Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Жеглов, О классификации двумерных локальных тел. II, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 6, 135–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm342>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 15:47:37

О КЛАССИФИКАЦИИ ДВУМЕРНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ ТЕЛ. II

А.Б. ЖЕГЛОВ

1. В работе [1] была приведена классификация двумерных локальных тел в случае, когда канонический автоморфизм имеет бесконечный порядок, и в случае, когда тело расщепимо, канонический автоморфизм имеет конечный порядок, тело вычетов является полем и характеристика тела равна нулю.

В настоящей работе мы изучаем расщепимые двумерные локальные тела, у которых канонический автоморфизм имеет конечный порядок и характеристика тела не равна нулю. Как следствие мы получаем некоторые результаты, касающиеся строения группы Брауэра двумерного локального поля (исчерпывающее изложение почти всех известных на настоящий момент результатов о строении группы Брауэра гензелевых полей можно найти в [2], а также в [3]). В частности, это положительный ответ на гипотезу о равенстве экспоненты и индекса произвольного тела из группы Брауэра C_2 -поля (см., например, [2; § 3.4.5]) в случае, когда C_2 -поле имеет вид $k((u))((t))$, k – алгебраически замкнуто.

Напомним некоторые определения из [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть K и k – произвольные тела. Будем говорить, что K является n -мерным локальным телом, имеющим тело k последним телом вычетов, если тело K имеет следующую структуру. Или $n = 0$ (и при этом $K = k$), или K обладает дискретным нормированием $\nu: K^* \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, где $\nu: K^* \rightarrow \mathbb{Z}$ – сюръективный гомоморфизм, $\nu(0) = \infty$ и $\nu(a+b) \geq \inf(\nu(a), \nu(b))$; и его кольцо нормирования $\mathcal{O} := \{x \in K : \nu(x) \geq 0\}$ является полным и отделимым относительно топологии, задаваемой ν , и его тело вычетов является $(n-1)$ -мерным локальным телом с последним телом вычетов k .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Изоморфизмом локальных тел K и K' будем называть изоморфизм их как колец, сохраняющий нормирования $\nu, \bar{\nu}$, где $\bar{\nu}$ – дискретное нормирование тела $\bar{K}$.

Произвольное двумерное локальное тело будем называть расщепимым, если существует гомоморфизм $\bar{K} \hookrightarrow \mathcal{O} \subset K$, являющийся сечением отображения $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}/\varphi = \bar{K}$.

Элементы $z \in \mathcal{O}$, $\nu(z) = 1$, и $u \in \bar{\mathcal{O}} \subset \bar{K}$, $\bar{\nu}(u) = 1$, будем называть локальными параметрами (или переменными) тела K .

Рассмотрим кольцо некоммутативных полиномов от двух переменных $\mathbb{Z}\langle\alpha, \delta\rangle$. Определим отображение $\sigma: \mathbb{Z}\langle\alpha, \delta\rangle \rightarrow \mathbb{Z}\langle\alpha, \delta, \delta_i; i \geq 1\rangle$ со значениями в кольце некоммутативных многочленов от переменных $\alpha, \delta, \delta_i; i \geq 1$, как отображение, которое заменяет в каждом слове, начиная с правого конца, сочетания типа $\delta^i \alpha$ на δ_i , т.е. $\sigma(\alpha^{a_1} \delta^{b_1} \dots \alpha^{a_n} \delta^{b_n}) = \alpha^{a_1} \delta_{b_1} \dots \delta_{b_{n-1}} \alpha^{a_n-1} \delta^{b_n}$, где $a_1, b_n \geq 0, a_i, b_j \geq 1, i > 1, j < n$, – натуральные числа.

В кольце $\mathbb{Z}\langle\alpha, \delta\rangle$ определим многочлены S_i^k как сумму всех мономов, принадлежащих орбите монома $\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{i-k} \underbrace{\delta \dots \delta}_k$ под действием группы подстановок $S_i: S_i^k = \sum_{\tau \in S_i/G} \tau(\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{i-k} \underbrace{\delta \dots \delta}_k)$, где G – стационарная подгруппа.

