Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Демидов, Об обратной задаче для уравнения Грэда–Шафранова с аффинной правой частью, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 6, 131–132

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm340>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 15:41:23

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГРЭДА–ШАФРАНОВА С АФФИННОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

А. С. Демидов

Речь идет (ср. [1], [2]) о возможности идентификации вещественных параметров a и b в правой части уравнения

$$(1) \quad \Delta u = au + b \geq 0 \quad \text{в } \Omega \in \mathbb{R}^2$$

для функции $u \in C^2(\overline{\Omega})$, удовлетворяющей краевым условиям:

$$(2) \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\partial\Omega} = \Phi$$

с некоторой фиксированной функцией $\Phi \in C^1(\partial\Omega)$.

Нетрудно проверить, что $a \geq -\lambda_1$, где $\lambda_1 = \lambda_1(\Omega)$ – первое собственное значение задачи Дирихле для оператора Лапласа. Более того, $b = b(a, \Phi) \geq 0$, причем $b = 0 \iff a = -\lambda_1$. Ясно также, что если область Ω есть диск D , то Φ необходимо является константой (ее можно считать фиксированной) и потому задача (1)–(2) имеет решение (выписываемое через бесселевы функции) при любом значении параметра $a \geq -\lambda_1$ и соответствующем значении $b = b(a, \Phi)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\Omega \neq D$, причем $\partial\Omega \in C^{3,\lambda}$. Тогда существует не более чем конечное число пар (a, b) , для которых выполнены условия (1)–(2).

Эта теорема была ранее доказана в работе [3] при дополнительном условии строгой выпуклости области Ω . Однако основной предмет излагаемой здесь работы составляет не столько снятие ограничения строгой выпуклости, сколько метод доказательства, открывающий, по-видимому, путь к доказательству теоремы единственности.

Метод доказательства теоремы 1 базируется на вполне очевидной нижеследующей лемме, относящейся к факторизованной задаче

$$(3) \quad \Delta v = av + 1 \quad \text{в } \Omega, \quad v|_{\partial\Omega} = 0.$$

Положим $\varphi(a, \cdot): \partial\Omega \ni s \mapsto \varphi(a, s) \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{\partial v}{\partial \nu} \right|_{s \in \partial\Omega}$ и зафиксируем множество $\mathfrak{A} \subset \{a \in \mathbb{R} \mid a \geq -\lambda_1(\Omega)\}$.

ЛЕММА. Пусть $\mathfrak{A} \subset \{a > -\lambda_1(\Omega)\}$. Если функции $\varphi(a_1, \cdot)$ и $\varphi(a_2, \cdot)$ не пропорциональны при любых $a_1 \in \mathfrak{A}$, $a_2 \in \mathfrak{A}$, $a_2 \neq a_1$, то обратная задача (1)–(2) имеет в $\mathfrak{A}$ не более одного решения, т.е. не существует более одной пары (a, b) , где $a \in \mathfrak{A}$, для которой выполнены условия (1)–(2).

СЛЕДСТВИЕ. Пусть s и s_* – две различные точки из $\partial\Omega$, а

$$\kappa(a, s, s_*) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{s \in \partial\Omega} \right) \left(\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{s_* \in \partial\Omega} \right)^{-1}.$$

Пусть уравнение

$$\kappa(a, s, s_*) = C, \quad a \in \mathfrak{A},$$

имеет не более одного решения при любой константе $C > 0$. Тогда обратная задача (1)–(2) имеет в $\mathfrak{A}$ не более одного решения.

Легко проверяется, что функция

$$[-\lambda_1(\Omega), \infty[\ni a \mapsto \kappa(a, s, s_*)$$

аналитична. Отсюда и из следствия вытекает теорема 1, поскольку, как объясняется ниже, справедлива

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01224) и Министерства образования и научных исследований Франции (проект DRIC B1/DAIES/JPC/BD-2017).

ТЕОРЕМА 2. $\dot{\kappa}(a, s, s_*) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \kappa(a, s, s_*)}{\partial a} < 0$ при $a \rightarrow \infty$, где s (соответственно s_*) – точка из $\partial\Omega$, которой изнутри касается диск D_R радиуса R (соответственно диск D_ρ радиуса $\rho < R$), имеющий ту же кривизну, что и кривая $\partial\Omega$ в точке s (соответственно в точке s_*).

