_m^\lambda(\rho)$:*

$$L^\lambda(\rho) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} L_m^\lambda(\rho),$$

где $L_m^\lambda(\rho)$ – прообразы $H_m(\rho)$ при изоморфизме $J: L^\lambda(\rho) \rightarrow H(\rho)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Сплетающий оператор $J: L^\lambda(\rho) \rightarrow H(\rho)$ кратен единичному оператору на каждом подпространстве $L_m^\lambda(\rho)$, т.е.*

$$Jf = c_m f \quad \text{для любого } f \in L_m(\rho),$$

где c_m не зависит от f .

В силу изоморфизма $L^\lambda(\rho) \rightarrow H(\rho)$ в качестве ортогонального базиса на $L^\lambda(\rho)$ можно принять те же векторы $f_{p,q}(\rho, z)$, $p, q \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$, что и в $H(\rho)$ (теорема 4.1). Там было отмечено, что

$$\|f_{p,q}\|^2 = \frac{\rho^{|q|}}{q!} \|f_p\|^2 \quad \text{при любых } p, q, \text{ где } f_p = f_{p,0}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.7. *Норма вектора f_p в пространстве $L^\lambda(\rho)$ имеет вид*

$$\|f_p\|_L^2 = \text{const } \rho^{-|p|} p! \frac{\Gamma(n-\lambda)\Gamma(|p| + \frac{\lambda}{2})}{\Gamma(|p| + n - \frac{\lambda}{2})\Gamma(\frac{\lambda}{2})}. \quad (5.23)$$

Вывод формулы (5.23) см. в добавлении 2 (п. 8.4). Из (5.23) вытекает:

СЛЕДСТВИЕ. *Множитель c_m в определении сплетающего оператора $J: L^\lambda(\rho) \rightarrow H(\rho)$ задается равенством*

$$c_m^2 = c \frac{\Gamma(m+n-\frac{\lambda}{2})\Gamma^2(\frac{\lambda}{2})}{\Gamma(n-\lambda)\Gamma(m+\frac{\lambda}{2})}, \quad (5.24)$$

где множитель c не зависит от m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ. По определению, $c_m^2 = \|f\|_H^2 / \|f\|_L^2$, для любого $f \in L_m^\lambda(\rho)$, где $\|f\|_H$ и $\|f\|_L$ – нормы вектора f в подпространствах $H_m(\rho)$ и $L_m^\lambda(\rho)$ соответственно. Пусть $f = f_p$, $|p| = m$, т.е.

$$f_p = \begin{cases} \bar{z}^p & \text{при } \rho > 0, \\ z^p & \text{при } \rho < 0. \end{cases}$$

В этом случае равенство (5.24) следует непосредственно из выражения (5.23) для $\|f_p\|_L^2$ и равенства $\|f_p\|_H^2 = p! \rho^{-|p|}$.

5.6. Ограничение представлений дополнительной серии на подгруппу P . Изоморфизмы $L^\lambda(\rho) \rightarrow H(\rho)$ индуцируют изоморфизм гильбертовых пространств

$$J: L^\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} L^\lambda(\rho) |\rho|^{\lambda-1} d\rho \longrightarrow H^\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\rho) |\rho|^{\lambda-1} d\rho,$$

коммутирующий с представлением подгруппы P_0 . Из явных формул для операторов подгруппы $P = P_0 \rtimes D_1$ следует, что этот изоморфизм коммутирует с представлениями всей группы P в этих пространствах. Напомним, что H^λ разлагается в прямую сумму неприводимых попарно неэквивалентных относительно подгруппы P подпространств: $H^\lambda = \bigoplus_{m=0}^{\infty} (H^\lambda_{\pm})_m$. Отсюда следует:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.8. *Подпространства L^λ_+ и L^λ_- разлагаются в прямые суммы неприводимых попарно неэквивалентных относительно подгруппы P подпространств:*

$$L^\lambda_{\pm} = \bigoplus_{m=0}^{\infty} (L^\lambda_{\pm})_m,$$

где

$$(L^\lambda_+) = \int_0^{\infty} L^\lambda_m(\rho) \rho^{\lambda-1} d\rho, \quad (L^\lambda_-)_m = \int_{-\infty}^0 L^\lambda_m(\rho) |\rho|^{\lambda-1} d\rho.$$

В силу изоморфизма $L^\lambda \rightarrow H^\lambda$, с пространства L^λ на пространство H^λ можно перенести действие всей группы $U(n, 1)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем баргмановской моделью представлений дополнительной серии их реализацию в пространствах H^λ .

Отметим две особенности баргмановской модели:

- 1) в баргмановской модели существенно то, что неприводимые P_0 -инвариантные подпространства $H(\rho)$, входящие в разложение H^λ , не зависят от λ ;
- 2) в баргмановской модели действие операторов подгруппы P определено изначально, а потому для описания представления всей группы $U(n, 1)$ достаточно указать только действие оператора T_s .

Для описания операторов T_s в баргмановской модели надо воспользоваться разложением $L^\lambda = \bigoplus_{m=0}^{\infty} ((L^\lambda_+) \oplus (L^\lambda_-)_m)$ пространства L^λ на неприводимые попарно неэквивалентные относительно подгруппы P подпространства. Пусть $f_m^\pm \in (L^\lambda_{\pm})_m$ – компоненты вектора $f \in L^\lambda$ в подпространствах $(L^\lambda_{\pm})_m$. отождествим элементы из L^λ и H^λ и обозначим через T_s^L и T_s^H соответствующие операторы T_s . Тогда действие оператора T_s^H на H^λ задается формулой

$$T_s^H f = \sum_m c_m ((T_s^L f)_m^+ + (T_s^L f)_m^-),$$

где коэффициенты c_m задаются формулой (5.24).

5.7. Вакуумные векторы и сферические функции.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.9. *С точностью до множителя, вакуумный вектор f_λ в пространстве L^λ дополнительной серии имеет вид:*

$$f_\lambda(\omega) = \text{const} \quad \text{в модели } A, \quad (5.25)$$

$$f_\lambda(t, z) = \left(t^2 + \left(1 + \frac{|z|^2}{2} \right)^2 \right)^{\frac{\lambda}{2} - n} \quad \text{в модели } B, \quad (5.26)$$

$$f_\lambda(\rho, z) = |\rho|^{-\frac{\lambda-1}{2}} e^{\frac{i\rho}{2}|z|^2} \left(1 + \frac{|z|^2}{2} \right)^{\frac{\lambda+1}{2} - n} \times K_{n-\frac{\lambda+1}{2}} \left(|\rho| \left(1 + \frac{|z|^2}{2} \right) \right) \quad \text{в модели } C. \quad (5.27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для модели A утверждение следует из явных формул операторов представления. При переходе к модели B вектор const он переходит в вектор (5.26). Наконец, при переходе к модели C вектор (5.26) он переходит в вектор

$$f_\lambda(\rho, z) = |\rho|^{-n+1} e^{\frac{i\rho}{2}|z|^2} \int_0^\infty e^{-i\rho t} \left(t^2 + \left(1 + \frac{|z|^2}{2} \right)^2 \right)^{\frac{\lambda}{2} - n} dt.$$

На основании [45; с. 11, формула (7)] полученное выражение совпадает, с точностью до множителя, с (5.27).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.10. *В матричной модели a представления T^λ сферическая функция $\psi_\lambda(g)$ задается формулой*

$$\psi_\lambda(g) = |\delta|^{-\lambda} F\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, n, 1 - |\delta|^{-2}\right) \quad \text{при} \quad g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad (5.28)$$

где $F(a, b, c, x)$ – гипергеометрическая функция Гаусса (см. [43]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению,

$$\psi_\lambda(g) = c_\lambda \int_{S \times S} |\omega\beta + \delta|^{\lambda-2n} |1 - \langle \omega, \omega' \rangle|^{1-\lambda} d\omega d\omega' \quad \text{при} \quad g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Подобно случаю $O(n, 1)$ это выражение приводится к виду

$$\psi_\lambda(g) = c_\lambda \int_S |\omega_1 \operatorname{sh} \tau + \operatorname{ch} \tau|^{\lambda-2n} d\omega = c_\lambda (\operatorname{ch} \tau)^{\lambda-2n} \int_S |1 + a\omega_1|^{\lambda-2n} d\omega,$$

где $\operatorname{ch} \tau = |\delta|$, $a = \frac{\operatorname{sh} \tau}{\operatorname{ch} \tau}$.

Представим этот интеграл в виде степенного ряда относительно a . Имеем:

$$\begin{aligned} |1 + a\omega_1|^{\lambda-2n} &= (1 + a\omega_1)^{\frac{\lambda}{2} - n} (1 + a\bar{\omega}_1)^{\frac{\lambda}{2} - n} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n - \frac{\lambda}{2} + k)}{\Gamma(n - \frac{\lambda}{2}) k!} (-a\omega_1)^k \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n - \frac{\lambda}{2} + l)}{\Gamma(n - \frac{\lambda}{2}) l!} (-a\bar{\omega}_1)^l. \end{aligned}$$

Подставив это выражение в интеграл и учтя, что интегралы от мономов $\omega_1 \bar{\omega}_1^l$, где $k \neq l$, равны нулю, мы получим:

$$\psi_\lambda(g) = c_\lambda (\text{ch } \tau)^{\lambda-2n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma^2(n - \frac{\lambda}{2} + k)}{(k!)^2} \left(\int_S |\omega_1^k|^2 d\omega \right) a^{2k}.$$

Поскольку $\int_S |\omega_1^k|^2 d\omega = \frac{k!}{(k+n-1)!}$ (см. добавление 2), то

$$\psi_\lambda(g) = c_\lambda (\text{ch } \tau)^{\lambda-2n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma^2(n - \frac{\lambda}{2} + k)}{k! (n+k-1)!} a^{2k} = c_\lambda (\text{ch } \tau)^{\lambda-2n} F\left(n - \frac{\lambda}{2}, n - \frac{\lambda}{2}, n, a^2\right),$$

где $F(a, b, c, x)$ – гипергеометрическая функция Гаусса. Так как $\psi_\lambda(e) = 1$, то $c_\lambda = 1$. Далее, в силу соотношений Куммера для функции Гаусса [43], имеем:

$$F\left(n - \frac{\lambda}{2}, n - \frac{\lambda}{2}, n, a^2\right) = (1 - a^2)^{\lambda-n} F\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, n, a^2\right).$$

Отсюда следует (5.28).

ЗАМЕЧАНИЕ. Приведенное соотношение для функции Гаусса эквивалентно утверждению, что сферические функции представлений с пометками λ и $2n - \lambda$ совпадают (ввиду их эквивалентности).

§ 6. Модели особых представлений группы $U(n, 1)$

6.1. Определение особых представлений. Подобно случаю $O(n, 1)$, особые представления группы $U(n, 1)$ возникают как предельные при $\lambda \rightarrow 0$ или $\lambda \rightarrow 2n$ к представлениям T^λ дополнительной серии.

Опишем отдельно случаи $\lambda = 0$ и $\lambda = 2n$.

При $\lambda = 0$ норма $\|f\|_\lambda$ вырождается на подпространстве L^0 коразмерности 1, и на этом подпространстве можно ввести норму

$$\|f\|^2 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{d\|f\|_\lambda^2}{d\lambda}.$$

В отличие от случая $O(n, 1)$ эта норма при $n > 1$ вырождается на некотором бесконечномерном подпространстве $L_0 \subset L^0$.

ТЕОРЕМА 6.1. *Полное факторпространство L^0/L_0 по норме $\|f\|$ распадается в прямую сумму двух неприводимых неэквивалентных подпространств. Представления группы $U(n, 1)$ в этих пространствах являются особыми представлениями.*

Отметим, что на подпространстве L_0 определена невырожденная норма, заданная равенством

$$\|f\|_0^2 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{d^2\|f\|_\lambda^2}{d\lambda^2},$$

и представление группы $U(n, 1)$ в гильбертовом пространстве с этой нормой неприводимо.

Пространство L , предельное к пространствам L^λ дополнительной серии при $\lambda \rightarrow 2n$, наделено двойственной структурой. Именно, $\|f\|_\lambda$ вырождается при $\lambda = 2n$ и $n > 1$ на подпространстве L_{2n} бесконечной коразмерности. В пространстве L_{2n} определена невырожденная норма

$$\|f\|^2 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{d\|f\|_\lambda^2}{d\lambda},$$

вырожденная на одномерном подпространстве L^{2n} .

ТЕОРЕМА 6.2. *Полное факторпространство L_{2n}/L^{2n} по этой норме распадается в прямую сумму двух неприводимых неэквивалентных подпространств. Представления группы $U(n, 1)$ в этих пространствах являются особыми представлениями, эквивалентными определенным выше при $\lambda = 0$.*

Приведем несколько реализаций особых представлений.

6.2. Модель А: реализация в пространстве функций на унитарной сфере $S \subset \mathbb{C}^n$ при $\lambda \rightarrow 0$. Предполагается, что группа $U(n, 1)$ реализована в матричной модели a .

Обозначим через L подпространство функций $f(\omega)$ на единичной унитарной сфере $S \subset \mathbb{C}^n$, удовлетворяющих условию

$$\int_S f(\omega) d\omega = 0,$$

где $d\omega$ – инвариантная мера на S . Определим действие группы $U(n, 1)$ на L равенством

$$T_g f(\omega) = f(\omega g) |b(\omega, g)|^{-2n},$$

где

$$\omega g = (\omega\beta + \delta)^{-1} (\omega\alpha + \gamma), \quad b(\omega, g) = \omega\beta + \delta \quad \text{при} \quad g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}. \quad (6.1)$$

Инвариантность L относительно операторов T_g следует из равенства $d(\omega g) = |\omega\beta + \delta|^{-2n} d\omega$.

Введем на L скалярные произведения:

$$\langle f_1, f_2 \rangle_- = - \int_{S \times S} \log(1 - \langle \omega, \omega' \rangle) f_1(\omega) \overline{f_2(\omega')} d\omega d\omega', \quad (6.2)$$

$$\langle f_1, f_2 \rangle_+ = - \int_{S \times S} \log(1 - \overline{\langle \omega, \omega' \rangle}) f_1(\omega) \overline{f_2(\omega')} d\omega d\omega', \quad (6.3)$$

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \langle f_1, f_2 \rangle_+ + \langle f_1, f_2 \rangle_- = -2 \int_{S \times S} \log |1 - \langle \omega, \omega' \rangle| f_1(\omega) \overline{f_2(\omega')} d\omega d\omega', \quad (6.4)$$

где $\langle \omega, \omega' \rangle = \omega_1 \overline{\omega'_1} + \dots + \omega_n \overline{\omega'_n}$.

Заметим, что $\langle f_1, f_2 \rangle$ получается предельным переходом из скалярных произведений в пространствах представлений дополнительной серии:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Нормы $\|f\|_{\pm} = \langle f, f \rangle_{\pm}^{1/2}$ представимы в виде

$$\begin{aligned}\|f\|_{-}^2 &= \sum_{k>0} \frac{(|k|-1)!}{k!} \left| \int_S \omega^k f(\omega) d\omega \right|^2, \\ \|f\|_{+}^2 &= \sum_{k>0} \frac{(|k|-1)!}{k!} \left| \int_S \bar{\omega}^k f(\omega) d\omega \right|^2.\end{aligned}\tag{6.5}$$

Здесь обозначено: $k! = k_1! \cdots k_n!$, $|k| = k_1 + \cdots + k_n$, $\omega^k = \omega_1^{k_1} \cdots \omega_n^{k_n}$.

