Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Доброхотов, Интегрирование в квадратурах $2n$ -мерных линейных гамильтоновых систем с n известными косоортогональными решениями, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 2, 143–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm34>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 17:59:32

**ИНТЕГРИРОВАНИЕ В КВАДРАТУРАХ $2n$ -МЕРНЫХ
ЛИНЕЙНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ
С n ИЗВЕСТНЫМИ КОСООРТОГОНАЛЬНЫМИ РЕШЕНИЯМИ**

С. Ю. ДОБРОХОТОВ

Предположим, что у гамильтоновой системы $\dot{x} = JHx(x)$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}$ в $2n$ -мерном фазовом пространстве $\mathbb{R}_x^{2n}$ с гамильтонианом $H(x) \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R}_x^{2n})$ имеется n -мерное инвариантное лагранжево многообразие (компактное или некомпактное) $\Lambda = \{x \in \mathbb{R}_x^{2n} : x = X(\varphi)\}$ с накрывающей, диффеоморфной $\mathbb{R}^n$, и с координатами (на накрывающей) $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in \mathbb{R}^n$, такими что ее траектории на Λ имеют вид $x = X(\varphi + \omega t)$, где $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$ -вектор “частот”. Мы обозначаем через E_n $n \times n$ единичную матрицу, и через 0 матрицу нужного размера с нулевыми элементами. Условие лагранжевости означает, что в любой точке φ все касательные векторы $\partial X / \partial \varphi_j$ косоортогональны друг другу: $(X_{\varphi_j}, JX_{\varphi_k}) = 0$ для всех $j, k = 1, \dots, n$ (см., например, [1], [3], [4]). Эти векторы линейно-независимы в силу условия $\dim \Lambda = n$. Гамильтонова система и траектории $x = X(\varphi + \omega t)$ порождают систему в вариациях $\dot{z} = JA(t)z$, где $A = \|\partial^2 H / \partial x_i \partial x_j(X(\varphi + \omega t))\|$.

Хорошо известно (и очевидно), что вектор-функции $Y_j(t) = X_{\varphi_j}(\varphi + \omega t)$ являются решениями этой системы. Из общей теории линейных систем следует, что знание n линейно-независимых решений n -мерной линейной системы позволяет понизить ее порядок на n . Оказывается, что для системы в вариациях знание решений Y_j позволяет явно (в квадратурах) построить все остальные ее решения. Хотя этот факт представляется весьма естественным, его доказательство элементарно, и он в неявной форме, вероятно, использовался в работах, связанных с теорией возмущений гамильтоновых систем и геометрическим квантованием, тем не менее ни мне, ни многим специалистам в области гамильтоновых систем соответствующие формулы не были известны.

Введем $2n \times n$ матрицу $Y(t) = (Y_1, \dots, Y_n)$ и $n \times n$ невырожденную матрицу ${}^tY(t)Y(t)$, где индекс t слева сверху означает транспонирование. В силу косоортогональности векторов $Y_1, \dots, Y_n$ справедливо равенство ${}^tY J Y = 0$. Обозначим через $M(t)$ $n \times n$ матрицу $M(t) = ({}^tY(t)Y(t))^{-1}$ и через $[A, J] = AJ - JA$. Далее определим $n \times n$ матрицу

$$(1) \quad R(t) = \int_0^t M(\xi) {}^tY(\xi) J [A(\xi), J] Y(\xi) M(\xi) d\xi$$

и $(2n \times 2n)$ -матрицу $\Phi(t) = (Y(t), Y(t)R(t) + JY(t)M(t))$.

ТЕОРЕМА 1. Матрица $\Phi(t)$ есть фундаментальная матрица системы $\dot{z} = JA(t)z$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно каждый из векторов $Y_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, ортогонален каждому из векторов $JY_j(t)$, $j = 1, \dots, n$. Поэтому совокупность этих векторов образует базис в евклидовом пространстве $\mathbb{R}_x^{2n}$. Так как Y_j являются решениями системы в вариациях, то фундаментальная матрица может быть представлена в виде, указанном в теореме, с некоторыми матрицами $M(t)$ и $R(t)$. Выберем матрицу $M(t)$ таким образом, чтобы при $t = 0$ Φ была симплектической, т.е. чтобы ${}^t\Phi J \Phi = J$. В силу гамильтоновости линейной системы в вариациях это свойство сохраняется для всех t (см., например, [1], [2].) Отсюда немедленно следует равенство $M(t) = ({}^tY(t)Y(t))^{-1}$. Теперь нам осталось подставить в систему в вариациях матричнозначную функцию $Y(t)R(t) + JY(t)M(t)$ и потребовать, чтобы она была ее решением. Учитывая, что $Y(t)$ есть решение этой системы, умножая затем полученное равенство на $M^t Y$ слева, и интегрируя результат приходим к (1).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из доказательства ясно, что теорема справедлива для любой линейной гамильтоновой системы $\dot{z} = JA(t)z$ с $A(t) = {}^tA(t)$, у которой известно $(2n \times n)$ -матричное решение, вектор-столбцы которого линейно независимы и косоортогональны. В частности теорема справедлива для системы второго порядка ($n = 1$) с коэффициентами $a_{12} = 0$, $a_{11} = 1$,

