Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Зорич, В. М. Кесельман, Изопериметрическое неравенство на субримановых многообразиях конформно-гиперболического типа, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 6, 137–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm343>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 13:38:16

ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКОЕ НЕРАВЕНСТВО НА СУБРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ КОНФОРМНО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

В. А. Зорич, В. М. Кесельман

1. Введение. В этой заметке мы имеем в виду отметить, что основные результаты нашей работы [1] о каноническом виде изопериметрического неравенства на римановых многообразиях конформно-гиперболического типа распространяются и на субримановы многообразия. Точные формулировки будут даны ниже в разделе 5 после введения необходимых понятий.

Как известно, изопериметрическое неравенство – это соотношение вида

$$P(V(D)) \leq S(\partial D)$$

между объемом $V(D)$ области D и площадью $S(\partial D)$ ее границы, где P – функция, называемая *изопериметрической функцией* пространства.

Нас интересует канонический вид изопериметрического соотношения в конформном классе метрики многообразия, точнее, вопрос о том, к какому каноническому виду приводится изопериметрическое неравенство конформными заменами метрики многообразия.

2. Субриманово многообразие. Гладкое многообразие M вместе с *поляризацией* $H \subset TM$ (т.е. подрасслоением H касательного расслоения TM) и римановой структурой g на H называют *субримановым многообразием* и обозначают через (M, H, g) или (M, H) (см. [2]).

Поляризация выделяет множество направлений (касательных векторов), обычно называемых *горизонтальными*. Кусочно-гладкие кривые на M называют *горизонтальными*, если касательные к ним векторы горизонтальны, т.е. лежат в H .

Метрика Карно–Каратеодори (C - C -метрика), ассоциированная с предполагаемой неголономной (неинтегрируемой) поляризацией H и римановой структурой g на H , определяется через нижнюю грань g -длины горизонтальных кривых, соединяющих точки.

Метрическую (хаусдорфову) размерность многообразия M как C - C -пространства будем в дальнейшем обозначать через m . Она больше топологической размерности n многообразия M , если $H \neq TM$. Например, для группы Гейзенберга, рассматриваемой как C - C -пространство, $m = n + 1$. Для собственно риманова многообразия, конечно, $m = n$.

3. Конформная емкость. *Горизонтальный градиент* $\nabla f = \nabla_{H,g} f$ функции f на (M, H, g) определяется как единственный горизонтальный вектор такой, что

$$\langle \nabla f, X \rangle_g = Xf$$

для всех горизонтальных векторов X .

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ – скалярное произведение относительно римановой структуры g на H , а Xf – производная Ли функции f по вектору X .

Пусть G – область на открытом субримановом многообразии (M, H) , а C – отличный от точки континуум (связный компакт) в G . Пару (C, G) часто называют *конденсатором*.

Конформной емкостью конденсатора (C, G) называется величина

$$\text{cap}(C, G) = \inf \int_G |\nabla f|^m dv,$$

где нижняя грань берется по всем гладким финитным в G функциям f таким, что $f \equiv 1$ на C и $0 \leq f \leq 1$ в G . При этом интегрирование ведется по m -мере Хаусдорфа.

Произвольную риманову метрику $\tilde{g}$ на H называют *конформно-эквивалентной* или *конформной* метрике g , если $\tilde{g} = \lambda^2 g$ на H , где λ – некоторая положительная регулярная функция на M . Легко видеть, что величина $\text{cap}(C, G)$ инвариантна относительно конформных замен исходной метрики субриманова многообразия.

4. Конформный тип субриманова многообразия. Некомпактное субриманово многообразие (M, H, g) будем называть многообразием *конформно-параболического типа*, если конформная емкость его абсолюта равна нулю, т.е. $\text{cap}(C, M) = 0$ для любого невырожденного континуума $C \subset M$; если же эта емкость положительна, то многообразие (M, H, g) будем называть многообразием *конформно-гиперболического типа*.

Такое разделение субримановых многообразий по указанным конформным типам, очевидно, инвариантно относительно конформных замен метрики многообразия.

5. Формулировка основных результатов.

ТЕОРЕМА. *Субриманово некомпактное и без края многообразие (M, H, g) имеет конформно-гиперболический тип тогда и только тогда, когда существует конформно-эквивалентная метрике g риманова метрика $\tilde{g}$, в которой выполняется изопериметрическое неравенство:*

$$(\star) \quad \tilde{V}(D) \leq \tilde{S}(\partial D)$$

для всех регулярных областей $D \subset M$, объем $\tilde{V}(D)$ которых больше фиксированного (произвольно малого) положительного числа.

Здесь под регулярной областью понимается область с кусочно-гладкой границей, имеющая конечный m -мерный $\tilde{g}$ -объем $\tilde{V}(D)$ и конечную $(m-1)$ -мерную $\tilde{g}$ -меру Хаусдорфа $\tilde{S}(\partial D)$ границы области.

Таким образом, в конформном классе метрики субриманова многообразия конформно-гиперболического типа изопериметрическая функция приводится к тому же линейному виду $P(x) = x$, что и в пространстве Лобачевского.

Дополнение 1. *Указанное в теореме неравенство $(\star)$ является асимптотически точным в том смысле, что отношение величин $\tilde{V}(D)$ и $\tilde{S}(\partial D)$ может быть сколь угодно близким к единице для регулярных областей сколь угодно большого $\tilde{g}$ -объема.*

Дополнение 2. *Указанную в теореме метрику $\tilde{g}$ можно выбрать так, что объем геодезического шара радиуса r в этой метрике имеет порядок величины e^r при $r \rightarrow +\infty$.*

Напомним [3], что *изопериметрической размерностью* многообразия бесконечного объема называется точная верхняя грань всех чисел $d > 0$, для каждого из которых функция $P(x) = x^{\frac{d-1}{d}}$ (при всех $x > \varepsilon > 0$) является изопериметрической функцией многообразия. Точную верхнюю грань изопериметрических размерностей многообразия по всем метрикам, конформным исходной метрике многообразия, будем называть *конформной изопериметрической размерностью* многообразия (см. [4]). Используя сформулированную выше теорему, можно получить

Следствие. *Субриманово многообразие (M, H, g) имеет конформно-гиперболический тип тогда и только тогда, когда его конформная изопериметрическая размерность равна $+\infty$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Зорич В. А., Кесельман В. М. // УМН. 1999. Т. 54. №3. С. 165–166. [2] Bellaïche A. (ed.) // Sub-Riemannian Geometry: Proceedings of the satellite meeting of the 1st European congress of mathematics (Paris, June 30–July 1, 1992). Basel: Birkhäuser, 1996. (Progr. Math. V. 144.) [3] Gromov M. with appendices by Katz M., Pansu P., Semmes S. Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces. Boston: Birkhäuser, 1999. [4] Зорич В. А., Кесельман В. М. // УМН. 1999. Т. 54. №4. С. 171–172.