В самом деле, для доказательства, например, первого равенства достаточно воспользоваться разложением в ряд:

$$\log(1 - \langle \omega, \omega' \rangle) = - \sum_{k>0} \frac{1}{|k|} \frac{|k|!}{k!} \omega^k \bar{\omega}'^k.$$

СЛЕДСТВИЕ. 1) Скалярные произведения $\langle f, f \rangle_{\pm}$ знакоопределены на L .

2) Условия $\|f\|_{+} = 0$ и $\|f\|_{-} = 0$ эквивалентны соответственно условиям

$$\int_S \omega^k f(\omega) d\omega = 0 \quad \text{и} \quad \int_S \bar{\omega}^k f(\omega) d\omega = 0 \quad \text{при всех } k > 0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. Операторы T_g сохраняют нормы $\|f\|_{\pm}$, т.е. $\|T_g f\|_{\pm} = \|f\|_{\pm}$ для всех $g \in U(n, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $|\omega\beta + \delta|^{-2n} d\omega = d(\omega g)$, имеем

$$\begin{aligned}\|T_g f\|_{-}^2 &= - \int_{S \times S} \log(1 - \langle \omega, \omega' \rangle) f(\omega g) \overline{f(\omega' g)} d(\omega g) d(\omega' g) \\ &= - \int_{S \times S} \log(1 - \langle \omega g^{-1}, \omega' g^{-1} \rangle) f(\omega) \overline{f(\omega')} d\omega d\omega' .\end{aligned}$$

Заметим, что

$$1 - \langle \omega g^{-1}, \omega' g^{-1} \rangle = (1 - \langle \omega, \omega' \rangle) b^{-1}(\omega, g^{-1}) \overline{b^{-1}(\omega', g^{-1})}.$$

Следовательно,

$$\|T_g f\|_{-}^2 = \|f\|_{-}^2 - \int_{S \times S} (\log b(\omega g^{-1}) + \log \overline{b(\omega' g^{-1})}) f(\omega) \overline{f(\omega')} d\omega d\omega'.$$

Поскольку $f \in L$, второе слагаемое этой суммы равно нулю.

Для нормы $\|f\|_{+}$ доказательство то же.

СЛЕДСТВИЕ. Следующие подпространства в L инвариантны относительно действия группы $U(n, 1)$:

$$L_{+} = \{f \in L \mid \|f\|_{-} = 0\}, \quad L_{-} = \{f \in L \mid \|f\|_{+} = 0\}, \quad L_0 = L_{+} \cap L_{-}.$$

$L_0 \subset L$ – подпространство функций с нормой $\|f\| = 0$. В силу определения, норма $\|f\|$ невырождена на факторпространстве L/L_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обозначим через $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_-$ комплексные гильбертовы пространства, полученные пополнением L/L_0 , L_+/L_0 и L_-/L_0 по норме $\|f\|$.

Очевидно, что

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_+ \oplus \mathcal{L}_-$$

и что

$$\|f\| = \|f\|_+ \quad \text{на } \mathcal{L}_+; \quad \|f\| = \|f\|_- \quad \text{на } \mathcal{L}_-.$$

В результате получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 6.3. В модели A с $\lambda = 0$ двух особых представлений T^+ и T^- группы $U(n, 1)$:

- 1) прямая сумма представлений T^+ и T^- реализуется в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}$ – пополнении по норме

$$\|f\|^2 = -2 \int_{S \times S} \log |1 - \langle \omega, \omega' \rangle| f(\omega) \overline{f(\omega')} d\omega d\omega'$$

факторпространства L/L_0 , где L – пространство функций $f(\omega)$ на сфере $S = S^{2n-1}$ со средним $\int_S f(\omega) d\omega = 0$, а L_0 – подпространство функций с нормой 0;

- 2) подпространства $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_-$ особых представлений суть $\mathcal{L}_\pm = \{f \in \mathcal{L} \mid \|f\|_\mp = 0\}$, где $\|f\|_+$ и $\|f\|_-$ даются предложением 6.1;
- 3) операторы представления группы $U(n, 1)$ действуют в $\mathcal{L}_\pm$ по формуле

$$T_g^\pm f(\omega) = f(\omega g) |b(\omega, g)|^{-2n} \pmod{L_0},$$

$$\text{где } \omega g = (\omega\beta + \delta)^{-1}(\omega\alpha + \gamma), \quad b(\omega, g) = \omega\beta + \delta \quad \text{при } g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

6.3. Структура особых представлений в модели A при $\lambda = 0$. Опишем подпространства L , L_+ , L_- и L_0 , определенные в п. 6.2, в терминах порождающих их элементов. Заметим, что исходное пространство $\tilde{L}$ линейно порождено мономами $\omega^k \bar{\omega}^l = \prod \omega_i^{k_i} \bar{\omega}_i^{l_i}$. Будем писать $k > l$, если $k_i \geq l_i$ и $k \neq l$. Обозначим далее

$$c_k = \int_S |\omega^k|^2 d\omega, \quad k \in \mathbb{Z}_+^n,$$

явное выражение для c_k см. ниже.

Из описания норм $\|f\|_\pm$ следует:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3. Имеем ($k, l \in \mathbb{Z}_+^n$):

- 1) если $k > l$, то $\|\omega^k \bar{\omega}^l\|_+ \neq 0$ и $\|\omega^k \bar{\omega}^l\|_- = 0$;
- 2) если $l > k$, то $\|\omega^k \bar{\omega}^l\|_- \neq 0$ и $\|\omega^k \bar{\omega}^l\|_+ = 0$;
- 3) если $k \not> l$, $l \not> k$, $k \neq l$, то $\|c_{k+l} \omega^k - c_k \omega^{k+l} \bar{\omega}^l\|_\pm = \|c_{k+l} \bar{\omega}^k - c_k \omega^l \bar{\omega}^{k+l}\|_\pm = 0$.

СЛЕДСТВИЕ. Справедливы следующие утверждения.

- 1) Подпространство L линейно порождено мономами $\omega^k \bar{\omega}^l$, $k \neq l$, и биномами $c_k - c_0 |\omega^k|^2$.
- 2) Подпространство L_0 линейно порождено мономами $\omega^k \bar{\omega}^l$, $k \neq l$, где $k \not> l$, $l \not> k$, $k \neq l$, и биномами $c_{k+l} \omega^k - c_k \omega^{k+l} \bar{\omega}^l$, $c_{k+l} \bar{\omega}^k - c_k \omega^l \bar{\omega}^{k+l}$, $k, l \in \mathbb{Z}_+^n$.

- 3) Факторпространства L_+/L_0 и L_-/L_0 линейно порождены соответственно мономами ω^k и мономами $\bar{\omega}^k$, $k > 0$.

Заметим, что $L_0 = 0$ при $n = 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.4. Мономы ω^k и $\bar{\omega}^k$, $k > 0$, образуют ортогональные базисы соответственно в $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_-$ с нормами

$$\|\omega^k\|_+^2 = \|\bar{\omega}^k\|_-^2 = \frac{4\pi^{2n}k! (|k| - 1)!}{[(|k| + n - 1)!]^2}. \quad (6.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что эти мономы линейно порождают соответствующие пространства, следует из предложения 6.3 (следствие). Их ортогональность следует из явных формул (6.5) для нормы. Из тех же явных формул и из (8.6) следует, что

$$\|\omega^k\|_+^2 = \|\bar{\omega}^k\|_-^2 = \frac{(|k| - 1)!}{k!} \left| \int_S |\omega^k|^2 d\omega \right|^2.$$

Так как

$$\int_S |\omega^k|^2 d\omega = \frac{2\pi^n k!}{(|k| + n - 1)!}, \quad k \in \mathbb{Z}_+^n,$$

отсюда следует (8.6). (Вывод последней формулы см. в добавлении 2, п. 8.2.)

СЛЕДСТВИЕ. Элементы пространств $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_-$ можно интерпретировать как граничные значения функций, регулярных аналитических (соответственно антианалитических) внутри единичного шара в $\mathbb{C}^n$. В этой интерпретации, если функция f внутри шара задана рядом $f(z) = \sum_{k>0} a_k z^k$, то

$$\|f\|_+^2 = 4\pi^{2n} \sum_{k>0} \frac{k! (|k| - 1)!}{[(|k| + n - 1)!]^2} |a_k|^2.$$

6.4. Формулы для 1-коциклов $U(n, 1) \rightarrow \mathcal{L}$ и $U(n, 1) \rightarrow \mathcal{L}_\pm$ в модели А. Найдем явные формулы нетривиальных 1-коциклов на группе $U(n, 1)$, связанных с двумя особыми представлениями группы $U(n, 1)$ в пространствах $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_-$.

Заметим, что при $\lambda = 0$ нетривиальный 1-коцикл $a: U(n, 1) \rightarrow \mathcal{L} = \mathcal{L}_+ \oplus \mathcal{L}_-$ задается равенством

$$a(\omega, g) = T_g f_0 - f_0 = |\omega\beta + \delta|^{-2n} - 1 \quad \text{при} \quad g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

(поскольку вектор $f_0(\omega) \equiv 1$ инвариантен относительно максимальной компактной подгруппы группы $U(n, 1)$ и $f_0 \notin \mathcal{L}$).

Очевидно, 1-коциклы $a^\pm: U(n, 1) \rightarrow \mathcal{L}_\pm$, связанные с особыми представлениями, являются проекциями коцикла a на соответствующие подпространства,

$$a(\omega, g) = a^+(\omega, g) + a^-(\omega, g), \quad a^\pm \in \mathcal{L}_\pm. \quad (6.8)$$

Найдем их явные выражения при $\lambda = 0$ и $\lambda = 2n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.5. При $\lambda = 0$ нетривиальные 1-коциклы $a^\pm(\omega, g)$ задаются (по модулю L_0) следующей формулой:

$$a^+(\omega, g) = \overline{a^-(\omega, g)} = \delta^n (\omega\beta + \delta)^{-n} - 1. \quad (6.9)$$

В частности, $a^+(\omega, g) = -\frac{\omega\beta}{\omega\beta + \delta}$ при $n = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положив $\gamma = \beta\delta^{-1}$, имеем:

$$\begin{aligned} a(\omega, g) &= |\delta|^{-2n} (1 + \omega\gamma)^{-n} (1 + \overline{\omega\gamma})^{-n} - 1 \\ &= |\delta|^{-2n} \sum_{k,l} (-1)^{|k+l|} \frac{(|k| + n - 1)! (|l| + n - 1)!}{k! l!} \omega^k \gamma^k \overline{\omega}^l \overline{\gamma}^l - 1. \end{aligned}$$

Отсюда, поскольку $\omega^k \overline{\omega}^l \neq 0$ на $\mathcal{L}_+$ только при $k > l$, получаем:

$$a^+(\omega, g) = |\delta|^{-2n} \sum_{k>0} \sum_l (-1)^{|k|} \frac{(|k| + n - 1)! (|l| + n - 1)!}{(k + l)! l!} \omega^{k+l} \overline{\omega}^l \gamma^{k+l} \overline{\gamma}^l. \quad (6.10)$$

Согласно предложению 6.3, имеем на $\mathcal{L}_+$

$$\omega^{k+l} \overline{\omega}^l = \frac{c_{k+l}}{c_k} \omega^k = \frac{(k + l)!}{(|k| + l| + n - 1)!} \frac{(|k| + n - 1)!}{k!} \omega^k.$$

Подставив это выражение в (6.10), получим:

$$\begin{aligned} a^+(\omega, g) &= |\delta|^{-2n} \sum_{k>0} (-1)^{|k|} \frac{(|k| + n - 1)!}{k!} \omega^k \gamma^k \sum_l \frac{(|l| + n - 1)!}{l!} \gamma^l \overline{\gamma}^l \\ &= |\delta|^{-2n} ((1 + \omega\gamma)^{-n} - 1) (1 - \gamma^* \gamma)^{-n}. \end{aligned}$$

Заметим, что $1 - \gamma^* \gamma = |\delta|^{-2} (|\delta|^2 - \beta^* \beta) = |\delta|^{-2}$. Следовательно:

$$a^+(\omega, g) = (1 + \omega\gamma)^{-n} - 1 = \delta^n (\omega\beta + \delta)^{-n} - 1.$$

Предложение 6.5 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.6. При $\lambda = 2n$ нетривиальный 1-коцикл $a^+(\omega, g)$, с точностью до множителя, задается следующей формулой:

$$a^+(\omega, g) = e^{-\delta^{-1} \omega\beta} - 1; \quad (6.11)$$

коцикл a^- получается из a^+ комплексным сопряжением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формул для $a^+(\omega, g)$ при $\lambda = 0$ и для сплетающего оператора $R: L^0 \rightarrow L^{2n}$ следует:

$$a^+(\omega, g) = \int_S \log(1 - \langle \omega, \omega' \rangle) (1 + \omega' \gamma)^{-n} d\omega',$$

где $\gamma = \beta\delta^{-1}$. Разлагая $\log(1 - \langle \omega, \omega' \rangle)$ и $(1 + \omega' \gamma)^{-n}$ в степенные ряды и отбрасывая слагаемые, дающие при интегрировании 0, получаем:

$$\begin{aligned} a^+(\omega, g) &= \sum_{k>0} \left[\frac{(-1)^{|k|} (n + |k| - 1)!}{(n - 1)! (k!)^2} \omega^k \gamma^k \int_S |\omega'^k|^2 d\omega' \right] \\ &= \frac{2\pi^n}{(n - 1)!} \sum_{k>0} \frac{(-1)^{|k|}}{k!} \omega^k \gamma^k = \frac{2\pi^n}{(n - 1)!} (e^{-\omega\gamma} - 1). \end{aligned}$$

Предложение 6.6 доказано.

6.5. “Странное” неприводимое представление группы $U(n, 1)$ в пространстве $\mathcal{L}_0$. Кроме двух особых представлений, существует еще одно неприводимое унитарное представление группы $U(n, 1)$, получаемое из представлений дополнительной серии предельным переходом при $\lambda \rightarrow 0$ или $\lambda \rightarrow 2n$ (“странное представление”, см. [46]–[48]). Отметим, что аналога этого представления для групп $O(n, 1)$ не существует.

Построим это представление, исходя из модели A представлений дополнительной серии при $\lambda \rightarrow 0$.

Определим скалярное произведение на подпространстве $L_0 = L_+ \cap L_-$ равенством

$$\langle f_1, f_2 \rangle_0 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{d^2 \langle f_1, f_2 \rangle_\lambda}{d\lambda^2} = \int_{S \times S} \log^2 |1 - \langle \omega, \omega' \rangle| f_1(\omega) \overline{f_2(\omega')} d\omega d\omega'. \quad (6.12)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.7. Норма $\|f\|_0 = \langle f_1, f_2 \rangle_0^{1/2}$ представима в виде

$$\|f\|_0^2 = \sum'_{k, l > 0} c_k c_l \left| \int_S \omega^k \bar{\omega}^l f(\omega) d\omega \right|^2, \quad (6.13)$$

где $c_k = \frac{(|k|-1)!}{k!}$. Суммирование ведется только по мультииндексам $k > 0$ и $l > 0$, не связанным соотношением $k > l$ или $l > k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем:

$$\begin{aligned} \log^2 |1 - \langle \omega, \omega' \rangle| &= \left(\sum_{k > 0} c_k \omega^k \bar{\omega}'^k + \sum_{l > 0} c_l \bar{\omega}^l \omega'^l \right)^2 \\ &= \sum_{k, k' > 0} c_k c_{k'} \omega^{k+k'} \bar{\omega}'^{k+k'} + \sum_{l, l' > 0} c_l c_{l'} \bar{\omega}^{l+l'} (\omega')^{l+l'} + \sum_{k, l > 0} c_k c_l \omega^k \bar{\omega}^l \omega'^k \bar{\omega}'^l. \end{aligned}$$

Подставим это выражение в равенство (6.12). Поскольку $L_0 = L_+ \cap L_-$, члены двух первых сумм дают нулевых слагаемые. То же самое относится и к членам третьей суммы, у которых $k > l$ или $l > k$. Таким образом, имеет место равенство (6.13).

