Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М.-М. Деза, М. И. Штогрин, Полициклы: симметрия и вложимость, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 6, 129–130

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm339>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 15:43:15

ПОЛИЦИКЛЫ: СИММЕТРИЯ И ВЛОЖИМОСТЬ

М. ДЕЗА, М. И. ШТОГРИН

Пусть G – простой планарный 2-связный (вершинно) конечный или счетный граф обхвата r с максимальной степенью вершины q . Назовем его (r, q) -полициклом, если он допускает (r, q) -полициклическую реализацию $\Pi(G)$ на $\mathbb{R}^2$, т.е. такую, см. [1]–[4], что 1) все внутренние грани суть (комбинаторные) r -гоны, 2) все внутренние вершины имеют степень q , 3) все вершины, ребра и внутренние грани образуют клеточный комплекс. В [1], [3] было показано, что любой полицикл G имеет единственную полициклическую реализацию $\Pi(G)$.

Гелицены. Назовем (r, q) -полицикл *собственным*, если он является частичным подграфом графа (r^q) – остова разбиения (r^q) сферы $\mathbb{S}^2$, евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ или плоскости Лобачевского $\mathbb{H}^2$ на правильные r -угольники с углами $2\pi/q$. Соответственно этому назовем пары (r, q) эллиптическими, параболическими или гиперболическими при $rq < 2(r+q)$, $rq = 2(r+q)$ или $rq > 2(r+q)$. В частности, $\Pi(r^q) \cong (r^q)$ для всех пар (r, q) , кроме эллиптических, когда $\Pi(r^q)$ есть (r^q) без внешней грани. Несобственные (r, q) -полициклы называются (r, q) -гелицеными, так как в [1], [3] было показано, что для любого полицикла G имеется клеточное отображение $f: \Pi(G) \rightarrow (r^q)$, которое однозначно определяется заданием флага и его образа. Число $(5, 3)$ -гелиценов с $p_5 = 5, 6, 7$ равно 1, 7, 29, а число $(3, 5)$ -гелиценов с $p_3 = 7, 8, 9, 10$ равно 1, 4, 20, 74. Любой гелицен с $(r, q) \neq (3, 3)$ имеет $p_r \geq 1 + (q-2)(r-1)$ с равенством только для гелицена, обходящего r -гон. Есть всего три $(3, 3)$ -полицикла, счетное число $(3, 4)$ - и $(4, 3)$ -полициклов и континуум (r, q) -полициклов для всех других (r, q) .

Внешнепланарные гелицены близки к собственным в следующем смысле.

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – произвольный внешнепланарный (r, q) -полицикл. Тогда

- (1) G является собственным $(r, 2q-2)$ -полициклом и образ $f(\Pi(G))$ выпуклый в (r^{2q-2}) ;
- (2) если $r = 3$, то G является собственным $(3, q+2)$ -полициклом.

Теорема 1 вытекает из того, что односвязный образ $f(\Pi(G))$ выпуклый, если его граничные углы не больше π . Но уже для $p_3 = 7$ есть внешнепланарные $(3, 4)$ - и $(3, 5)$ -полициклы, несобственные в (3^5) и (3^6) . Примером внешнепланарного (r, q) -полицикла, являющегося собственным $(r, 2q-3)$ -полициклом, но не выпуклым в (r^{2q-3}) , служит *веер* из $q-1$ r -гонов.

Вложимость. Назовем полицикл *вложимым*, если его метрика вложима изометрически или со шкалой 2 в метрику остова гиперкуба $\mathbb{H}_m$ или кубической решетки $\mathbb{Z}_m$, $m \leq \infty$.

ТЕОРЕМА 2. (1) $(5, 3)$ -полицикл не вложим тогда и только тогда, когда он отличен от (5^3) и имеет в качестве индуцированного подграфа один из полициклов на рис. 2, 3.

(2) Единственный невложимый $(3, 5)$ -полицикл с $p_3 \leq 10$ дан на рис. 4.

(3) Для $(r, q) \neq (3, 5)$, $(5, 3)$ невложимы только $(3^4) - e$, $(4^3) - e$ и $(3, 4)$ -гелицен из рис. 1.

ЗАМЕЧАНИЕ. (1) Конечный вложимый (r, q) -полицикл периметра m вложим в $\frac{1}{2}\mathbb{H}_m$ (и в $\mathbb{H}_{\frac{m}{2}}$ при четном m), если нет замкнутых зон из внутренних ребер. (2) Есть континуум $(6, 3)$ -полициклов, вложимых только в $\mathbb{Z}_\infty$. (3) Собственный (r, q) -полицикл может быть частичным, индуцированным и даже изометрическим подграфом вложимого графа (r^q) .