$a_{22} = a(t)$. Если обозначить $v = y_2$, $\dot{v} = y_1$, то для v имеем уравнение $\ddot{v} + a(t)v = 0$. Пусть $v_1(t)$ – некоторое его решение, тогда второе линейно независимое решение имеет вид

$$v_2 = v_1 \int_0^t (a(t) - 1)(v_1^2 - \dot{v}_1^2)/(v_1^2 + \dot{v}_1^2)^2 dt + \dot{v}_1/(v_1^2 + \dot{v}_1^2).$$

По сравнению с хорошо известной формулой для второго решения $v_2 = v_1 \int dt/v_1^2$, эта формула имеет более громоздкий вид, но в отличие от последней она годится (без дополнительных исследований) в том случае, когда v_1 обращается в ноль в некоторых точках.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть Λ – тор и система $\dot{x} = JH_x$ вполне интегрируема в некоторой окрестности Λ . Тогда в ней можно ввести переменные действия $I = (I_1, \dots, I_n)$, сопряженные с φ (см. [1]); считаем, что равенство $I = I^0$ задает Λ . Матрица $W(\varphi, t) = X_I(\varphi + \omega t) + tX_\varphi(\varphi + \omega t)\omega_I$, где $\omega_I = \|\partial\omega_i/\partial I_j\|$, $i, j = 1 \dots, n$, является матричным решением системы вариаций. С учетом симплектичности матрицы (X_φ, X_I) имеем $X_I(\varphi) = JX_\varphi\widetilde{M}(\varphi) + X_\varphi(\varphi)Q(\varphi)$, где $\widetilde{M}(\varphi) = ({}^tX_\varphi(\varphi)X_\varphi(\varphi))^{-1}$ и $Q(\varphi)$ – гладкая $(n \times n)$ -матричнозначная функция. Очевидно, $W(\varphi, t) - X_\varphi(\varphi + \omega t)Q(\varphi)$ есть $(2n \times n)$ -матричное решение этой же системы, совпадающее со вторым блоком фундаментального решения Φ . Отсюда для $I = I^0$ немедленно следует (“гомологическое”) уравнение для определения $Q(\varphi)$ (и тем самым для $X_I(\varphi)|_{I=I^0}$) и формула для $\omega_I|_{I=I^0}$:

$$Q(\varphi + \omega t) = Q(\varphi) + \int_0^t \widetilde{M}^t X_\varphi J[H_{xx}, J]X_\varphi \widetilde{M}|_{\varphi'=\varphi+\omega\xi} d\xi - t\omega_I,$$

$$\omega_I|_{I=I^0} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \widetilde{M}^t X_\varphi J[H_{xx}, J]X_\varphi \widetilde{M}|_{\varphi'=\varphi+\omega\xi} d\xi.$$

В “вырожденных” ситуациях гамильтоновы системы допускают лишь k -мерные изотропные многообразия ($k < n$), движение на которых по-прежнему имеет вид $x = X(\varphi + \omega t)$, но φ и ω в этих формулах k -мерные векторы и соответствующая матрица $Y = X_\varphi$ состоит из k линейно независимых попарно косоортогональных векторов. Часто, однако, удается построить еще $n - k$ комплексных линейно независимых решений и $n - k$ комплексно сопряженных к ним (см. [3], [4]). Таким образом, оказывается известно $2n - k$ линейно независимых решений, образующих $2n \times (n - k)$ матрицы $Z(t)$ и $\overline{Z}(t)$ и $2n \times k$ матрицу $Y(t)$. Они нормированы условиями ${}^t\overline{Z}JZ = 2iE_{n-k}$, ${}^tZJY = O$, ${}^tZJZ = O$. В этом случае “недостающий” блок в фундаментальной матрице $\Phi(t) = (\overline{Z}, Z, Y, U) - (2n \times k)$ -матрицу $U(t)$ тоже удастся выразить в квадратурах, хотя и с помощью более сложной (по виду) формулы. Введем $(k \times k)$ -матрицу $M(t) = ({}^tY(t)Y(t))^{-1}$, $((n - k) \times k)$ -матрицу $G(t) = \frac{i}{2} {}^tZY M$ и $(k \times k)$ -матрицу

$$R = \int_0^t M^t Y \left(J - \frac{i}{2} (\overline{Z}^t Z - Z^t \overline{Z})(E_{2n} - Y M^t Y) \right) [A, J] Y M d\xi.$$

ТЕОРЕМА 2. Положим $U = \overline{Z}G + Z\overline{G} + YR + JYM$. Тогда при сформулированных выше предположениях $\Phi(t) = (\overline{Z}, Z, Y, U)$ есть фундаментальная матрица системы $\dot{z} = JA(t)z$, при этом ${}^t\overline{Z}JU = {}^tZJU = O$, ${}^tYJU = E_k$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фунд. напр. Т. 3. М.: ВИНТИ, 1985. С. 5–300. [2] Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. [3] Маслов В.П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977. [4] Нехорошев Н.Н. // Труды ММО. 1972. Т. 26. С. 181–198.