СЛЕДСТВИЕ. Норма $\|f\|_0$ положительно определена на L_0 .

Обозначим через $\mathcal{L}_0$ комплексное гильбертово пространство, полученное пополнением L_0 по норме $\|f\|_0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.8. Норма $\|f\|_0$ инвариантна относительно операторов T_g ; таким образом, операторы T_g образуют унитарное представление группы $U(n, 1)$ в пространстве $\mathcal{L}_0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.9. Представление группы $U(n, 1)$ в пространстве $\mathcal{L}_0$ неприводимо.

6.6. Модель A особых представлений в пространстве функций на унитарной сфере при $\lambda \rightarrow 2n$. В модели A с $\lambda = 2n$ прямая сумма $\mathcal{L} = \mathcal{L}_+ \oplus \mathcal{L}_-$ особых представлений реализуется в факторпространстве L^{2n}/L_{2n} по подпространству констант с нормой

$$\|f\|^2 = (-1)^n \int_{S \times S} \delta^{(n)}(1 - \langle \omega, \omega' \rangle) f(\omega) \overline{f(\omega')} d\omega d\omega', \quad (6.14)$$

где $\delta^{(n)}$ – производная дельта-функции на сфере S ; эта дельта-функция задается равенством

$$\int_S \delta(1 - \langle \omega, \omega' \rangle) f(\omega') d\omega' = f(\omega).$$

Операторы представления задаются формулой

$$(T_g f)(\omega) = f(\omega g).$$

Сплетающий оператор R от модели A с $\lambda = 0$ к модели A с $\lambda = 2n$ имеет вид

$$(Rf)(\omega) = \int_S \log(|1 - \langle \omega, \omega' \rangle|) f(\omega') d\omega'.$$

Отметим, что норму в модели A с $\lambda = 0$ можно представить в форме интеграла по сфере S :

$$\|f\|^2 = \int_S (Rf)(\omega) \overline{f(\omega)} d\omega.$$

В рассматриваемой модели с $\lambda = 2n$ подпространства $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_-$ совпадают с подпространствами функций, граничных к аналитическим и соответственно антианалитическим функциям в единичном шаре $D \subset \mathbb{C}^n$: $|z|^2 \equiv |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 < 1$.

Особые представления T^+ и T^- можно реализовать непосредственно в гильбертовых пространствах аналитических и антианалитических функций на D . Для этого достаточно воспользоваться следующими утверждениями:

- 1) шар D является однородным пространством относительно действия $z \rightarrow zg$ группы $U(n, 1)$, где $zg = (\omega\beta + \delta)^{-1}(\omega\alpha + \gamma)$;
- 2) на D существует $U(n, 1)$ -инвариантная мера: $(1 - |z|^2)^{-n-1} d\mu(z)$, где $d\mu(z)$ – лебегова мера на D (см. [49]).

ТЕОРЕМА 6.4. *Особое представление $T = T^+$ (соответственно $T = T^-$) группы $U(n, 1)$ эквивалентно представлению в гильбертовом пространстве функций на шаре D , аналитических (соответственно антианалитических) на D , факторизованном по подпространству констант, с нормой*

$$\|f\|^2 = \int_D |f(z)|^2 \delta^{(n)}(1 - |z|^2) d\mu(z).$$

Операторы представления имеют вид $(T_g f)(z) = f(zg)$.

Отметим, что векторы z^k , $k \in \mathbb{Z}_+^n$, образуют ортогональный базис в этом пространстве с нормой $\|z^k\|^2 = \frac{(|k| + n - 1)!}{(|k| - 1)!}$.

6.7. Модель B : реализация в пространстве функций на группе Гейзенберга H . Модель B двух особых представлений группы $U(n, 1)$ получается из модели A переходом от функций $F(\omega)$ на сфере S к функциям $f(h) = f(\zeta, z)$, $\zeta = it - \frac{|z|^2}{2}$, на группе Гейзенберга H по формулам

$$f(\zeta, z) = |1 - \zeta|^{-2n} F(\omega),$$

где

$$\omega = \left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}, \frac{\sqrt{2}z_1}{1-\zeta}, \dots, \frac{\sqrt{2}z_{n-1}}{1-\zeta} \right).$$

Опишем модель B только при $\lambda = 0$ (для $\lambda = 2n$ описание аналогично). В этом описании используется матричная модель b группы $U(n, 1)$ (см. § 1).

ТЕОРЕМА 6.5. В модели B с $\lambda = 0$ двух особых представлений T^+ и T^- группы $U(n, 1)$:

- 1) прямая сумма представлений T^+ и T^- реализуется в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}$ – пополнении по норме

$$\|f\|^2 = - \int_{H \times H} \log R(h, h') f(h) \overline{f(h')} dh dh', \quad (6.15)$$

где dh – инвариантная мера на H , а

$$R(h, h') = R(\zeta, z; \zeta', z') = |\zeta + \overline{\zeta'} + zz^*|, \quad (6.16)$$

факторпространства L/L_0 , где L – пространство функций $f(h)$ на группе H со средним $\int_H f(h) dh = 0$, а L_0 – подпространство функций с нормой 0;

- 2) операторы представления $T = T^+ \oplus T^-$ имеют в координатах $h = (\zeta, z)$ на H следующий вид:

$$T_g f(\zeta, z) = f(\zeta', z') |b(\zeta, z; g)|^{-2n} \pmod{L_0}, \quad (6.17)$$

где

$$\zeta' = (\zeta g_{13} + z g_{23} + g_{33})^{-1} (\zeta g_{11} + z g_{21} + g_{31}), \quad (6.18)$$

$$z' = (\zeta g_{13} + z g_{23} + g_{33})^{-1} (\zeta g_{12} + z g_{22} + g_{32}), \quad (6.19)$$

$$b(\zeta, z; g) = \zeta g_{13} + z g_{23} + g_{33}; \quad (6.20)$$

- 3) подпространства $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_-$ особых представлений задаются условиями $\mathcal{L}_\pm = \{f \in \mathcal{L} \mid \|f\|_\mp = 0\}$, где $\|f\|_-$ и $\|f\|_+$ определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \|f\|_-^2 &= \sum_{k>0} 2^{|k|-1} \frac{(|k|-1)!}{k!} \left| \int_H B_k(h) f(h) dh \right|^2, \\ \|f\|_+^2 &= \sum_{k>0} 2^{|k|-1} \frac{(|k|-1)!}{k!} \left| \int_H \overline{B_k(h)} f(h) dh \right|^2, \end{aligned} \quad (6.21)$$

где $k = (k_1, \dots, k_n)$, $|k| = k_1 + \dots + k_n$ и

$$B_k(h) = B_k(\zeta, z) = \frac{(1+\zeta)^{k_1}}{(1-\zeta)^{|k|}} z_1^{k_2} \dots z_{n-1}^{k_n}. \quad (6.22)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, что условия $\|f\|_- = 0$ и $\|f\|_+ = 0$ соответственно эквивалентны равенствам

$$\int_H B_k(h) f(h) dh = 0 \quad \text{и} \quad \int_H \overline{B_k(h)} f(h) dh = 0 \quad \text{при} \quad k > 0. \quad (6.23)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.10. В модели B с $\lambda = 0$ нетривиальные 1-коциклы $a^\pm: U(n, 1) \rightarrow \mathcal{L}_\pm$, связанные с двумя особыми представлениями группы $U(n, 1)$, являются проекциями на $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_-$ соответственно следующей функции $a: U(n, 1) \rightarrow \mathcal{L}$:

$$a(\zeta, z; g) = T_g f_0 - f_0, \quad \text{где} \quad f_0 = |1 - \zeta|^{-2n}.$$

Из предложения 6.4 следует:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.11. Следующие функции $f_k(\zeta, z)$, $k = (k_0, k_1, \dots, k_{n-1}) \in \mathbb{Z}_+^n$, $|k| > 0$, образуют ортогональный базис в $\mathcal{L}_+$:

$$f_k(\zeta, z) = (1 - \bar{\zeta})^{-n} (1 - \zeta)^{-n-|k|} (1 + \zeta)^{k_0} z_1^{k_1} \dots z_{n-1}^{k_{n-1}}. \quad (6.24)$$

Аналогичный базис в $\mathcal{L}_-$ получается заменой ζ и z_i на комплексно-сопряженные.

6.8. Модель C : реализация в пространстве функций $\psi(\rho, z)$ на $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^{n-1}$. Модель C получается переходом от функции $f(h) = f(\zeta, z)$, $\zeta = it - \frac{|z|^2}{2}$, на H в модели B (с $\lambda = 0$) к функциям $\psi(\rho, z)$, заданным равенством

$$\psi(\rho, z) = |\rho|^{-n+1} e^{\frac{|\rho|}{2}|z|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\rho t} f(t, z) dt.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.12. В модели C подпространство L функций $\psi(\rho, z)$ определяется соотношением

$$\int_{\mathbb{C}^{n-1}} \psi(0, z) d\mu(z) = 0. \quad (6.25)$$

Норма $\|\psi\|$ на L задается формулой

$$\|\psi\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \|\psi\|_\rho^2 |\rho|^{-1} d\rho, \quad (6.26)$$

где

$$\|\psi\|_\rho^2 = |\rho|^{2n-2} \int_{\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^{n-1}} e^{|\rho|(a_\rho(z_1, z_2) - |z_1|^2 - |z_2|^2)} \psi(\rho, z_1) \overline{\psi(\rho, z_2)} d\mu(z_1) d\mu(z_2), \quad (6.27)$$

$$a_\rho(z_1, z_2) = \begin{cases} z_2 z_1^* & \text{при } \rho < 0, \\ z_1 z_2^* & \text{при } \rho > 0. \end{cases} \quad (6.28)$$

По другому,

$$\|\psi\|_\rho^2 = \begin{cases} \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^{n-1}} \frac{|\rho|^{2n+|k|-2}}{k!} \left| \int_{\mathbb{C}^{n-1}} z^k e^{-|\rho|zz^*} \psi(\rho, z) d\mu(z) \right|^2 & \text{при } \rho < 0, \\ \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^{n-1}} \frac{\rho^{2n+|k|-2}}{k!} \left| \int_{\mathbb{C}^{n-1}} \bar{z}^k e^{-|\rho|zz^*} \psi(\rho, z) d\mu(z) \right|^2 & \text{при } \rho > 0. \end{cases} \quad (6.29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение (6.25) эквивалентно соотношению (6.17) в реализации на H . Для вычисления $\|\psi\|$ воспользуемся равенством

$$\|\psi\|^2 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{d\|\psi\|_\lambda^2}{d\lambda},$$

где $\|\psi\|_\lambda$ – норма в пространстве представления дополнительной серии. Подставив в него явное выражение для $\|\psi\|_\lambda^2$ и учитывая, что $Q_\lambda(t) = \text{const}$ при $\lambda = 0$, мы получим (6.26) и (6.27). Подставив в (6.27) разложение в степенной ряд функции $e^{a_\rho(z_1, z_2)}$ при $\rho > 0$ и $\rho < 0$, получаем (6.29).

СЛЕДСТВИЕ. В модели C пространство $\mathcal{L}$ разлагается в прямой интеграл подпространств:

$$\mathcal{L} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}(\rho) |\rho|^{-1} d\rho, \quad (6.30)$$

где $\mathcal{L}(\rho)$ – гильбертово пространство функций ψ на $\mathbb{C}^{n-1}$ с нормой (6.27), факторизованное по подпространству функций с нормой 0.

ТЕОРЕМА 6.6. В модели C подпространства $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_-$ особых представлений совпадают с подпространствами функций $\psi(\rho, z)$, сосредоточенных соответственно ρ на полупрямых $\rho > 0$ и $\rho < 0$ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что $\varphi(\rho, z) \in \mathcal{L}_+$, если $\varphi(\rho, z) = 0$ при $\rho < 0$, и аналогично $\varphi(\rho, z) \in \mathcal{L}_-$, если $\varphi(\rho, z) = 0$ при $\rho > 0$.

Воспользуемся условием (6.23) принадлежности функций $f(h) = f(t, z)$ в модели B подпространству $\mathcal{L}_+$. Перейдя в нем от функций $f(t, z)$ к функциям $\psi(\rho, z)$, получаем условие $\psi \in \mathcal{L}_+$ в виде:

$$I_k(\psi) \equiv \int_{-\infty}^0 \int_{\mathbb{C}^{n-1}} A_k(\rho, z) z^{k'} e^{-|\rho| \frac{|z|^2}{2}} \psi(-\rho, z) |\rho|^{n-1} d\rho d\mu(z) = 0 \quad \text{при } |k| > 0, \quad (6.31)$$

где

$$A_k(\rho, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 + \zeta)^{k_0}}{(1 - \zeta)^{|k|}} e^{i\rho t} dt, \quad \zeta = it - \frac{|z|^2}{2}. \quad (6.32)$$

Убедимся, что это условие выполняется, если $\psi(\rho, z) = 0$ при $\rho < 0$. В самом деле, функция $A_k(\rho, z)$ представима как линейная комбинация интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\rho t} dt}{(1 - \zeta)^m} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\rho t} dt}{(a - it)^m}, \quad |k'| \leq m \leq |k|,$$

где $a = 1 + \frac{|z|^2}{2}$. Известно, что при $\rho > 0$ эти интегралы равны нулю для любого $m > 0$. Значит, если $\psi(\rho, z) = 0$ на полупрямой $\rho < 0$, то $I_k(\psi) = 0$ при $|k'| > 0$. При $|k'| = 0$ в разложение $A_k(\rho, z)$ входит слагаемое $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\rho t} dt = \delta(\rho)$. В этом случае равенство нулю соответствующего слагаемого в $I_k(\psi)$ следует из соотношения (6.25).

Аналогично доказывается, что если $\psi(\rho, z) \equiv 0$ при $\rho > 0$, то $\psi \in \mathcal{L}_-$. Теорема 6.6 доказана.