Симметрия. Обозначим через $\text{Aut } G$ группу симметрии (r, q) -полицикла G . Ясно, что $\text{Aut } G$ есть подгруппа группы $\text{Aut}(r^q)$, если G собствен, и расширение группы $\text{Aut } f(\Pi(G))$, если G гелицен. Если полицикл G конечен и $\Pi(G)$ содержит неподвижную точку, то $\text{Aut } G$ состоит только из зеркал и вращений вокруг нее, порядок группы делит $2r$, 4 или $2q$ в зависимости от того,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00010) и фонда поддержки ведущих научных школ (грант № 00-15-96011).

фиксирует ли $\text{Aut } G$ центр r -гона, середину ребра или вершину (соответствующие группы суть D_{rh}, D_{2h}, D_{qh}). Никакой из $(3, 3)$ -, $(3, 4)$ -, $(4, 3)$ -полициклов не имеет, но почти все (r, q) -полициклы при других (r, q) имеют тривиальную группу $\{\text{id}\}$.

Следуя [5], назовем полицикл G *изотоксальным*, *изоэдральным*, *изогональным* (сокращенно IT, IH, IG), если $\text{Aut } G$ транзитивна на его ребрах, r -гонах, вершинах соответственно. Все IT -полициклы: r -гоны и графы (r^q) . Их группы: D_{rh} и $T^*(2, r, q)$, где $T^*(s, r, q)$ есть коксетеровская группа для фундаментального треугольника с углами $\pi/s, \pi/r, \pi/q$ (см., например, [6]), а $T(s, r, q)$ обозначает ее подгруппу (индекса 2) движений, сохраняющих ориентацию. При этом $T(2, 3, \infty) \approx PSL(2, \mathbb{Z})$ (модулярная группа), $T^*(2, 3, \infty) \approx SL(2, \mathbb{Z})$, $T^*(2, 2, \infty) = pm2$, $T(2, 2, \infty) = p112 \approx pm11 \approx pma2 \not\approx p1m1$.

ГИПОТЕЗА (верна для эллиптических (r, q)): все IG - и IH -, но не IT -полициклы, это полицикл из рис. 5 (с группой $pma2$) и $(2k, 3)$ -кактусы для всех $k \geq 2$ (с группой $T^*(2, k, \infty)$).

Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

Рис. 4

Рис. 5

Рис. 6

ТЕОРЕМА 3. Все IG -, но не IT -полициклы являются бесконечными внешнепланарными.

В [7; табл. 4] даны два примера IG -, но не IH -полициклов с $(r, q) = (3, 5), (4, 4)$ и $\text{Aut } G = T(2, 3, \infty), T^*(2, 4, \infty)$ соответственно. При этом $(3, 5)$ -полицикл является единственным IG -, но не IH -полициклом для эллиптических (r, q) .

ТЕОРЕМА 4. Пусть G – произвольный изоэдральный (r, q) -полицикл. Тогда

- (1) любой r -гон имеет одно и то же число t граничных ребер полицикла;
- (2) если $t = r, r - 1$ или $t = 0$, то G есть r -гон, пара смежных r -гонов или граф (r^q) ;
- (3) если $t = r - 2$, то G является q -звездой r -гонов или бесконечным внешнепланарным; при $t = r - 2 = 1$ есть только два полицикла, см. рис. 5, 6 (их $q = 4, 5$ и $\text{Aut } G = pma2$);
- (4) если $1 \leq t \leq r - 3$, то G бесконечны; есть $(r, 4)$ -полицикл G с любым r и $t = 1$ (например, $\text{Aut } G$ порождена отражениями от $r - 1$ сторон прямоугольного r -гона);
- (5) для эллиптических (r, q) все изоэдральные полициклы (см. [7; табл. 3]) суть 11 конечных (r -гоны, пары r -гонов, q -звезды r -гонов), $P_2 \times P_{\mathbb{N}}$, шесть его декораций и $(5, 3)$ -кактус.

Многочисленные семейства бесконечных изоэдральных полициклов даны в [7; табл. 5 (с ленточными группами), табл. 6 (кактусы)]; среди их $\text{Aut } G$ только группа $3 \times T^*(\infty, \infty, \infty) \not\approx T(2, 3, \infty)$ отлична от треугольных групп $T(s, r, q)$ и $T^*(s, r, q)$.

Назовем (r, q) -полицикл квази- IH , если он не IH , но любой r -гон имеет одну и ту же 1-корону. Для $r \geq 5$ существует континуум квази- IH (r, q) -полициклов G с $\text{Aut } G = \{\text{id}\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Деза М., Штогрин М. И. // УМН. 1999. Т. 54. №6. С. 159–160. [2] Деза М., Штогрин М. И. // УМН. 2000. Т. 55. №1. С. 179–180. [3] Штогрин М. И. // УМН. 1999. Т. 54. №6. С. 177–178. [4] Штогрин М. И. // УМН. 2000. Т. 55. №2. С. 155–156. [5] Grünbaum B., Shephard G. C. Tilings and Patterns. New York: Freeman, 1987. [6] Magnus W. Noneuclidean Tessellations and Their Groups. New York: Academic Press, 1974. [7] Деза М., Штогрин М. И. Экстремальные и нерасширяемые полициклы (в печати).