Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. О. Иванов, А. А. Тужилин, Д. Цислик, Отношение Штейнера для римановых многообразий, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 6, 139–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm344>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 13:15:43

ОТНОШЕНИЕ ШТЕЙНЕРА ДЛЯ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

А. О. Иванов, А. А. Тужилин, Д. Цислик

Пусть V – произвольное конечное множество. Напомним, что *графом* G на множестве V называется пара (V, E) , где E – некоторое конечное семейство пар элементов множества V . В семействе E могут встречаться пары с одинаковыми элементами, а также одинаковые пары. Элементы из V называются *вершинами графа* G , а элементы из E – *ребрами графа* G . Если задан граф G , то множество его вершин обычно обозначаются через $V(G)$, а множество его ребер – через $E(G)$. Для удобства мы будем часто обозначать ребро $e = \{x, y\} \in E(G)$ через xy .

Граф G называется *взвешенным*, если на множестве ребер задана неотрицательная функция $\omega: E(G) \rightarrow \mathbb{R}$, называемая *весовой функцией*. При этом число $\omega(e)$ называется *весом ребра* $e \in E(G)$. Сумма весов всех ребер взвешенного графа G называется *весом графа* G и обозначается через $\omega(G)$. Если G – связный взвешенный граф, то из всех связных остовных подграфов в G наименьшего веса всегда можно выбрать дерево, которое называется *минимальным остовным деревом* и обозначается через MST_G . Отметим, что если все веса строго больше нуля, то любой связный остовный подграф в G наименьшего веса является деревом.

Пусть X – множество, ρ – некоторая метрика на X и N – произвольное конечное подмножество в X . Пусть G – полный граф на множестве N . Метрика ρ порождает весовую функцию, ставящую в соответствие каждому ребру $xy \in E(G)$ число $\rho(x, y)$. Эту весовую функцию мы будем обозначать той же буквой ρ . Минимальное взвешенное дерево во взвешенном графе G обозначим через MST_N . *Минимальным деревом Штейнера на множестве N или минимальным деревом Штейнера, затягивающим множество N* , называется дерево Γ , $N \subset V(\Gamma)$, для которого

$$(1) \quad \rho(\Gamma) = \inf_{\{\bar{N}: \bar{N} \subset N\}} \rho(\text{MST}_{\bar{N}}),$$

где точная нижняя грань берется по всем конечным подмножествам $\bar{N}$ в X , содержащим N . Минимальное дерево Штейнера на множестве N обозначается через SMT_N .

Отметим, что, вообще говоря, не для всякого N существует SMT_N (причиной этого может служить неполнота метрического пространства (X, ρ)). Тем не менее, сама точная нижняя грань из определения SMT_N существует всегда. **В дальнейшем, даже если SMT_N не существует, точную нижнюю грань (1) будем обозначать через $\rho(\text{SMT}_N)$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Отношением Штейнера $m(X, \rho)$ метрического пространства (X, ρ) называется следующая величина:*

$$m(X, \rho) = \inf_{\{N: N \subset X\}} \frac{\rho(\text{SMT}_N)}{\rho(\text{MST}_N)}.$$

Ясно, что $0 \leq m(X, \rho) \leq 1$.

Приведем основные известные результаты, описывающие отношение Штейнера римановых многообразий. Ду и Хванг [1] показали, что отношение Штейнера евклидовой плоскости равно $\sqrt{3}/2$. Тем самым, была доказана знаменитая гипотеза Гилберта и Поллака [2], не поддававшаяся решению в течение 30 лет. Имеется также ряд оценок на отношение Штейнера для общих евклидовых пространств $\mathbb{R}^n$, см. подробности в [3]. Рубинштейн и Венг [4] вычислили отношение Штейнера двумерной сферы постоянной (положительной) кривизны: оно оказалось таким же, как и у $\mathbb{R}^2$, т.е. равным $\sqrt{3}/2$.

Используя технику, разработанную в [5] и [6], авторы настоящей заметки получили следующие результаты.

При подготовке данной работы первый и второй авторы пользовались частичной поддержкой РФФИ (проекты № 96-15-96142 и № 98-01-00240) и INTAS (проект № 97-0808).

ТЕОРЕМА 1. *Отношение Штейнера произвольного связного n -мерного риманова многообразия не превосходит отношения Штейнера евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.*

ТЕОРЕМА 2. *Пусть W и M – связные римановы многообразия и $\pi: W \rightarrow M$ – локально изометричное накрытие. Тогда отношение Штейнера базы M не меньше отношения Штейнера тотального пространства W .*

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если связное риманово многообразие можно локально изометрично накрыть евклидовым пространством $\mathbb{R}^n$, то отношение Штейнера этого многообразия равно отношению Штейнера пространства $\mathbb{R}^n$.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Отношение Штейнера плоского двумерного тора, плоской бутылки Клейна, а также проективной плоскости постоянной положительной кривизны равно $\sqrt{3}/2$.*

Таким образом, учитывая результат Рубинштейна и Венга [4], отношение Штейнера вычислено для всех замкнутых двумерных поверхностей постоянной неотрицательной кривизны.

ТЕОРЕМА 3. *Отношение Штейнера пространства Лобачевского кривизны -1 не превосходит $3/4$.*

ТЕОРЕМА 4. *Отношение Штейнера произвольной двумерной поверхности постоянной кривизны -1 строго меньше $\sqrt{3}/2$.*

А. О. Иванов и А. А. Тузилин искренне благодарны А. Т. Фоменко за постоянное внимание к их работе. Авторы также признательны университету г. Грайфсвальд (Германия) за поддержку их встречи в Грайфсвальде в марте 2000 г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Du D. Z., Hwang F. K. A Proof of Gilbert–Pollak Conjecture on the Steiner ratio // *Algorithmica*. 1992. V. 7. P. 121–135. [2] Gilbert E. N., Pollak H. O. Steiner minimal trees // *SIAM J. Appl. Math.* 1968. V. 16. № 1. P. 1–29. [3] Cieslik D. Steiner Minimal Trees. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998. [4] Rubinstein J. H., Weng J. F. Compression theorems and Steiner ratios on spheres // *J. Combin. Optim.* 1997. V. 1. № 1. P. 67–78. [5] Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Minimal Networks. The Steiner Problem and Its Generalizations. Boca Raton: CRC Press, 1994. [6] Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Branching Solutions of One Dimensional Variational Problems. Singapore: Sci. Publ., 2000, to appear. [7] Hwang F. K., Richards D., Winter P. The Steiner Tree Problem. Amsterdam: Elsevier, 1992.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
03.10.2000