СЛЕДСТВИЕ. В модели C пространства $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_-$ разлагаются в прямой интеграл подпространств:

$$\mathcal{L}_+ = \int_0^{+\infty} \mathcal{L}(\rho) \rho^{-1} d\rho, \quad \mathcal{L}_- = \int_{-\infty}^0 \mathcal{L}(\rho) |\rho|^{-1} d\rho;$$

нормы в пространствах $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_-$ имеют соответственно вид

$$\|\psi\|_+^2 = \int_0^{+\infty} \|\psi\|_\rho^2 \rho^{-1} d\rho, \quad \|\psi\|_-^2 = \int_{-\infty}^0 \|\psi\|_\rho^2 |\rho|^{-1} d\rho, \quad (6.33)$$

где $\|\psi\|_\rho$ задается равенством (6.27) или равенством (6.29). Подробнее,

$$\begin{aligned} \|\psi\|_-^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^{n-1}} \frac{1}{k!} \int_{-\infty}^0 \left| \int_{\mathbb{C}^{n-1}} z^k e^{-|\rho| z z^*} \psi(\rho, z) d\mu(z) \right|^2 |\rho|^{2n+2|k|-3} d\rho, \\ \|\psi\|_+^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^{n-1}} \frac{1}{k!} \int_0^{+\infty} \left| \int_{\mathbb{C}^{n-1}} \bar{z}^k e^{-\rho z z^*} \psi(\rho, z) d\mu(z) \right|^2 \rho^{2n+2|k|-3} d\rho. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Формулы для операторов T_g^+ и T_g^- представлений группы $U(n, 1)$ в пространствах $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_-$ соответственно получаются предельным переходом при $\lambda \rightarrow 0$ из формул (5.19), (5.20) и (5.21) для соответствующих операторов в представлениях дополнительной серии. В результате получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 6.7. В модели C операторы представлений группы $U(n, 1)$ на $\mathcal{L}_\pm$ имеют следующий вид. На пространстве $\mathcal{L}_+$:

$$T_{t_0, z_0}^+ \psi(\rho, z) = e^{\rho(it_0 - \frac{|z_0|^2}{2} - z z_0^*)} \psi(\rho, z + z_0), \quad (t_0, z_0) \in H, \quad (6.35)$$

$$T_{\epsilon, u}^+ \psi(\rho, z) = \psi(|\epsilon|^2 \rho, \bar{\epsilon}^{-1} z u), \quad (\epsilon, u) \in D, \quad (6.36)$$

$$T_s^+ \psi(\rho, z) = \rho^{-n+1} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-\rho \zeta + \frac{\rho'}{\zeta}} |\zeta|^{-2n} (\rho')^{n-1} \psi\left(\rho', \frac{z}{\zeta}\right) dt d\rho', \quad \zeta = it - \frac{|z|^2}{2}. \quad (6.37)$$

На пространстве $\mathcal{L}_-$:

$$T_{t_0, z_0}^- \psi(\rho, z) = e^{\rho(it_0 + \frac{|z_0|^2}{2} + z_0 z^*)} \psi(\rho, z + z_0), \quad (t_0, z_0) \in H, \quad (6.38)$$

$$T_{\epsilon, u}^- \psi(\rho, z) = \psi(|\epsilon|^2 \rho, \bar{\epsilon}^{-1} z u), \quad (\epsilon, u) \in D, \quad (6.39)$$

$$T_s^- \psi(\rho, z) = |\rho|^{-n+1} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^\infty e^{-\rho \bar{\zeta} + \frac{\rho'}{\bar{\zeta}}} |\zeta|^{-2n} |\rho'|^{n-1} \psi\left(\rho', \frac{z}{\bar{\zeta}}\right) dt d\rho', \quad \zeta = it - \frac{|z|^2}{2}. \quad (6.40)$$

6.9. Связь с баргмановскими моделями представлений группы Гейзенберга H . Ранее под баргмановской моделью подразумевалась реализация неприводимого представления индекса ρ группы H в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}(\rho)$ функций на $\mathbb{C}^{n-1}$, целых аналитических при $\rho > 0$ и целых антианалитических при $\rho < 0$ с нормой

$$\|f\|^2 = |\rho|^{n-1} \int_{\mathbb{C}^{n-1}} |f(z)|^2 e^{-|\rho| |z|^2} d\mu(z).$$

Согласно предложению 3.3, при $\rho > 0$ эта норма совпадает с нормой

$$\|f\|^2 = \rho^{2n-2} \int_{\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^{n-1}} f(z) \overline{f(z')} e^{\rho(z'z^* - |z|^2 - |z'|^2)} d\mu(z) d\mu(z');$$

а при $\rho < 0$ – с такой же нормой, где ρ заменено на $|\rho|$, а $z'z^*$ в показателе – на $z(z')^*$.

Напомним также, что представление группы H в пространстве $\mathcal{H}(\rho)$ продолжается до унитарного представления группы P_0 .

Сравнивая описание пространств $\mathcal{L}(\rho)$ и $\mathcal{H}(\rho)$ и формулы для операторов представления группы P_0 на этих пространствах, заключаем:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.13. *Имеет место естественный изоморфизм гильбертовых пространств,*

$$\tau: \mathcal{L}(\rho) \rightarrow \mathcal{H}(\rho),$$

коммутирующий с действием группы P_0 . Именно, $\tau\psi \in \mathcal{H}(\rho)$ определяется при $\rho > 0$ из равенств

$$\int_{\mathbb{C}^{n-1}} \bar{z}^k e^{-\rho z z^*} \psi(z) d\mu(z) = \int_{\mathbb{C}^{n-1}} \bar{z}^k e^{-\rho z z^*} \tau\psi(z) d\mu(z) \text{ для любого } k \in \mathbb{Z}_+^{n-1}. \quad (6.41)$$

Другими словами,

$$\tau\psi(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^{n-1}} a_k z^k, \quad \text{где } a_k = \frac{\rho^{|k|+n-1}}{k!} \int_{\mathbb{C}^{n-1}} \bar{z}^k e^{-\rho z z^*} \psi(z) d\mu(z). \quad (6.42)$$

Аналогично определяется τ при $\rho < 0$.

6.10. Баргмановская модель особых представлений. Введем прямые интегралы гильбертовых пространств $\mathcal{H}(\rho)$:

$$\mathcal{H}_+ = \int_0^{+\infty} \mathcal{H}(\rho) \rho^{-1} d\rho, \quad \mathcal{H}_- = \int_{-\infty}^0 \mathcal{H}(\rho) |\rho|^{-1} d\rho.$$

Другими словами, $\mathcal{H}_+$ есть пространство функций $f(\rho, z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^{n-1}} f_k(\rho) z^k$, где $f_k(\rho)$ – функции на полупрямой $\rho > 0$, с нормой

$$\|f\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^{n-1}} k! \int_{-\infty}^0 |f_k(\rho)|^2 |\rho|^{-|k|-1} d\rho. \quad (6.43)$$

Аналогично определяется пространство $\mathcal{H}_-$.

Изоморфизмы $\tau: \mathcal{L}(\rho) \rightarrow \mathcal{H}(\rho)$ индуцируют изоморфизмы гильбертовых пространств

$$\tau: \mathcal{L}_+ \rightarrow \mathcal{H}_+, \quad \mathcal{L}_- \rightarrow \mathcal{H}_-,$$

коммутирующие с действием группы P на этих пространствах. Именно, при $\psi \in \mathcal{L}_+$ имеем:

$$\tau\psi(\rho, z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^{n-1}} f_k(\rho) z^k, \quad \text{где } f_k(\rho) = \frac{\rho^{|k|+n-1}}{k!} \int_{\mathbb{C}^{n-1}} \bar{z}^k e^{-\rho z z^*} \psi(\rho, z) d\mu(z). \quad (6.44)$$

Аналогично определяется τ на $\mathcal{L}_-$.

В силу этого изоморфизма, пространства $\mathcal{H}_\pm$ являются новыми моделями особых представлений группы $U(n, 1)$. Назовем представления группы $U(n, 1)$ в этих пространствах баргмановскими моделями особых представлений.

В баргмановской модели действие операторов подгруппы P задается теми же формулами, что и в модели C . Действие всей группы $U(n, 1)$ определяется заданием только одного оператора T_s . Исследуем структуру этого оператора; для определенности ограничимся случаем пространства $\mathcal{H}_+$.

Согласно определению, оператор T_s на $\mathcal{L}_+$ задается равенством

$$T_s \psi(\rho, z) = \tau \psi_1(\rho, z),$$

где через $\psi_1(\rho, z) \in \mathcal{L}_+$ обозначена правая часть равенства (6.37).

Обозначим через $L_k \subset \mathcal{H}_+$, $k \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$, подпространство функций вида $f(\rho)z^k$. Очевидно:

$$\mathcal{H}_+ = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_+^{n-1}} L_k.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.14. *Подпространства $L_k \subset \mathcal{H}_\pm$ инвариантны относительно оператора T_s .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\psi \in L_k^+$, т.е. $\psi(\rho, z) = f(\rho)z^k$. Тогда, на основании формулы (6.37) для оператора T_s^+ в пространстве $\mathcal{L}_+$, имеем: $T_s^+ \psi(\rho, z) = \tau \psi_1(\rho, z)$, где

$$\psi_1(\rho, z) = \rho^{-n+1} \left(\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-\rho\zeta + \frac{\rho'}{\zeta}} |\zeta|^{-2n} \zeta^{-|k|} (\rho')^{n-1} f(\rho') dt d\rho' \right) z^k, \quad \zeta = it - \frac{|z|^2}{2}. \quad (6.45)$$

Очевидно, что функция ψ_1 представима в виде $\psi_1(\rho, z) = (\sum_{n=0}^\infty f_n(\rho)|z|^{2n})z^k$. Из определения τ следует, что $\tau(f_n(\rho)|z|^{2n}z^k) \in L_k$ при всех n . Значит, $\psi_1 \in L_k$. Предложение 6.14 доказано.

Обозначим: $\rho_+^\alpha = \rho^\alpha$ при $\rho > 0$; $\rho_+^\alpha = 0$ при $\rho < 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.15. *Оператор T_s^+ действует на функции вида $\rho_+^\alpha z^k$, $\alpha \in \mathbb{C}$, рассматриваемые как обобщенные функции на $\mathcal{H}_+$, по формуле*

$$T_s^+(\rho_+^\alpha z^k) = (-1)^{|k|} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(-\alpha + |k|)} \rho_+^{-\alpha + |k|} z^k. \quad (6.46)$$

Вывод формулы (6.46) см. в добавлении 2 (п. 8.5).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.16. *Оператор T_s действует на функции $\xi_k(a; \rho, z) = \rho^{|k|} e^{-a\rho} z^k \in L_k$, $\operatorname{Re} a > 0$, по формуле*

$$T_s \xi_k(a; \rho, z) = a^{-|k|} \xi_k(a^{-1}; \rho, z). \quad (6.47)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся равенством

$$\int_0^\infty e^{-a\rho} \rho^{\frac{|k|}{2} + i\sigma - 1} d\rho = \Gamma\left(\frac{|k|}{2} + i\sigma\right) a^{-\frac{|k|}{2} - i\sigma}.$$

По формуле обращения для преобразования Меллина отсюда следует:

$$\rho^{|k|} e^{-a\rho} = \int_{-\infty}^{+\infty} a^{-\frac{|k|}{2}-i\sigma} \Gamma\left(\frac{|k|}{2} + i\sigma\right) \rho^{\frac{|k|}{2}-i\sigma} d\sigma.$$

Согласно (6.46), имеем:

$$T_s(\rho^{\frac{|k|}{2}-i\sigma} z^k) = \frac{\Gamma(\frac{|k|}{2} - i\sigma)}{\Gamma(\frac{|k|}{2} + i\sigma)} \rho^{\frac{|k|}{2}+i\sigma}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} T_s(\rho^{|k|} e^{-a\rho} z^k) &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} a^{-\frac{|k|}{2}-i\sigma} \Gamma\left(\frac{|k|}{2} - i\sigma\right) \rho^{\frac{|k|}{2}+i\sigma} d\sigma \right) z^k \\ &= a^{-|k|} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{-\frac{|k|}{2}-i\sigma} \Gamma\left(\frac{|k|}{2} + i\sigma\right) \rho^{\frac{|k|}{2}-i\sigma} d\sigma \right) z^k \\ &= a^{-|k|} \xi_k(a^{-1}; \rho, z). \end{aligned}$$

Предложение 6.16 доказано.

Действие оператора T_s на L_k удобно представлять, перейдя от функций $f_k(\rho)z^k$ к функциям $F_k(\sigma)z^k$, где

$$F_k(\sigma) = \int_0^\infty f_k(\rho) \rho^{-\frac{|k|}{2}-i\sigma-1} d\rho. \quad (6.48)$$

Согласно формуле обращения для преобразования Меллина, имеем:

$$f_k(\rho) = \rho^{\frac{|k|}{2}} \int_{-\infty}^\infty F_k(\sigma) \rho^{i\sigma} d\sigma. \quad (6.49)$$

Введем гильбертово пространство $\widetilde{\mathcal{H}}_+$ функций $F(\sigma, z)$, целых относительно $z \in \mathbb{C}^{n-1}$, с нормой

$$\|F\|_+^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^{n-1}} k! \int_{-\infty}^\infty |F_k(\sigma)|^2 d\sigma \quad \text{при} \quad F(\sigma, z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^{n-1}} F_k(\sigma) z^k. \quad (6.50)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.17. *Отображение*

$$\psi(\rho, z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^{n-1}} f_k(\rho) z^k \mapsto F(\lambda, z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^{n-1}} F_k(\lambda) z^k,$$

где $f_k(\rho)$ и $F_k(\lambda)$ связаны соотношениями (6.48) и (6.49), является изоморфизмом гильбертовых пространств $\widetilde{\mathcal{H}}_+ \rightarrow \widetilde{\mathcal{H}}_+$.

Утверждение непосредственно следует из формулы Планшереля для преобразования Меллина.

Обозначим через $\widetilde{T}_s^+$ образ оператора T_s^+ на $\mathcal{H}_+$ при отображении $\mathcal{H}_+ \rightarrow \widetilde{\mathcal{H}}_+$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.18. Оператор $\tilde{T}_s^+$ действует на функции $F_k(\lambda)z^k \in \widetilde{\mathcal{H}}_+$ по формуле

$$\tilde{T}_s^+(F_k(\lambda)z^k) = (-1)^{|k|} \frac{\Gamma(-i\lambda + \frac{|k|}{2})}{\Gamma(i\lambda + \frac{|k|}{2})} F_k(-\lambda)z^k. \quad (6.51)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 6.15, имеем:

$$T_s^+(\rho^{\frac{|k|}{2}+i\sigma}z^k) = (-1)^{|k|} \frac{\Gamma(i\sigma + \frac{|k|}{2})}{\Gamma(-i\lambda + \frac{|k|}{2})} \rho^{\frac{|k|}{2}-i\sigma}z^k.$$

Поэтому из (6.49) следует:

$$\begin{aligned} T_s^+(f_k(\rho)z^k) &= (-1)^{|k|} \left(\int_{-\infty}^{\infty} F_k(\sigma) \frac{\Gamma(i\sigma + \frac{|k|}{2})}{\Gamma(-i\sigma + \frac{|k|}{2})} \rho^{\frac{|k|}{2}-i\sigma} d\sigma \right) z^k \\ &= (-1)^{|k|} \left(\int_{-\infty}^{\infty} F_k(-\sigma) \frac{\Gamma(-i\sigma + \frac{|k|}{2})}{\Gamma(i\sigma + \frac{|k|}{2})} \rho^{\frac{|k|}{2}+i\sigma} d\sigma \right) z^k. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$T_s^+(f_k(\rho)z^k) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{T}_s^+(F_k(\sigma)z^k) \rho^{\frac{|k|}{2}+i\sigma} d\sigma.$$

Сравнив полученные равенства, получаем (6.51).

6.11. Описание нетривиальных 1-коциклов $a^\pm: U(n, 1) \rightarrow \mathcal{H}_\pm$. Нетривиальный 1-коцикл $a: U(n, 1) \rightarrow \mathcal{H}$, где $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$, задается равенством

$$a(g) = T_g \xi - \xi,$$

где функция $\xi = f(\rho, z)$ инвариантна относительно действия максимальной компактной подгруппы $U \subset U(n, 1)$ и $\xi \notin L$. 1-коциклы $a^\pm(g)$ являются проекциями $a(g)$ на подпространства $\mathcal{H}_\pm$.