Пусть K расщепимо. Фиксируем некоторые параметры z и u . Тогда имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. $K = \bar{K}((z))$ как векторное пространство, закон умножения двух рядов из которого задается с помощью тождества $za = a^\alpha z + a^{\delta_1} z^2 + a^{\delta_2} z^3 + \dots$, где $a \in \bar{K}$, α – некоторый автоморфизм, $\delta_i: \bar{K} \rightarrow \bar{K}$ – некоторые линейные отображения, удовлетворяющие тождеству:

$$\delta_i(ab) = \sum_{k=0}^i \sigma(\delta^{i-k} \alpha)(a) \sigma(S_i^k \alpha)(b), \quad a, b \in \bar{K}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\alpha = \text{Id}$. Тогда

$$\delta_i(ab) = \delta_i(a)b + \sum_{k=1}^i \delta_{i-k}(a) \sum_{(j_1, \dots, j_l)} C_{i-k+1}^l \delta_{j_1} \dots \delta_{j_l}(b).$$

Здесь $\delta_0 = \alpha$, $0 < l \leq \min\{i-k+1, k\}$, $j_m \geq 1$, $\sum j_m = k$, вектор $(j_1, \dots, j_l)$ принадлежит орбите целочисленного вектора с суммой координат, равной k , под действием группы подстановок S_l .

ЗАМЕЧАНИЕ. Предложение справедливо для расщепимого тела произвольной характеристики с произвольным (некоммутативным) телом вычетов. Все нижеследующие результаты являются преимущественно его следствиями.

2. Пусть $\overline{K}$ – поле и z – параметр тела K . Отображение $\phi: K \mapsto K$, $\phi(x) = zxz^{-1}$, переводит в себя $\mathcal{O}$ и $\wp$, т.е. дает автоморфизм α поля $\overline{K}$. Он не зависит от выбора z .

ТЕОРЕМА 1. Пусть K – расщепимое двумерное локальное тело, $\text{char } K = p > 0$, $\overline{K}$ – поле, последнее поле вычетов $k = \overline{\overline{K}} \subset Z(K)$, $\alpha = \text{id}$.

Тогда тело K является конечномерным над своим центром тогда и только тогда, когда K изоморфно телу вида $k((u))((z))$ с соотношением $z^{-1}uz = u + xz^i$, где $x \in \overline{K}^p$, $(i, p) = 1$.

СЛЕДСТВИЕ 2. В условиях теоремы если K конечномерно над своим центром, то его индекс $\text{ind } K = p$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть выполнены все условия теоремы, кроме условия $\alpha = \text{id}$. Пусть α имеет конечный порядок, а K – конечномерное тело индекса p^k .

Тогда либо K циклично, либо $\alpha = \text{id}$ и K имеет вид, описанный в теореме.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $F = F_0((t_1))((t_2))$ – двумерное локальное поле, F_0 – алгебраически замкнутое поле. Пусть $A \in \text{Br}(F)$ – тело.

Тогда $A \cong B \otimes C$, где B – циклическое тело, $(\text{ind } B, p) = 1$, C – тело индекса p^k , имеющее вид, описанный предыдущим следствием.

СЛЕДСТВИЕ 5. Гипотеза о том, что экспонента тела в группе Брауэра C_2 -поля равна его индексу, имеет положительное решение в случае поля $F_0((t_1))((t_2))$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Характеристика поля F_0 в последнем следствии не имеет значения.

Автор хотел бы выразить глубокую признательность своему научному руководителю А.Н. Паршину и Е.В. Цинку за постоянное внимание к работе, а также В.И. Янчевскому за ценные консультации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Жеглов А. Б. // УМН. 1999. Т. 54. №4. С. 169–170. [2] Платонов В. П., Янчевский В. И. // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фунд. напр. Т. 77. М.: ВИНТИ, 1991. С. 144–262. [3] Jacob B., Wadsworth A. // J. Algebra. 1990. V. 128. P. 126–179.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Принято редколлегией
03.10.2000