Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Карташова, Решетки топологий унарных алгебр, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 6, 141–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm345>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 17:02:07

РЕШЕТКИ ТОПОЛОГИЙ УНАРНЫХ АЛГЕБР

А. В. КАРТАШОВА

Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ – произвольная универсальная алгебра. Топология на множестве A , относительно которой каждая операция из Ω непрерывна, называется *топологией на алгебре* $\mathfrak{A}$. Известно [1], что топологии на алгебре $\mathfrak{A}$ образуют полную решетку по включению. Будем называть эту решетку *решеткой топологий* алгебры $\mathfrak{A}$ и обозначать через $\mathfrak{Z}(\mathfrak{A})$.

ТЕОРЕМА 1. *Решетка $\widetilde{\text{Con}} \mathfrak{A}$, двойственная к решетке $\text{Con} \mathfrak{A}$ конгруэнций произвольной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$, изоморфно вложима в решетку $\mathfrak{Z}(\mathfrak{A})$ ее топологий.*

Для любой конгруэнции θ алгебры $\mathfrak{A}$ через $\tau(\theta)$ обозначим топологию, базой которой служат классы данной конгруэнции.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\varphi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ – произвольный эпиморфизм алгебр. Тогда решетка $\mathfrak{Z}(\mathfrak{B})$ топологий алгебры $\mathfrak{B}$ изоморфна главному идеалу решетки $\mathfrak{Z}(\mathfrak{A})$, порожденному топологией $\tau(\theta)$, где θ – ядро эпиморфизма φ .*

В общем случае решетка $\mathfrak{Z}(\mathfrak{A})$ топологий алгебры $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ не является подрешеткой решетки по включению всех топологий на множестве A (см. [2]). Однако простая проверка показывает, что если сигнатура Ω состоит только из унарных символов, то $\mathfrak{Z}(A)$ – полная подрешетка решетки топологий на множестве A .

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $\mathfrak{A}$ – произвольная унарная алгебра и $\mathfrak{B}$ – ее подалгебра. Тогда решетка $\mathfrak{Z}(\mathfrak{B})$ вложима в качестве главного фильтра в решетку $\mathfrak{Z}(\mathfrak{A})$.*

Для алгебр произвольной сигнатуры утверждение теоремы 3 не всегда справедливо.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть Ω – произвольная функциональная сигнатура, содержащая хотя бы один символ, арность которого больше 1. Тогда существует трехэлементная алгебра $\mathfrak{A}$ сигнатуры Ω такая, что решетка топологий алгебры $\mathfrak{A}$ двухэлементна, а решетка топологий некоторой подалгебры этой алгебры четырехэлементна.*

Алгебра $\mathfrak{A} = \langle A, f \rangle$ с одной унарной операцией f называется *унаром*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Пусть $\mathfrak{A}$ – произвольный унар. Тогда*

- 1) *решетка $\mathfrak{Z}(\mathfrak{A})$ не может быть счетной;*
- 2) *если множество A несчетно, то $|\mathfrak{Z}(\mathfrak{A})| = 2^{2^{|A|}}$.*

Подунар (a) , порожденный элементом a произвольного унара $\mathfrak{A} = \langle A, f \rangle$, называется *циклом* длины $n \geq 1$, если $f^n(a) = a$ и $f^k(a) \neq a$ при $0 < k < n$. При этом элемент a называется *циклическим*.

СЛЕДСТВИЕ 6. *Пусть $\mathfrak{A}$ – произвольный унар. Тогда решетка $\mathfrak{Z}(\mathfrak{A})$ изоморфна решетке $\text{Con} \mathfrak{A}$ в том и только том случае, когда $\mathfrak{A}$ является циклом.*

СЛЕДСТВИЕ 7. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) *существуют такие унары $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, что решетки $\text{Con} \mathfrak{A}$ и $\text{Con} \mathfrak{B}$ конгруэнций унаров $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ соответственно изоморфны, а решетки $\mathfrak{Z}(\mathfrak{A})$ и $\mathfrak{Z}(\mathfrak{B})$ неизоморфны;*
- 2) *существуют такие унары $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{D}$, что решетки $\mathfrak{Z}(\mathfrak{C})$ и $\mathfrak{Z}(\mathfrak{D})$ топологий этих унаров изоморфны, а решетки $\text{Con} \mathfrak{C}$ и $\text{Con} \mathfrak{D}$ не являются изоморфными.*