В силу определения, $a(u) = 0$ при $u \in U$, а потому

$$a(ug) = a(g) \quad \text{при} \quad u \in U.$$

Так как элементы $g \in U(n, 1)$ представимы в виде произведения $g = ub$, где $u \in U$, $b \in P_1$, 1-коцикл $a(g)$ однозначно определяется своим ограничением на подгруппу P_1 .

ТЕОРЕМА 6.8. В баргмановской модели функция ξ в выражении для 1-коцикла имеет вид

$$\xi(\rho, z) = e^{-|\rho|}. \quad (6.52)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся тем, что в модели B функция ξ имеет вид

$$\varphi(\zeta, z) = |1 - \zeta|^{-2n}, \quad \text{где} \quad \zeta = it - \frac{|z|^2}{2}.$$

Отсюда следует, что в модели C функция ξ имеет вид

$$\psi(\rho, z) = |\rho|^{-n+1} e^{|\rho| \frac{|z|^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} |1 - \zeta|^{-2n} e^{-i\rho t} dt.$$

Заметим, что ψ – четная функция от ρ ; поэтому далее предполагается, что $\rho > 0$. Искомый вектор ξ в баргмановской модели имеет при $\rho > 0$ вид

$$\xi(\rho, z) = \tau\psi(\rho, z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^{n-1}} f_k(\rho) z^k,$$

где функции $f_k(\rho)$ задаются равенством (6.44). Очевидно, в силу этого равенства, что $f_k(\rho) = 0$ при $k > 0$. Значит,

$$\xi(\rho, z) = f_0(\rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{C}^{n-1}} e^{\rho\zeta} |1 - \zeta|^{-2n} d\mu(z) dt. \quad (6.53)$$

Вычислим интеграл (6.53). Имеем:

$$\left(1 - \frac{d}{dx}\right)^n f_0(\rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{C}^{n-1}} e^{\rho\zeta} (1 - \bar{\zeta})^{-n} d\mu(z) dt.$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\rho\zeta}}{(1 - \bar{\zeta})^n} dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\rho\zeta}}{(1 + |z|^2 + \zeta)^n} dt \\ &= \operatorname{Res}_{\zeta = -1 - |z|^2} \left(\frac{e^{\rho\zeta}}{(1 + |z|^2 + \zeta)^n} \right) = \operatorname{const} \rho^{n-1} e^{-\rho(1+|z|^2)}. \end{aligned}$$

Значит,

$$\left(1 - \frac{d}{dx}\right)^n f_0(\rho) = \operatorname{const} \rho^{n-1} e^{-\rho} \int_{\mathbb{C}^{n-1}} e^{\rho|z|^2} d\mu(z) = \operatorname{const} e^{-\rho}.$$

Поскольку $f_0(\infty) = 0$, отсюда следует, что $f_0(\rho) = \operatorname{const} e^{-\rho}$. Теорема 6.8 доказана.

Глава IV. Добавления

§ 7. Добавление 1. Канонические состояния и канонические представления

Канонические состояния на группах и отвечающие им канонические представления групп впервые были введены в [14] для случая группы $SL(2, \mathbb{R})$, а затем в [20] для групп $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$ и использованы при построении неприводимых унитарных представлений групп токов $O(n, 1)^X$ и $U(n, 1)^X$. Эти представления унитарны, приводимы и, подобно представлениям дополнительной серии, задаются одним вещественным параметром $\lambda \in (0, \lambda_0)$, $\lambda_0 > 0$.

Канонические представления групп $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$ связывает с представлениями дополнительной серии этих групп следующее свойство:

Каждое представление T^λ дополнительной серии содержится в качестве прямого слагаемого, и притом с кратностью единица, в одном и только одном каноническом представлении – представлении того же номера λ .

Имеется простая связь между каноническими представлениями групп $O(n, 1)^X$ и $U(n, 1)^X$ и их особыми представлениями. Именно, при $\lambda \rightarrow 0$ норма $\|f\|_\lambda$ в пространстве H^λ канонического представления вырождается на подпространстве $H \subset H^0$ коразмерности 1. В силу этого, канонические представления T^λ стремятся при $\lambda \rightarrow 0$ к единичному представлению на факторпространстве H^0/H . Пространство H , приклеенное к этому одномерному пространству, обладает положительной инвариантной нормой $\|f\|$. В случае групп $O(n, 1)$, $n > 2$, эта норма невырождена; пополнение $\mathcal{H}$ пространства H по этой норме содержит пространство особого представления в качестве прямого слагаемого. В случае групп $U(n, 1)$ эта норма вырождается на некотором бесконечномерном подпространстве $H_0 \subset H$; пополнение $\mathcal{H}$ пространства H/H_0 по этой норме является прямой суммой двух особых подпространств.

Роль канонических представлений в теории представлений групп токов проявляется в том, что их сферические функции $\Psi_\lambda(g)$ удовлетворяют условию безграничной делимости:

$$\Psi_{\lambda_1+\lambda_2}(g) = \Psi_{\lambda_1}(g)\Psi_{\lambda_2}(g).$$

В этом добавлении в пп. 7.1–7.3 дается общее определение канонического состояния и связанного с ним семейства канонических представлений T^λ для произвольной локально компактной группы G . Обсуждаются их основные свойства. Последующие пункты посвящены каноническим представлениям групп $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$.

Для классических простых групп Ли другие подходы к понятию канонического представления, различные их обобщения и связанный с ними гармонический анализ изложены в цикле работ (см., например, [50]–[52] и библиографию в [52]).

7.1. Общее определение канонических состояний и канонических представлений. Пусть G – локально компактная, некомпактная топологическая группа, K – ее подгруппа, $X = K \backslash G$ – однородное пространство группы G , где группа G действует правыми сдвигами: $x \rightarrow xg$. Предполагается, что на X существует G -инвариантная мера $d\mu(x)$.

Обозначим через $L(X)$ подпространство непрерывных функций на X с компактным носителем. Элементы из $L(X)$ будем задавать в их поднятии на группу G , т.е. как функции $f(g)$, удовлетворяющие соотношению $f(kg) = f(g)$ при $k \in K$, $g \in G$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Назовем непрерывную положительную функцию $\varphi(g)$ на G положительно определенной на X , если

- 1) $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)$,
- 2) $\varphi(k_1 g k_2) = \varphi(g)$ при $k_1, k_2 \in K$,
- 3) для любой ненулевой функции $f \in L(X)$

$$\|f\|^2 \sim \int_{X \times X} \varphi(g_1 g_2^{-1}) f(g_1) \overline{f(g_2)} d\mu(x_1) d\mu(x_2) > 0. \quad (7.1)$$

Выражение в правой части (7.1) корректно, поскольку подынтегральная функция опускается с $G \times G$ на $X \times X$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В силу свойства 2), функция $\varphi(g)$ опускается на X при отображении $G \rightarrow K \backslash G$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Каноническим состоянием на группе G относительно подгруппы K называется семейство положительных непрерывных функций $\Psi^{-\lambda}(g) = (\Psi(g))^{-\lambda}$ на группе G , зависящих от вещественного положительного параметра λ (степень) и удовлетворяющих условиям

- а) $\Psi^{-\lambda}(g)$ положительно определена на X в смысле определения 1 при малых значениях $\lambda > 0$,
 б) для функции $\left. \frac{d\Psi^{-\lambda}(g)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = -\log \Psi(g)$ расходится следующий интеграл:

$$-\int_X \log \Psi(g) d\mu(x). \quad (7.2)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. Пусть $B(x_1, x_2)$ – непрерывная положительная функция на $X \times X$, удовлетворяющая следующим условиям 1)–4):

- 1) симметричность: $B(x_1, x_2) = B(x_2, x_1)$;
 2) G -инвариантность:

$$B(x_1 g, x_2 g) = B(x_1, x_2) \quad \text{для любого } g \in G;$$

- 3) для любой ненулевой функции $f \in L(X)$ при малых значениях $\lambda > 0$ имеем:

$$\int_{X \times X} B^{-\lambda}(x_1, x_2) f(x_1) \overline{f(x_2)} d\mu(x_1) d\mu(x_2) > 0; \quad (7.3)$$

- 4) расходится следующий интеграл:

$$-\int_X \log B(x_1, x_2) d\mu(x_2)$$

(от x_1 этот интеграл не зависит в силу условия 2)).

Тогда $\Psi^{-\lambda}(g) = B^{-\lambda}(x_0 g, x_0)$, где $x_0 \in X$ – неподвижная точка группы K , является каноническим состоянием.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае, когда G есть группа $O(n, 1)$ или $U(n, 1)$, а K – ее максимальная компактная подгруппа, имеется простая связь ядра $B^{-\lambda}(x_1, x_2)$ с ядром Березина [53], см. ниже п. 7.4.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Назовем ассоциированным с каноническим состоянием $\Psi^{-\lambda}(g)$ семейство гильбертовых пространств H^λ функций на X с нормами

$$\|f\|_\lambda^2 = \int_{X \times X} \Psi^{-\lambda}(g_1 g_2^{-1}) f(g_1) \overline{f(g_2)} d\mu(x_1) d\mu(x_2) \quad (7.4)$$

или, в терминах ядер $B^{-\lambda}(x_1, x_2)$,

$$\|f\|_\lambda^2 = \int_{X \times X} B^{-\lambda}(x_1, x_2) f(x_1) \overline{f(x_2)} d\mu(x_1) d\mu(x_2). \quad (7.5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Назовем представлениями группы G , ассоциированными с каноническим состоянием $\Psi^{-\lambda}(g)$, или просто каноническими представлениями ее унитарные представления в пространствах H^λ операторами вида

$$(T_g f)(x) = f(xg).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если не требовать положительной определенности $\Psi^{-\lambda}(g)$ при всех λ , то это представление может быть и не унитарным.

7.2. Сферические функции. Заметим, что норма (7.4) определена для любых обобщенных функций на X с компактным носителем, и элементы пространства H^λ можно интерпретировать как такие обобщенные функции. В частности, дельта-функция $\delta_{x_0}(x)$ в произвольной точке $x_0 \in X$, определенная равенством

$$\int_X \delta_{x_0}(x) f(x) d\mu(x) = f(x_0),$$

является при любом $\lambda \in (0, \lambda_0)$ элементом пространства H^λ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. *Функции $\delta_{x_0}(x) \in H^\lambda$ обладают следующими свойствами:*

- 1) *они линейно независимы и образуют переопределенный базис в H^λ ;*
- 2) $\|\delta_{x_0}(x)\|_\lambda = 1$;
- 3) *при любом x_0 вектор $\delta_{x_0}(x)$ циклически в пространстве H^λ ;*
- 4) *вектор $\delta_{x_0}(x)$ инвариантен относительно стационарной подгруппы точки x_0 .*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Зафиксируем специальный циклический вектор $\xi_\lambda = \delta_{x_0}(x)$, где $x_0 \in X$ – точка со стационарной подгруппой K , и определим сферическую функцию $\psi_\lambda(g)$ на группе G , связанную с пространством H^λ , равенством

$$\psi_\lambda(g) = \langle T_g \xi_\lambda, \xi_\lambda \rangle_\lambda.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.3. *Сферическая функция выражается через каноническое состояние формулой*

$$\psi_\lambda(g) = \Psi^{-\lambda}(g)$$

и является, таким образом, безгранично делимой функцией, т.е.

$$\psi_{\lambda_1 + \lambda_2}(g) = \psi_{\lambda_1}(g) \psi_{\lambda_2}(g).$$

В самом деле, положив $x_1 = x_0 g_1$, $x_2 = x_0 g_2$, имеем:

$$\begin{aligned} \langle T_g \xi_\lambda, \xi_\lambda \rangle_\lambda &= \int_{X \times X} \Psi^{-\lambda}(g_1 g_2) \delta_{x_0}(x_1 g) \delta_{x_0}(x_2) d\mu(x_1) d\mu(x_2) \\ &= \int_X \Psi^{-\lambda}(g_1) \delta_{x_0}(x_1 g) d\mu(x_1) \\ &= \int_X \Psi^{-\lambda}(g_1 g^{-1}) \delta_{x_0}(x_1) d\mu(x_1) = \Psi^{-\lambda}(g^{-1}). \end{aligned}$$

Из безграничной делимости сферической функции следует:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.4. При $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$ существует изометрическое вложение пространства

$$H^\lambda \rightarrow H^{\lambda_1} \otimes \dots \otimes H^{\lambda_n},$$

перестановочное с действием группы G . Именно, отображение

$$\xi_\lambda \rightarrow \xi_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes \xi_{\lambda_n}$$

продолжается до искомого морфизма.

В самом деле, утверждение следует из равенства

$$\langle T_g^\lambda \xi_\lambda, \xi_\lambda \rangle = \prod_{i=1}^n \langle T_g^{\lambda_i} \xi_{\lambda_i}, \xi_{\lambda_i} \rangle,$$

справедливого для любого $g \in G$ при $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$.

7.3. Особые представления группы G , связанные с каноническим состоянием $\Psi^{-\lambda}(g)$. При $\lambda \rightarrow 0$ каноническое состояние стремится к единице, а потому норма $\|f\|_0^2 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \|f\|_\lambda^2$ имеет вид

$$\|f\|_0^2 = \left| \int_X f(x) d\mu(x) \right|^2;$$

операторы представления по-прежнему действуют по формуле

$$(T_g f)(x) = f(xg).$$

Исследуем структуру подпространства, на котором эта норма вырождается, т.е. инвариантного подпространства H функций, удовлетворяющих условию

$$\int_X f(x) d\mu(x) = 0.$$

В пространстве H определена преднорма, инвариантная относительно операторов представления группы G :

$$\|f\|^2 = - \int_{X \times X} \log \Psi(g_1 g_2^{-1}) f(g_1) \overline{f(g_2)} d\mu(x_1) d\mu(x_2).$$

Пусть $H_0 \subset H$ – подпространство, на котором эта преднорма вырождается. Тогда в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, полученном пополнением факторпространства H/H_0 по норме $\|f\|$, определено унитарное представление T_g группы G .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.5. Представление T_g группы G в пространстве $\mathcal{H}$ обладает нетривиальным 1-коциклом $\alpha: G \rightarrow \mathcal{H}$, а именно,

$$\alpha(g) = T_g \xi - \xi, \quad \text{где} \quad \xi = \delta_{x_0}(x) \in H \setminus H_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, прежде всего, что $\xi \notin H$ и $a(g) \in H$, т.е. $a(g)$ есть 1-коцикл $G \rightarrow \mathcal{H}$. Предположим, что он тривиален, т.е. $T_g \xi - \xi = T_g \xi_0 - \xi_0$ для некоторого $\xi_0 \in H$. Тогда вектор $\xi_1 = \xi - \xi_0$ G -инвариантен; а потому $\xi_1 = \text{const}$. С другой стороны, интеграл

$$\int_X \log \Psi(g) f(g) d\mu(x)$$

сходится при $f = \xi_1$, поскольку он сходится при $f = \xi$ и при $f = \xi_0$. Значит, поскольку $\xi_1 \neq 0$, сходится и интеграл

$$\int_X \log \Psi(g) d\mu(x).$$

Это противоречит условию (7.2) для канонического состояния.