Доказательство теоремы 2 проводится так. Сначала, опираясь на асимптотические свойства бесселевых функций, устанавливается, что

$$\dot{\kappa}_0(a) = -\left(\frac{R-\rho}{4R\rho a\sqrt{a}} + O\left(\frac{1}{a^2}\right)\right) \exp\left[\frac{R-\rho}{2R\rho\sqrt{a}}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\right)\right]$$

при $a \rightarrow \infty$, где

$$\kappa_0(a) = \left(\frac{\partial v^R}{\partial r}\Big|_{r=R}\right)\left(\frac{\partial v^\rho}{\partial r}\Big|_{r=\rho}\right)^{-1},$$

а v^R (соответственно v^ρ) – решение задачи (3) в случае $\Omega = D_R$ (соответственно $\Omega = D_\rho$). Затем проверяется, что условие

$$|\dot{\kappa}(a, s, s_*) - \dot{\kappa}_0(a)| = o(a^{-3/2}) \quad \text{при } a \rightarrow \infty,$$

обеспечивающее (требуемое в теореме 2) неравенство $a^{3/2}\dot{\kappa}(a, s, s_*) < 0$ при $a \gg 1$, будет выполнено, если

$$(4) \quad \varepsilon(a) = o\left(\frac{1}{a}\right), \quad \dot{\varepsilon}(a) = o\left(\frac{1}{a^2}\right) \quad \text{при } a \rightarrow \infty.$$

Здесь

$$(5) \quad \varepsilon(a) = \frac{\partial(\widehat{v} - v^R)}{\partial \nu}\Big|_s + \frac{\partial(v^* - \widehat{v})}{\partial \nu}\Big|_s + \frac{\partial(v^\psi - v^*)}{\partial \nu}\Big|_s,$$

а функции v^ψ , $\widehat{v}$ и v^* определяются в окрестности точки $s \in \partial\Omega$ следующим образом.

Обозначим через B_r диск радиуса r с центром в точке s . Выберем $r_0 > 0$ так, чтобы кривая $\partial\Omega \cap B_{4r_0}$ была представима как график $y = \gamma(x)$ от переменной x на касательной к $\partial\Omega$ в точке s . Пусть Q (соответственно Q^*) – подобласть Ω такая, что $Q \subset (\Omega \cap B_{4r_0})$ и $\partial Q \cap B_{3r_0} = \partial\Omega \cap B_{3r_0}$ (соответственно $Q^* \subset (\Omega \cap B_{2r_0})$ и $\partial Q^* \cap B_{r_0} = \partial\Omega \cap B_{r_0}$). Пусть $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\psi \equiv 1$ в B_{2r_0} и $\psi \equiv 0$ вне B_{3r_0} . Тогда $v^\psi = v\psi$, где v – решение задачи (3). Положим $f = \psi + 2\nabla\psi\nabla v + v\Delta\psi$. Тогда $\widehat{v}$ (соответственно v^*) – решение задачи $A_0\widehat{v} = f$ в Q , $\widehat{v}|_{\partial Q} = 0$ (соответственно $A_0v^* = 1$ в Q^* , $v^*|_{\partial Q^*} = 0$). Здесь $A_0 = \partial_{\xi\xi} + \partial_{\eta\eta} - a$; $\xi = x$, $\eta = y - \gamma(x) + [R - \sqrt{R^2 - x^2}]$.

Легко (с использованием формулы Грина) проверяется, что первые два слагаемых в (5) и их производные по a убывают быстрее любой степени $1/a$ при $a \rightarrow \infty$. Оценки (при $a \rightarrow \infty$)

$$\frac{\partial(v^\psi - v^*)}{\partial \nu}\Big|_s = o\left(\frac{1}{a}\right), \quad \frac{\partial}{\partial a} \frac{\partial(v^\psi - v^*)}{\partial \nu}\Big|_s = o\left(\frac{1}{a^2}\right)$$

доказываются достаточно кропотливо с использованием метода Вишика–Люстерника.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Демидов А. С., Захаров Л. Е. // УМН. 1974. Т. 29. № 6. С. 203. [2] Demidov A. S., Petrova V. V., Silantiev V. M. // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1996. V. 323. P. 353–358. [3] Vogelius M. // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1994. V. 44. № 4. P. 1181–1209.

Принято редколлегией
03.10.2000