ТЕОРЕМА 8. *Множество атомов в решетке $\mathfrak{Z}(\mathfrak{A})$ топологий унара $\mathfrak{A} = \langle A, f \rangle$ конечно тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ содержит конечное число связанных компонент, среди которых хотя бы одна имеет цикл, и число элементов, не имеющих прообраза при отображении f , конечно. В этом случае справедлива формула:*

$$\alpha_{\mathfrak{A}} = 2^{\beta_{\mathfrak{A}}+1} + 2^{\gamma_{\mathfrak{A}}} + \sum_{p \in L_{\mathfrak{A}}} p^{\gamma_{\mathfrak{A}}-1} - 4,$$

где $\alpha_{\mathfrak{A}}$ – мощность множества атомов в решетке $\mathfrak{Z}(\mathfrak{A})$ и $\beta_{\mathfrak{A}}$ – мощность множества элементов, не имеющих прообраза при отображении f , $\gamma_{\mathfrak{A}}$ – мощность множества связанных компонент унара $\mathfrak{A}$, $L_{\mathfrak{A}}$ – множество всех простых чисел p , делящих длины циклов $\mathfrak{A}$.

ТЕОРЕМА 9. Справедливы следующие утверждения:

- 1) множество атомов в решетке $\mathfrak{Z}(\mathfrak{A})$ произвольного унара $\mathfrak{A}$ счетно тогда и только тогда, когда $\beta_{\mathfrak{A}} < \aleph_0$, $\gamma_{\mathfrak{A}} < \aleph_0$ и унар $\mathfrak{A}$ не содержит циклов;
- 2) множество атомов в решетке $\mathfrak{Z}(\mathfrak{A})$ несчетно тогда и только тогда, когда либо $\beta_{\mathfrak{A}} \leq \aleph_0$, либо $\gamma_{\mathfrak{A}} \geq \aleph_0$, при этом

$$\alpha_{\mathfrak{A}} = 2^{\max\{\beta_{\mathfrak{A}}, \gamma_{\mathfrak{A}}\}}.$$

($\alpha_{\mathfrak{A}}$, $\beta_{\mathfrak{A}}$, $\gamma_{\mathfrak{A}}$ имеют тот же смысл, что и в теореме 8.)

СЛЕДСТВИЕ 10. Пусть δ и κ – кардинальные числа такие, что $\delta \leq 2^{\kappa}$ и $\kappa \geq \aleph_0$. Тогда найдется такой унар $\mathfrak{A}$, что $|\mathfrak{A}| = \kappa$ и $\alpha_{\mathfrak{A}} = \delta$.

Из теорем 1–3 и результатов работы [3] следует

ТЕОРЕМА 11. Модулярная решетка изоморфна решетке топологий $\mathfrak{Z}(\mathfrak{A})$ некоторого унара $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда она изоморфна решетке делителей некоторого натурального числа n .

СЛЕДСТВИЕ 12. Если решетка $\mathfrak{Z}(\mathfrak{A})$ топологий произвольного унара $\mathfrak{A}$ модулярна, то она дистрибутивна.

СЛЕДСТВИЕ 13. Решетка $\mathfrak{Z}(\mathfrak{A})$ топологий унара $\mathfrak{A}$ является цепью тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ – цикл длины p^n , где p – простое число, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

В работе [4] показано, что решетка по включению всех топологий на произвольном множестве является решеткой с дополнениями. Обобщением этого факта является

ТЕОРЕМА 14. Решетка $\mathfrak{Z}(\mathfrak{A})$ топологий унара $\mathfrak{A} = \langle A, f \rangle$ является решеткой с дополнениями тогда и только тогда, когда для каждого элемента a элемент $f(a)$ является циклическим и длины всех циклов унара равны некоторому фиксированному числу n , где n свободно от квадратов.

ТЕОРЕМА 15. Решетка $\mathfrak{Z}(\mathfrak{A})$ топологий унара $\mathfrak{A}$ является решеткой с псевдодополнениями тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ является либо однопорожденным конечным унаром, либо – объединением двух циклов, длины которых взаимно просты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Орлов С. Д. // Упорядоченные множества и решетки: Межвуз. науч. сб. №2. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1974. С. 68–71. [2] Arnautov V. I., Glavatsky S. T., Mikhailov A. V. Introduction to the Theory of Topological Rings and Modules. New York: Marcel Dekker, 1996. [3] Егорова Д. П. // Упорядоченные множества и решетки: Межвуз. науч. сб. №5. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1978. С. 11–44. [4] Steiner A. K. // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. V. 122. P. 379–398.

Волгоградский государственный
педагогический университет

Принято редколлегией
03.10.2000