СЛЕДСТВИЕ. *Пространство $\mathcal{H}$ содержит особые подпространства в качестве прямых слагаемых.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.6. *Норма нетривиального 1-коцикла $a: G \rightarrow \mathcal{H}$ выражается через каноническое состояние равенством $\|a(g)\|^2 = 2 \log \Psi(g)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, имеем:

$$\begin{aligned} \|a(g)\|^2 &= \langle T_g \xi - \xi, T_g \xi - \xi \rangle = \frac{d}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} \langle T_g^\lambda \xi_\lambda - \xi_\lambda, T_g^\lambda \xi_\lambda - \xi_\lambda \rangle_\lambda \\ &= 2 \frac{d}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} (1 - \langle T_g^\lambda \xi_\lambda, \xi_\lambda \rangle_\lambda) = -2 \frac{d\Psi^{-\lambda}(g)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} = 2 \log \Psi(g). \end{aligned}$$

7.4. Канонические представления групп $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$. Реализуем $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$ как группы линейных преобразований в $\mathbb{R}^{n+1}$ и $\mathbb{C}^{n+1}$, сохраняющих соответственно билинейную форму $x_1 x'_1 + \dots + x_n x'_n - x_{n+1} x'_{n+1}$ и эрмитову форму $x_1 \overline{x'_1} + \dots + x_n \overline{x'_n} - x_{n+1} \overline{x'_{n+1}}$. В этой модели элементы групп задаются в форме клеточных матриц $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, где α и δ – квадратные матрицы по-

рядков n и 1 , а подгруппа K клеточно диагональных матриц $k = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$, где $\alpha \in U(n)$ и $\delta \in U(1)$, является их максимальной компактной подгруппой.

Введем однородное пространство $K \backslash U(n, 1)$. В случае $O(n, 1)$ оно реализуется как открытый единичный шар $D \subset \mathbb{R}^n$, а в случае $U(n, 1)$ – как открытый единичный унитарный шар $D \subset \mathbb{C}^n$, т.е.

$$D: |z|^2 \equiv |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 < 1,$$

где $z_i \in \mathbb{R}$ в случае $O(n, 1)$ и $z_i \in \mathbb{C}$ в случае $U(n, 1)$.

В обоих случаях группа действует по формуле

$$z \mapsto zg = (z\beta + \delta)^{-1}(z\alpha + \gamma) \quad \text{при} \quad g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.7. *Функции*

$$B(z, z') = \frac{|1 - zz'^*|}{(1 - zz^*)^{1/2}(1 - z'z'^*)^{1/2}} \quad (7.6)$$

соответственно на вещественном и комплексном унитарном шаре удовлетворяют условиям предложения 7.1.

СЛЕДСТВИЕ. *Функция*

$$\Psi^{-\lambda}(g) = B^{-\lambda}(z_0 g, z_0), \quad \text{где } z_0 = 0,$$

является каноническим состоянием.

Из явного выражения для $B(z, z')$ следует:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.8. *Каноническое состояние задается формулой*

$$\Psi^{-\lambda}(g) = |\delta|^{-\lambda} \quad \text{при } g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

СЛЕДСТВИЕ. *В матричной модели b групп $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$ канонические состояния задаются формулой*

$$\Psi^{-\lambda}(g) = \left| \frac{g_{11} + g_{33} - g_{13} - g_{31}}{2} \right|^{-\lambda}. \quad (7.7)$$

В частности,

$$\Psi^{-\lambda}(\gamma) = \left(1 + \frac{|\gamma|^2}{4}\right)^{-\lambda} \quad \text{и} \quad \Psi^{-\lambda}(t, \gamma) = \left(\frac{t^2}{4} + \left(1 + \frac{|\gamma|^2}{4}\right)^2\right)^{-\lambda/2}$$

для элементов $\gamma \in Z$ и $(t, \gamma) \in H$ соответствующих унипотентных подгрупп.

Связанные с этим каноническим состоянием канонические представления групп $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$ действуют в гильбертовых пространствах H^λ функций соответственно на вещественном единичном шаре $D \subset \mathbb{R}^n$ и на комплексном унитарном единичном шаре $D \subset \mathbb{C}^n$ с нормами

$$\|f\|_\lambda^2 = \int_{D \times D} \left| \frac{1 - zz'^*}{(1 - zz^*)^{1/2}(1 - z'z'^*)^{1/2}} \right|^{-\lambda} f(z_1) \overline{f(z_2)} d\mu(z_1) d\mu(z_2). \quad (7.8)$$

Здесь $d\mu(z)$ – инвариантная мера на D , заданная равенством

$$d\mu(z) = (1 - zz^*)^{-k(n+1)} dz,$$

где dz – стандартная лебегова мера, $k = \frac{1}{2}$ для случая $O(n, 1)$ и $k = 1$ для случая $U(n, 1)$. Операторы представлений имеют вид

$$(T_g f)(z) = f(zg).$$

Перейдя от функций $f(z)$ к функциям $\varphi(z) = |1 - zz^*|^{-\frac{\lambda}{2} - k(n+1)} f(z)$, эти представления можно реализовать в гильбертовых пространствах с нормами

$$\|\varphi\|_\lambda^2 = \int_{D \times D} |1 - zz'^*|^{-\lambda} \varphi(z_1) \overline{\varphi(z_2)} dz_1 dz_2. \quad (7.9)$$

В новой реализации операторы представлений задаются формулами

$$(T_g^\lambda \varphi)(z) = \varphi(zg) |z\beta + \delta|^{\lambda-2k(n+1)} \quad \text{при} \quad g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Определение канонического состояния и канонических представлений переносится на любые группы $O(p, q)$ и $U(p, q)$, $p \geq q \geq 1$. Элементы этих групп задаются в форме клеточных матриц $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, где α и δ – квадратные матрицы порядков p и q . Аналогами единичных шаров являются единичные матричные шары – многообразия соответственно вещественных и комплексных $(q \times p)$ -матриц z , удовлетворяющих условию $zz^* < e_q$, где e_q – единичная q -матрица.

Каноническое состояние $\Psi^{-\lambda}(g)$ и ядро $B(z, z')$ задаются в общем случае формулами

$$\Psi^{-\lambda}(g) = |\det \delta|^{-\lambda} \quad \text{при} \quad g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

$$B(z, z') = \frac{|\det(e_q - zz'^*)|}{\det^{1/2}(e_q - zz^*) \det^{1/2}(e_q - z'z'^*)}.$$

Случай $q > 1$ отличается от рассматриваемого здесь тем, что каноническое состояние положительно определено только при $\lambda > q - 1$.

Отметим, что функции $|\det(e_q - zz'^*)|^\lambda$ суть ядра Березина. В случае $U(n, 1)$ мы рассматриваем вместо ядер Березина их модули.

7.5. Связь с представлениями дополнительной серии. Для каждой из групп $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$ существует изометрическое вложение

$$L^\lambda \rightarrow H^\lambda,$$

коммутирующее с действием группы, здесь L^λ – пространство произвольно-го представления дополнительной серии, а H^λ – пространство канонического представления с тем же номером λ . Опишем явно это вложение.

Будем исходить из реализации представлений дополнительной серии в пространстве функций $f(\omega)$ на единичной сфере $S \subset \mathbb{R}^n$ в случае группы $O(n, 1)$ и на единичной унитарной сфере $S \subset \mathbb{C}^n$ в случае группы $U(n, 1)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.9. Если H^λ реализовано как пространство с нормой (7.9), то для каждой из групп $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$ отображение

$$\tau: f(\omega) \mapsto \varphi(z) = \delta(1 - |z|^2) f\left(\frac{z}{|z|}\right)$$

(где $\delta(t)$ – дельта-функция на $\mathbb{R}$) является изометрическим вложением L^λ в H^λ , перестановочным с действием соответствующей группы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для определенности рассмотрим случай группы $U(n, 1)$. Представление дополнительной серии T^λ этой группы действует в гильбертовом пространстве L^λ функций на единичной унитарной сфере $S = S^{2n-1}$ в $\mathbb{C}^n$ с нормой

$$\|f\|^2 = \int_{S \times S} |1 - \omega\omega'^*|^{-\lambda} f(\omega) \overline{f(\omega')} d\omega d\omega',$$

где $d\omega$ – инвариантная мера на S . Операторы представления имеют вид

$$(T_g^\lambda f)(\omega) = f(\omega g)|\omega\beta + \delta|^{\lambda-2n}.$$

Докажем перестановочность τ с действием группы $U(n, 1)$. Имеем:

$$(T_g \tau f)(z) = \delta(1 - |zg|^2) f\left(\frac{zg}{|zg|}\right) |z\beta + \delta|^{\lambda-2(n+1)}.$$

Так как $\delta(1 - |zg|^2) = \delta(1 - |z|^2)|z\beta + \delta|^2$, то

$$(T_g \tau f)(z) = \delta(1 - |z|^2) f\left(\frac{zg}{|zg|}\right) |z\beta + \delta|^{\lambda-2n} = (\tau T_g f)(z).$$

Докажем изометричность вложения $L^\lambda \rightarrow H^\lambda$. Пусть $\varphi(z) = (\tau f)(z) = \delta(1 - |z|^2) f\left(\frac{z}{|z|}\right)$. Перейдя к сферическим координатам на $D = K \setminus U(n, 1)$, т.е. координатам $z = r\omega$, $r > 0$, $\omega \in S$, получаем

$$\begin{aligned} \|T_g \varphi\|_\lambda^2 &= \int |1 - rr'\omega\omega'^*|^{-\lambda} \delta(1 - r^2) \delta(1 - r'^2) (rr')^{2n-1} f(\omega) \overline{f(\omega')} dr dr' d\omega d\omega' \\ &= \int_{S \times S} |1 - \omega\omega'^*|^{-\lambda} f(\omega) \overline{f(\omega')} d\omega d\omega' = \|f\|^2. \end{aligned}$$

Предложение 7.9 доказано.

7.6. Структура предельного пространства H^0 и связанные с H^0 1-коциклы и особые представления. В соответствии с общими определениями пространство H^0 , предельное при $\lambda \rightarrow 0$ к пространствам H^λ канонических представлений, содержит инвариантное подпространство $H \subset H^9$ коразмерности 1, а именно подпространство функций, удовлетворяющих соотношению

$$\int_D f(z) d\mu(z) = 0,$$

и на факторпространстве H^0/H действует единичное представление. Таким образом, при $\lambda \rightarrow 0$ представления T^λ в пространствах H^λ стремятся к единичному представлению в факторпространстве H^0/H .

Исследуем структуру подпространства H , приклеенного к H^0/H . На этом подпространстве определена полунорма $\|f\|$, инвариантная относительно операторов представления $(T_g f)(z) = f(zg)$:

$$\|f\|^2 = - \int_{D \times D} \log B(z, z') f(z) \overline{f(z')} d\mu(z) d\mu(z').$$

Из условия $f \in H$ следует, что эта полунорма представима в виде

$$\|f\|^2 = - \int_{D \times D} \log |1 - zz'^*| f(z) \overline{f(z')} d\mu(z) d\mu(z'). \quad (7.10)$$

Перейдя от функций $f(z)$ к функциям $\varphi(z) = |1 - zz'^*|^{-k(n+1)}$, где $k = 1/2$ и $k = 1$ для групп $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$ соответственно, мы получаем выражение для нормы в виде

$$\|\varphi\|^2 = - \int_{D \times D} \log |1 - zz'^*| \varphi(z) \overline{\varphi(z')} dz dz', \quad (7.11)$$

где dz – лебегова мера на D . В новой реализации операторы представления действуют по формуле

$$(T_g \varphi)(z) = \varphi(zg) |z\beta + \delta|^{-2k(n+1)} \quad \text{при} \quad g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

В случае $O(n, 1)$ норма (7.11) невырождена, а в случае $U(n, 1)$ она вырождается на некотором бесконечномерном подпространстве H_0 . Рассмотрим эти случаи отдельно.

7.6.1. *Случай группы $O(n, 1)$.* Разложив $\log |1 - zz'^*| = \log(1 - zz'^*)$ в степенной ряд, получаем следующее выражение для нормы $\|\varphi\|$:

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{|k| > 0} \frac{(|k| - 1)!}{k!} \left| \int z^k \varphi(z) dz \right|^2,$$

где, как обычно, $k! = \prod k_i!$, $|k| = \sum k_i$ и $z^k = \prod z_i^{k_i}$. Отсюда следует, что эта норма строго положительна. Обозначим через $\mathcal{H}$ гильбертово пространство, полученное пополнением H по норме $\|\varphi\|$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.10. *Пространство $\mathcal{H}$ содержит пространство $\mathcal{L}$ особого представления группы $O(n, 1)$ в качестве простого слагаемого. Если $\mathcal{L}$ реализовано как пространство функций $f(\omega)$ на единичной сфере $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, то вложение $\tau: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{H}$ имеет вид*

$$\tau: f(\omega) \mapsto \varphi(z) = \delta(1 - zz^*) f\left(\frac{z}{|z|}\right),$$

где $\delta(t)$ – дельта-функция на $\mathbb{R}$.

Доказательство то же, что и в предложении 7.9.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.11. *Для каждого вектора $\xi \in H^0 \setminus H$ функция $a(g) = T_g \xi - \xi$ является нетривиальным 1-коциклом $G \rightarrow \mathcal{H}$. При этом если $\xi = \delta(1 - |z|^2)$, то $a(g) \in \mathcal{L}$, т.е. $a(g)$ является 1-коциклом $G \rightarrow \mathcal{L}$.*

СЛЕДСТВИЕ. *Подпространство $\mathcal{H}' = \mathcal{H} \ominus \mathcal{L}$ не содержит нетривиальных 1-коциклов. (Оно разлагается в прямой интеграл представлений основной серии.)*

Структура особого представления группы $O(n, 1)$ рассматривалась в § 2 этой статьи.

7.6.2. *Случай группы $U(n, 1)$.* Имеем:

$$\log |1 - zz'^*| = \frac{1}{2} \log(1 - zz'^*) + \frac{1}{2} \log(1 - z'z^*).$$

Разложив каждое слагаемое этой суммы в степенной ряд, получаем:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.12. *Норма $\|\varphi\|$ на H представима в виде суммы*

$$\|\varphi\|^2 = \frac{1}{2} \|\varphi\|_+^2 + \frac{1}{2} \|\varphi\|_-^2,$$

где

$$\|\varphi\|_+^2 = \sum_{k>0} \frac{(|k|-1)!}{k!} \left| \int \bar{z}^k \varphi(z) dz \right|^2, \quad \|\varphi\|_-^2 = \sum_{k>0} \frac{(|k|-1)!}{k!} \left| \int z^k \varphi(z) dz \right|^2.$$

Эти нормы, как и исходная норма $\|\varphi\|$, инвариантны относительно действия группы $U(n, 1)$.

Из явного выражения для $\|\varphi\|$ следует, что эта норма положительна, но, в отличие от случая группы $O(n, 1)$, она вырождается на некотором бесконечномерном подпространстве H_0 . Пусть $\mathcal{H}$ – пополнение факторпространства H/H_0 по этой норме.

Из инвариантности норм $\|\varphi\|_{\pm}$ следует:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.13. *Пространство $\mathcal{H}$ является прямой суммой двух инвариантных подпространств,*

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-,$$

где $\mathcal{H}_+ = \{\varphi \in \mathcal{H} \mid \|\varphi\|_- = 0\}$, $\mathcal{H}_- = \{\varphi \in \mathcal{H} \mid \|\varphi\|_+ = 0\}$.

Представления группы $U(n, 1)$ в этих подпространствах неприводимы, и проекции любого нетривиального 1-коцикла $U(n, 1) \rightarrow H$ на эти подпространства отличны от нуля. Таким образом, представления группы $U(n, 1)$ в пространствах $\mathcal{H}_{\pm}$ являются особыми.

Структура этих двух особых представлений группы $U(n, 1)$ рассматривалась в § 6 статьи.

§ 8. Добавление 2. Вывод некоторых формул

8.1. Преобразование Фурье функций в $\mathbb{R}^{n-1}$: $(a^2 + |\gamma|^2)^{-\lambda/2}$ и $|\gamma|^{-\lambda}$ на $\mathbb{R}^{n-1}$, где $|\gamma| = (\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i^2)^{1/2}$. Имеют место соотношения:

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} (a^2 + |\gamma|^2)^{-\lambda/2} e^{i\langle \xi, \gamma \rangle} d\gamma = c_n \frac{a^{\frac{\lambda}{2}-1}}{2^{\frac{\lambda}{2}-1} \Gamma(\lambda/2)} |\xi|^{\frac{\lambda-n+1}{2}} K_{\frac{n-1+\lambda}{2}}(a|\xi|); \quad (8.1)$$

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\gamma|^{-\lambda} e^{i\langle \xi, \gamma \rangle} d\gamma = c_n \frac{2^{-\lambda} \Gamma((n-1-\lambda)/2)}{\Gamma(\lambda/2)} |\xi|^{\lambda-n+1}, \quad (8.2)$$

где коэффициент c_n , один и тот же в (8.1) и (8.2), зависит только от n .

Функция Бесселя K_{ρ} задается равенством (см. [43; т. 2]):

$$K_{\rho}(2z) = \frac{\pi}{2 \sin \pi \rho} (I_{-\rho}(2z) - I_{\rho}(2z)), \quad (8.3)$$

где

$$I_{\rho}(2z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{2m+\rho}}{m! \Gamma(m+\rho+1)}. \quad (8.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. При целых ρ ряд для K_{ρ} содержит члены с $\log z$; при полуцелом ρ выражение для K_{ρ} приводится к более простому виду:

$$K_{n+\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{\pi}{2z} \right)^{1/2} e^{-z} \sum_{k=0}^n \frac{(n+k)!}{k! (n-k)! (2z)^k}.$$

Приведем вывод формул (8.1) и (8.2) при $n > 2$. Переходом к сферическим координатам первый интеграл приводится к виду

$$J_1 = c \int_0^\infty \int_0^\varphi (a^2 + r^2)^{-\lambda/2} e^{i|\xi| \cos \varphi} r^{n-2} (\sin \varphi)^{n-3} d\varphi dr.$$

Интегрируя по φ , получаем (см. [54; формула 3.915.5]):

$$J_1 = c |\xi|^{-\frac{n-3}{2}} \int_0^\infty (a^2 + r^2)^{-\lambda/2} r^{\frac{n-1}{2}} J_{\frac{n-3}{2}}(|\xi|r) dr,$$

где $J_\rho(\gamma)$ – функция Бесселя первого рода (см. [43; т. 2]). Аналогично, для интеграла (8.2) получаем выражение

$$J_2 = c |\xi|^{-\frac{n-3}{2}} \int_0^\infty r^{\frac{n-1}{2}-\lambda} J_{\frac{n-3}{2}}(|\xi|r) dr.$$

Интегрируя по r , получаем для J_1 и J_2 соответственно выражения (8.1) и (8.2), см. [54; формулы 6.565.4 и 6.561.14].

Из формулы (8.1) непосредственно следует ее комплексный аналог:

$$\int_{\mathbb{C}^{n-1}} (a^2 + |\gamma|^2)^{-\lambda/2} e^{i\langle \xi, \gamma \rangle} d\gamma = c_n \frac{2^{-\lambda/2}}{\Gamma(\lambda/2)} |\xi|^{(\lambda-2n+2)/2} K_{(2n-2+\lambda)/2}(a|\xi|).$$

8.2. Формулы для интегралов по единичной унитарной сфере
 $S \subset \mathbb{C}^n$. Имеет место соотношение:

$$I(\alpha) \equiv \int_S \prod_{i=1}^n |\omega_i|^{\alpha_i} d\omega = 3\pi^n \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma(\frac{\alpha_i}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \alpha_i + n)}. \quad (8.5)$$

В частности,

$$\int_S |\omega^k|^2 d\omega = \frac{2\pi^n k!}{(|k| + n - 1)!}, \quad k \in \mathbb{Z}_+^n, \quad (8.6)$$

где $\omega^k = \prod \omega_i^{k_i}$, $k! = \prod k_i!$, $|k| = \sum k_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим интеграл по внутренности единичного шара в $\mathbb{C}^n$:

$$I = \int_{|z| \leq 1} \prod_{i=1}^n |z_i|^{\alpha_i} d\mu(z),$$

$d\mu(z)$ – лебегова мера на $\mathbb{C}^n$. Перейдя к сферическим координатам $z = r\omega$, $r > 0$, $\omega \in S$, получаем:

$$I = \int_0^1 r^{\sum \alpha_i + 2n-1} dr I(\alpha) = \frac{1}{2(\frac{1}{2} \sum \alpha_i + n)} I(\alpha).$$

С другой стороны, перейдя к полярным координатам $z_j = r_j e^{i\varphi_j}$, $j = 1, \dots, n$, получаем:

$$I = (2\pi)^n \int_{|r| \leq 1} \prod_{j=1}^n r_j^{\alpha_j+1} dr_j = \pi^n \int_{\sum s_j \leq 1} \prod_{j=1}^n s_j^{\alpha_j/2} ds_j = \pi^n \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma(\frac{\alpha_i}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{1}{2} \sum \alpha_i + n + 1)}.$$

Сравнив эти выражения для I , получаем (8.5).

8.3. Многомерный аналог формулы Дуголла. Имеем для любого $n > 1$:

$$\sum_{|l|=0} \left(\prod_{i=1}^n \Gamma(l_i + a_i + 1) \Gamma(-l_i + b_i + 1) \right)^{-1} = \frac{\Gamma(\sum (a_i + b_i) + 1)}{\Gamma(\sum a_i + 1) \Gamma(\sum b_i + 1) \prod_{i=1}^n \Gamma(a_i + b_i + 1)}, \quad (8.7)$$

где $|l| = l_1 + \dots + l_n$, $l_i \in \mathbb{Z}$, или, в несимметричной форме,

$$\sum_{|l' \in \mathbb{Z}^{n-1}} \left(\Gamma(-|l'| + a_n + 1) \Gamma(|l'| + b_n + 1) \prod_{i=1}^{n-1} \Gamma(l_i + a_i + 1) \Gamma(-l_i + b_i + 1) \right)^{-1} = \frac{\Gamma(\sum (a_i + b_i) + 1)}{\Gamma(\sum a_i + 1) \Gamma(\sum b_i + 1) \prod_{i=1}^n \Gamma(a_i + b_i + 1)}, \quad (8.8)$$

где $|l'| = \sum_{i=1}^{n-1} l_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n = 2$ формула (8.8) совпадает с классической формулой Дуголла, см. [43]:

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\Gamma(l + \alpha_1 + 1) \Gamma(l + \alpha_2 + 1) \Gamma(-l + \beta_1 + 1) \Gamma(-l + \beta_2 + 1) \right)^{-1} = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + 1)}{\Gamma(\alpha_1 + \beta_1 + 1) \Gamma(\alpha_1 + \beta_2 + 1) \Gamma(\alpha_2 + \beta_1 + 1) \Gamma(\alpha_2 + \beta_2 + 1)}.$$

Докажем формулу (8.8) индукцией по n для любого $n > 2$. По формуле Дуголла имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{l_{n-1}=-\infty}^{\infty} & \left(\Gamma(-|l'| + a_n + 1) \Gamma(|l'| + b_n + 1) \Gamma(l_{n-1} + a_{n-1} + 1) \Gamma(-l_{n-1} + b_{n-1} + 1) \right)^{-1} \\ &= \Gamma(a_{n-1} + b_{n-1} + a_n + b_n + 1) \left(\Gamma(a_{n-1} + b_{n-1} + 1) \Gamma(a_n + b_n + 1) \right. \\ & \quad \left. \times \Gamma(-|l''| + a_{n-1} + a_n + 1) \Gamma(|l''| + b_{n-1} + b_n + 1) \right)^{-1}, \end{aligned}$$

где $l'' = l_1 + \dots + l_{n-2}$. Подставив в (8.8), получим:

$$I_n = \frac{\Gamma(a_{n-1} + b_{n-1} + a_n + b_n + 1)}{\Gamma(a_{n-1} + b_{n-1} + 1) \Gamma(a_n + b_n + 1)} I_{n-1},$$

где

$$\begin{aligned} I_{n-1} &= \sum' \left(\Gamma(-|l''| + a_{n-1} + a_n + 1) \Gamma(|l''| + b_{n-1} + b_n + 1) \right. \\ & \quad \left. \times \prod_{i=1}^{n-2} \Gamma(l_i + a_i + 1) \Gamma(-l_i + b_i + 1) \right)^{-1}, \end{aligned}$$

птрих означает, что суммирование ведется только по $l_1, \dots, l_{n-2}$. На основании индуктивного предположения имеем:

$$I_{n-1} = \frac{\Gamma(\sum(a_i + b_i) + 1)}{\Gamma(a_{n-1} + b_{n-1} + a_n + b_n + 1)\Gamma(\sum a_i + 1)\Gamma(\sum b_i + 1)\prod_{i=1}^{n-2}\Gamma(a_i + b_i + 1)}.$$

Отсюда следует (8.8).

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно следующее обобщение формулы (8.7):

$$\begin{aligned} & \sum_{|l|=m} \left(\prod_{i=1}^n \Gamma(l_i + a_i + 1) \Gamma(-l_i + b_i + 1) \right)^{-1} \\ &= \frac{\Gamma(\sum(a_i + b_i) + 1)}{\Gamma(\sum a_i + m + 1) \Gamma(\sum b_i - m + 1) \prod_{i=1}^n \Gamma(a_i + b_i + 1)} \end{aligned} \quad (8.9)$$

для любого $m \in \mathbb{Z}$.

8.4. Вычисление нормы вектора f_p . Норма вектора f_p в пространстве $L^\lambda(\rho)$ имеет вид

$$\|f_p\|_L^2 = \text{const } \rho^{-|p|} p! \frac{\Gamma(n - \lambda) \Gamma(|p| + \frac{\lambda}{2})}{\Gamma(|p| + n - \frac{\lambda}{2}) \Gamma^2(\frac{\lambda}{2})}. \quad (8.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно исходному определению,

$$\|f_p\|^2 = c(\lambda) \rho^{2n-2} \int_{\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^{n-1}} \bar{u}^p v^p Q(\rho|u - v|^2) e^{\rho(vu^* - uu^* - vv^*)} d\mu(u) d\mu(v),$$

где

$$Q(t) = t^{-\frac{\lambda-1}{2}} e^{t/2} K_{\frac{\lambda-1}{2}}(t/2).$$

8.4.1. Сведем сначала это выражение для нормы к выражению

$$\|f_p\|^2 = c(\lambda) \rho^{-|p|} (p!)^2 \sum_{l \leq p} \frac{(-1)^{|l|}}{l! (m-l)! (|l| + n - 2)!} \int_0^\infty s^{|l| + n - 2} Q(s) e^{-s} ds, \quad (8.11)$$

где $c(\lambda) = \frac{2\pi^{1/2}}{\Gamma(\lambda/2)}$.

Для этого сделаем замену $u = \rho^{-1/2} u'$, $v = \rho^{-1/2} v'$, $u' = z + v'$ и воспользуемся тождеством

$$\rho^{-1/2} (vu^* - uu^* - vv^*) = -zv'^* - v'v'^* - zz^*.$$

В новых переменных z и v' (для упрощения вместо v' мы снова пишем v) получим:

$$\begin{aligned} \|f_p\|^2 &= c(\lambda) \rho^{-|p|} \int_{\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^{n-1}} (\bar{z} + \bar{v})^p v^p Q(|z|^2) e^{-(zv^* + vv^* + zz^*)} d\mu(z) d\mu(v) \\ &= c(\lambda) \rho^{-|p|} \\ &\quad \times \sum_{l \leq p} \frac{p!}{l! (p-l)!} \int_{\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^{n-1}} \bar{z}^l \bar{v}^{p-l} v^p Q(|z|^2) e^{-(zv^* + vv^* + zz^*)} d\mu(z) d\mu(v). \end{aligned}$$

Подставим разложение в ряд

$$e^{-zv^*} = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^{n-1}} \frac{(-1)^{|k|}}{k!} z^k \bar{v}^k.$$

Отбросив члены, дающие при интегрировании 0, мы получим:

$$\begin{aligned} \|f_p\|^2 &= c(\lambda) \rho^{-|p|} p! \\ &\times \sum_{l \leq p} \frac{(-1)^{|l|}}{(l!)^2 (m-l)!} \int_{\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^{n-1}} \bar{z}^l z^l \bar{v}^p v^p Q(|z|^2) e^{-(vv^* + zz^*)} d\mu(z) d\mu(v) \\ &= c(\lambda) \rho^{-|p|} p! \left(\int_{\mathbb{C}^{n-1}} v^p \bar{v}^p e^{-vv^*} d\mu(v) \right) \\ &\times \sum_{l \leq p} \frac{(-1)^{|l|}}{(l!)^2 (m-l)!} \int_{\mathbb{C}^{n-1}} z^l \bar{z}^l Q(|z|^2) e^{-|z|^2} d\mu(z). \end{aligned}$$

Первый интеграл в полученном равенстве равен $p!$. Второй приводится к виду

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} s^l Q\left(\sum s_i\right) e^{-\sum s_i} \prod_{i=1}^{n-1} ds_i \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} \left(s - \sum_{i=2}^{n-1} s_i\right)^{l_1} \left(\prod_{i=2}^{n-1} s_i\right) Q(s) e^{-s} ds \prod_{i=2}^{n-1} ds_i \\ &= \frac{l!}{(|l| + n - 2)!} \int_0^\infty s^{|l|+n-2} Q(s) e^{-s} ds. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|f_p\|^2 = c(\lambda) \rho^{-|p|} (p!)^2 \sum_{l \leq p} \frac{(-1)^{|l|}}{l! (m-l)! (|l| + n - 2)!} \int_0^\infty s^{|l|+n-2} Q(s) e^{-s} ds.$$

8.4.2. Убедимся теперь, что после подстановки в (8.11) выражения для $Q(t)$ мы получим

$$\begin{aligned} \|f_p\|^2 &= \frac{2\pi}{\Gamma(\lambda/2)} \rho^{-|p|} (p!)^2 \sum_{l \leq p} \frac{(-1)^{|l|} \Gamma(|l| + n - \lambda)}{l! (p-l)! \Gamma(|l| + n - \frac{\lambda}{2})} \\ &= \pi^{3/2} \frac{\rho^{-|p|-2n+2} (p!)^2}{\sin \pi(n - \lambda)} \\ &\times \sum_{l \in \mathbb{Z}^{n-1}} \left(\Gamma\left(|l| + n - \frac{\lambda}{2}\right) \Gamma(-|l| - n + \lambda + 1) \right. \\ &\quad \left. \times \prod_{i=1}^{n-1} \Gamma(l_i + 1) \Gamma(p_i - l_i + 1) \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Воспользуемся формулой

$$\int_0^\infty e^{-as} K_\nu(as) s^{\mu-1} ds = \pi^{1/2} \frac{\Gamma(\mu + \nu) \Gamma(\mu - \nu)}{(2a)^\mu \Gamma(\mu + 1/2)},$$

см. [45; с. 331, (28)]. При $\nu = (\lambda - 1)/2$, $\mu = |l| + n - (\lambda + 1)/2$, $a = 1/2$ имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty s^{|l|+n-2} Q(s) e^{-s} ds &= \int_0^\infty s^{|l|+n-2-\frac{\lambda-1}{2}} K_{\frac{\lambda-1}{2}}(s/2) e^{-s/2} ds \\ &= \pi^{1/2} \frac{\Gamma(|l| + n - 1), \Gamma(|l| + n - \lambda)}{\Gamma(|l| + n - \frac{\lambda}{2})}. \end{aligned}$$

Отсюда следует (8.12).

8.4.3. Применим, наконец, формулу Дуголла (8.8) к сумме (8.12). В нашем случае $a_i = 0$, $b_i = p_i$ при $i \leq n$, $a_n = -n + \lambda$ и $a = n - \frac{\lambda}{2} - 1$. Следовательно,

$$\|f_p\|^2 = c(\lambda) \pi^{3/2} \frac{\rho^{-|p|} (p!)^2}{\sin \pi(n - \lambda) \Gamma(\frac{\lambda}{2}) \Gamma(|p| + n - \frac{\lambda}{2}) \Gamma(\lambda - n + 1) p!} \frac{\Gamma(|p| + \frac{\lambda}{2})}{\Gamma(\frac{\lambda}{2})}.$$

Отсюда подстановкой $\sin(\pi(n - \lambda)) \Gamma(\lambda - n + 1) = \pi \Gamma^{-1}(n - \lambda)$ получаем (8.10).

8.5. Вывод формулы (6.46) для оператора T_s в баргмановской модели. Имеет место соотношение

$$T_s^+(\rho_+^\alpha z^k) = (-1)^{|k|} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(-\alpha + |k|)} \rho_+^{-\alpha + |k|} z^k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 6.14 следует, что

$$T_s^+(\rho_+^\alpha z^k) = f(\rho) z^k = \tau \psi_1(\rho, z),$$

где, согласно (6.45), функция $\psi_1(\rho, z)$ задается равенством

$$\begin{aligned} \psi_1(\rho, z) &= \rho^{-n+1} \left(\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-\rho\zeta + \frac{\rho'}{\zeta}} |\zeta|^{-2n} \zeta^{-|k|} (\rho')^{\alpha+n-1} dt d\rho' \right) z^k \\ &= (-1)^{|k|} \Gamma(\alpha + n) \rho^{-n+1} \\ &\quad \times \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-\rho\zeta} (-\bar{\zeta})^{-n} (-\zeta)^{-|k|+\alpha} dt \right) z^k, \quad \zeta = it - \frac{|z|^2}{2}. \end{aligned}$$

Согласно (6.44), из равенства $f(\rho) z^k = \tau \psi_1(\rho, z)$ следует, что функция $f(\rho)$ задается формулой

$$f(\rho) = \frac{\rho^{|k|+n-1}}{k!} \int_{\mathbb{C}^{n-1}} \psi_1(\rho, z) \bar{z}^k e^{-\rho|z|^2} d\mu(z).$$

Перейдем к вычислению этой функции. Учитывая, что $-\rho\zeta - \rho|z|^2 = \rho\bar{\zeta}$, имеем:

$$f(\rho) = \frac{(-1)^{|k|} \Gamma(\alpha + n)}{k!} \rho^{|k|} \int_{-\infty}^\infty \int_{\mathbb{C}^{n-1}} e^{\rho\bar{\zeta}} (-\bar{\zeta})^{-n} (-\zeta)^{-|k|+\alpha} |z^k|^2 d\mu(z) dt.$$

Сделаем замену $t \rightarrow \rho^{-1}t$, $z \rightarrow \rho^{-1/2}z$, получаем:

$$f(\rho) = \frac{(-1)^{|k|} \Gamma(\alpha + n)}{k!} c(\alpha, k) \rho^{-\alpha + |k|},$$

где

$$c(\alpha, k) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{C}^{n-1}} e^{\bar{\zeta}(-\bar{\zeta})^{-n}(-\zeta)^{-|k|+\alpha}} |z^k|^2 d\mu(z) dt.$$

Для вычисления $c(\alpha, k)$ перейдем от комплексных переменных z_j к переменным $r_j = |z|^2/2$ и $\varphi_j = \arg z_j$. Так как подынтегральная функция не зависит от φ_j , мы получим, полагая $r = \sum r_j$:

$$\begin{aligned} c(\alpha, k) &= c \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} e^{-(r+it)} (r+it)^{-n} (r-it)^{-|k|+\alpha} \prod r_j^{k_j} dr_j dt \\ &= c' \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(r+it)} (r+it)^{-n} (r-it)^{-|k|+\alpha} r^{|k|+n-2} dr dt. \end{aligned}$$

Положив затем $r+it = u e^{i\varphi}$, $u > 0$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, приведем интеграл к виду

$$c(\alpha, k) = c' \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-u e^{i\varphi}} u^{\alpha-1} e^{-(-|k|+\alpha+n)\varphi} (\cos \varphi)^{|k|+n-2} d\mu(u) d\varphi.$$

Интегрируя по u , получаем:

$$\begin{aligned} c(\alpha, k) &= c' \Gamma(\alpha) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-(-|k|+2\alpha+n)\varphi} (\cos \varphi)^{|k|+n-2} d\varphi \\ &= c'' \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(-\alpha+|k|)}, \end{aligned}$$

см. [54; с. 386, формула 9], выражение для последнего интеграла.

В результате получается:

$$T_s(\rho^\alpha z^k) = c(-1)^{|k|} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(-\alpha+|k|)} \rho^{-\alpha+|k|} z^k, \quad c > 0.$$

Из равенства $T_s^2 = \text{id}$ следует, что $c = 1$.

Список литературы

- [1] Ю. А. Неретин, Г. И. Ольшанский, “Граничные значения голоморфных функций, особые унитарные представления групп $O(p, q)$ и их пределы при $q \rightarrow \infty$ ”, *Теория представлений, динамические системы, комбинаторные и алгоритмические методы. I*, Записки науч. сем. ПОМИ, **223**, ред. А. М. Вершик, Наука, СПб., 1995, 9–91.
- [2] А. М. Вершик, С. И. Карпушев, “Когомологии групп в унитарных представлениях, окрестность единицы и условно положительно определенные функции”, *Матем. сб.*, **119(161)**:4(12) (1982), 521–533.
- [3] Д. А. Каждан, “О связи дуального пространства группы со строением ее замкнутых подгрупп”, *Функц. анализ и его прилож.*, **1**:1 (1967), 71–74.
- [4] C. Delaroché, A. Kirillov, “Sur les relations entre l’espace dual d’un groupe et la structure de ses sous-groupes fermés”, *Séminaire Bourbaki* 1967/68, 20e année, exp. 343, Benjamin, 1969.
- [5] M. Bekka, P. de la Harpe, A. Valette, *Kazhdan’s property (T)*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (to appear).

- [6] Y. Shalom, “Rigidity, unitary representation of semisimple groups, and fundamental groups of manifolds with rank one transformation group”, *Ann. of Math.* (2), **152**:1 (2000), 113–182.
- [7] P. Delorme, “1-cohomologie des représentations unitaires des groupes de Lie semi-simples et résolubles. Produits tensoriels continus des représentations”, *Bull. Soc. Math. France*, **105**:3 (1977), 281–336.
- [8] R. S. Ismagilov, *Representations of infinite-dimensional groups*, Transl. Math. Monogr., **152**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
- [9] А. Гишарде, *Когомологии топологических групп и алгебр Ли*, Мир, М., 1984.
- [10] G. Kuhn, A. Vershik, “Canonical semigroups of states and cocycles for the group of automorphisms of a homogeneous tree”, *Algebr. Represent. Theory*, **6**:3 (2003), 333–352.
- [11] А. М. Вершик, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, “Неприводимые представления группы G^X и когомологии”, *Функц. анализ и его прилож.*, **8**:2 (1974), 67–69.
- [12] J. Faraut, K. Harzallah, “Distances hilbertiennes invariantes sur un espace homogène”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **24**:3 (1974), 171–217.
- [13] P. de la Harpe, A. Valette, *La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts*, Astérisque, **175**, Soc. Math. France, Paris, 1989.
- [14] А. М. Вершик, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, “Представления группы $SL(2, \mathbf{R})$, где $\mathbf{R}$ – кольцо функций”, *УМН*, **28**:5 (1973), 83–128.
- [15] A. Guichardet, “Représentations de G^X selon Gelfand et Delorme”, *Séminaire Bourbaki* 1975/76, 28-e année, exp. 486, Lecture Notes in Math., **567**, Springer, Berlin, 1977, 238–255.
- [16] G. Segal, “Two papers on representation theory”, *Representation theory*, London Math. Soc. Lecture Note Series, **69**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, New York, 1982, 1–13.
- [17] А. М. Вершик, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, “Коммутативная модель основного представления группы $GL(2, \mathbb{R})^X$ относительно унитарной подгруппы”, *Теоретико-групповые методы в физике*, Труды междунаrodn. сем., т. 2 (Звенигород, 1982), Наука, М., 1983, 472–487.
- [18] А. М. Вершик, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, “Коммутативная модель представления группы токов $SL(2, \mathbb{R})^X$, связанная с унитарной подгруппой”, *Функц. анализ и его прилож.*, **17**:2 (1983), 70–72.
- [19] А. М. Вершик, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, *Коммутативная модель основного представления группы $SL(2, \mathbb{R})^X$ относительно унитарной подгруппы*, Препринт № 169, ИПМ АН СССР, М., 1982.
- [20] I. M. Gel’fand, M. I. Graev, A. M. Vershik, “Models of representations of current groups”, *Representations of Lie groups and Lie algebras* (Budapest, 1971), Akad. Kiadó, Budapest, 1985, 121–179.
- [21] А. М. Вершик, М. И. Граев, “Коммутативная модель представления группы токов $O(n, 1)^X$ и обобщенная лебегова мера в пространстве распределений”, *Функц. анализ и его прилож.*, **39**:2 (2005), 1–12.
- [22] M. I. Graev, A. M. Vershik, “The basic representation of the current group $O(n, 1)^X$ in the L^2 space over the generalized Lebesgue measure”, *Indag. Math. (N.S.)*, **16**:3–4 (2005), 499–529.
- [23] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, “Особые представления группы $SU(n, 1)$ и проективные унитарные представления группы токов $SU(n, 1)^X$ ”, *Докл. РАН*, **332**:3 (1993), 280–282.
- [24] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, “Проективные неунитарные представления групп токов”, *Докл. РАН*, **338**:3 (1994), 298–301.
- [25] Ф. А. Березин, “Представления непрерывного прямого произведения универсальных накрывающих группы движений комплексного шара”, *Тр. ММО*, **36** (1978), 275–293.

- [26] H. Araki, “Factorizable representations of the current algebra. Noncommutative extension of the Lévy–Khinchin formula and cohomology of a solvable group with values in a Hilbert space”, *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Ser. A*, **5**:3 (1969/70), 361–422.
- [27] H. Araki, E. J. Woods, “Complete Boolean algebras of type I factors”, *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Ser. A*, **2**:2 (1966), 157–242.
- [28] K. R. Parthasarathy, K. Schmidt, *Infinitely divisible projective representations, cocycles, and Lévy–Khinchine–Araki formula on locally compact groups*, Research Report № 17, Manchester–Sheffield School of Probability and Statistics, 1970.
- [29] K. R. Parthasarathy, K. Schmidt, “Factorisable representations of current groups and the Araki–Woods embedding theorem”, *Acta Math.*, **128**:1 (1972), 53–71.
- [30] K. R. Parthasarathy, K. Schmidt, *Positive definite kernels, continuous tensor products, and central limit theorems of probability theory*, Lecture Notes in Math., **272**, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [31] R. F. Streater, “Current communication relations, continuous tensor products, and infinitely divisible group representations”, *Rend. Sci. Istit. Fis. E. Fermi*, **II** (1969), 247–263.
- [32] R. F. Streater, “Infinitely divisible representations of Lie algebras”, *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb.*, **19**:1 (1971), 67–80.
- [33] А. М. Вершик, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, *Представления группы диффеоморфизмов, связанные с бесконечными конфигурациями*, Препринт № 46, ИПМ АН СССР, М., 1975.
- [34] А. М. Вершик, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, “Представления группы диффеоморфизмов”, *УМН*, **30**:6 (1975), 3–50.
- [35] I. M. Gel’fand, M. I. Graev, “Principal representations of the group $U(\infty)$ ”, *Representation of Lie groups and related topics*, Adv. Stud. Contemp. Math., **7**, Gordon and Breach, New York, 1990, 119–153.
- [36] Г. И. Олшанский, “Сферические функции и характеры на группе $U(\infty)$ ”, *УМН*, **37**:2 (1982), 217–218.
- [37] A. Guichardet, *Symmetric Hilbert spaces and related topics. Infinitely divisible positive definite functions. Continuous products and tensor products. Gaussian and Poissonian stochastic processes*, Lecture Notes in Math., **261**, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [38] И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин, *Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства*, Обобщенные функции, **4**, Физматгиз, М., 1961.
- [39] Ф. А. Березин, “Квантование в комплексных симметрических пространствах”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **39**:2 (1975), 363–402.
- [40] N. Tsilevich., A. Vershik, M. Yor, “An infinite-dimensional analogue of the Lebesgue measure and distinguished properties of the gamma process”, *J. Funct. Anal.*, **185**:1 (2001), 274–296.
- [41] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Н. Я. Виленкин, *Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений*, Обобщенные функции, **5**, Физматгиз, М., 1962.
- [42] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, И. И. Пятацкий-Шапиро, *Теория представлений и автоморфные функции*, Наука, М., 1966.
- [43] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*. [Т. 1:] *Гиперболическая функция. Функции Лежандра*, Наука, М., 1973; [Т. 2:] *Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены*, Наука, М., 1974.
- [44] А. М. Переломов, *Обобщенные когерентные состояния и их применения*, Наука, М., 1987.
- [45] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Таблицы интегральных преобразований. Т. 1: Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина*, Наука, М., 1969.

- [46] М. И. Граев, “Унитарные представления вещественных простых групп Ли”, *Тр. ММО*, **7** (1958), 335–389.
- [47] М. И. Граев, “Неприводимые унитарные представления группы матриц третьего порядка, сохраняющих индефинитную эрмитову форму”, *Докл. АН СССР*, **113**:5 (1957), 966–969.
- [48] Ф. А. Березин, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, М. А. Наймарк, “Представления групп”, *УМН*, **11**:6 (1956), 13–40.
- [49] Хуа Ло-кен, *Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях*, ИЛ, М., 1959.
- [50] G. van Dijk, S. C. Hille, “Canonical representations related to hyperbolic spaces”, *J. Funct. Anal.*, **147**:1 (1997), 109–139.
- [51] V. F. Molchanov, L. I. Grosheva, “Canonical and boundary representations on the Lobachevsky plane”, The 2000 Twente conference on Lie groups (Enschede), *Acta Appl. Math.*, **73**:1–2 (2002), 59–77.
- [52] V. F. Molchanov, “Canonical representations on the two-sheeted hyperboloid”, *Indag. Math.*, **16**:3–4 (2005), 609–630.
- [53] Ф. А. Березин, “Квантование”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **38**:5 (1974), 1116–1175.
- [54] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматгиз, М., 1962.

А. М. Вершик (A. M. Vershik)

Санкт-Петербургское отделение

Математического института им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: vershik@pdmi.ras.ru

Поступила в редакцию

10.05.2006

М. И. Граев (M. I. Graev)

Научно-исследовательский институт

системных исследований РАН

E-mail: graev_36@mtu-net.ru