Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Ю. Кочетков, Гомологии нильпотентных подалгебр супералгебры Ли $K(1, 1)$. II, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 6, 143–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm346>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 17:51:54

ГОМОЛОГИИ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ПОДАЛГЕБР СУПЕРАЛГЕБРЫ ЛИ $K(1, 1)$. II

Ю. Ю. Кочетков

Обозначим W_n алгебру Ли полиномиальных векторных полей от n переменных $x_1, \dots, x_n$. W_n – градуированная алгебра: $\deg(x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} \frac{\partial}{\partial x_i}) = k_1 + \cdots + k_n - 1$. Таким образом введенная градуировка позволяет градуировать цепи, циклы и гомологии. Далее мы будем, как правило, рассматривать однородные (относительно градуировки) элементы, цепи и циклы. Группы цепей, циклов и гомологий степени m будут обозначаться $C_*^{(m)}$, $Z_*^{(m)}$ и $H_*^{(m)}$, соответственно.

Через $L_k(W_n) \subset W_n$, $k = 1, 2, \dots$, мы обозначим нильпотентную подалгебру – линейную оболочку однородных элементов степени $\geq k$. Теорема Гончаровой [1] дает комбинаторные правила вычисления размерностей групп гомологий $H_p^{(m)}(L_k(W_1))$ с тривиальными коэффициентами.

ТЕОРЕМА 1 (Л. В. Гончарова [1]). $\dim(H_p^{(m)}(L_k(W_1))) =$ числу строго возрастающих последовательностей $a_1, \dots, a_p$ натуральных чисел таких, что

- 1) $a_1 + \cdots + a_p = m$;
- 2) $a_i - a_{i-1} \geq 3$, $i = 2, \dots, p$;
- 3) $k \leq a_1$, $a_p \leq 2k + 3(p - 1)$;
- 4) если $a_1 = k$, то $a_p < 2k + 3(p - 1)$.

В работе Ф. Вайнштейна [2] прояснены причины появления таких формул и дано достаточно прозрачное доказательство теоремы, использующее серию комбинаторных тождеств, открытых Вайнштейном, а также топологические соображения.

Распространить эту технику на случай $n > 1$ не удастся. В данной работе предпринята попытка найти комбинаторные формулы для размерностей групп гомологий в “полуторазмерном” случае. Точнее, мы рассматриваем супералгебру Ли $W(1, 1)$ полиномиальных векторных полей от одной четной и одной нечетной переменной. Эта супералгебра изоморфна супералгебре $K(1, 1)$ полиномов от одной четной переменной t и одной нечетной переменной ξ . Градуировка вводится следующим образом: $\deg(t^k) = 2k - 2$, $\deg(t^k \xi) = 2k - 1$, т.е. четные мономы имеют четную степень, а нечетные – нечетную. Далее моном степени s будет обозначаться e_s . Скобка определяется так:

$$\begin{aligned} [e_{2k}, e_{2l}] &= (2l - 2k)e_{2k+2l}, \\ [e_{2k+1}, e_{2l+1}] &= e_{2k+2l+2}, \\ [e_{2k}, e_{2l+1}] &= (2l + 1 - k)e_{2k+2l+1}. \end{aligned}$$

Нас будут интересовать нильпотентные подалгебры $L_k \subset K(1, 1)$, $k = 1, 2, \dots$:

$$L_k = \langle e_k, e_{k+1}, \dots \rangle.$$

Гомологии алгебры L_1 рассмотрены в [3], где сформулировано без доказательства следующее утверждение: $\dim(H_p(L_1)) = 2$, причем

$$\dim(H_p^{(m)}(L_1)) = \begin{cases} 1, & \text{если } m = 2p^2 \pm p, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Рассмотрим 2-гомологии алгебр L_k .

ТЕОРЕМА 2. $\dim(H_2(L_k)) < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что $H_2^{(m)}(L_k) = 0$, при m достаточно большом. Доказательство состоит в предъявлении набора 3-цепей таких, что их дифференциалы линейно независимы, а количество этих цепей равно $\dim(Z_2^{(m)}(L_k)) = \dim(C_2^{(m)}(L_k) - 1)$ при $m > 6k$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-01-00329).

Как указывалось выше, наша цель – найти формулы для размерностей групп гомологий, аналогичные формулам Гончаровой. К сожалению, найденные формулы работают только в случае гомологий 2-го порядка и дают оценку гомологиям 3-го порядка.

Рассмотрим сначала гомологии 2-го порядка. Отметим, что пространство циклов $Z_2^{(m)}(L_k)$ имеет размерность на единицу меньшую, чем пространство цепей $C_2^{(m)}(L_k)$. Базис $C_2^{(m)}(L_k)$ образуют цепи $e_k \wedge e_{m-k}, e_{k+1} \wedge e_{m-k-1}, \dots$. Последним элементом базиса является цепь $e_l \wedge e_{l+1}$, если $m = 2l + 1$, цепь $e_{2l+1} \wedge e_{2l+1}$, если $m = 4l + 2$, и цепь $e_{2l-1} \wedge e_{2l+1}$, если $m = 4l$. Таким образом, размерность $Z_2^{(m)}(L_k)$ равна числу 2-последовательностей a_1, a_2 натуральных чисел, где $k \leq a_1 < a_2$, $a_1 + a_2 = m$ и $a_2 - a_1 \geq 2$, если a_1 и a_2 оба четны, и $a_2 - a_1 \geq 3$, если хотя бы одно из этих чисел нечетно. Дадим определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Последовательность $a_1, \dots, a_l$ натуральных чисел называется (k, m) -стандартной, если $k \leq a_1 < \dots < a_l$, $a_1 + \dots + a_l = m$ и для всех $i = 1, \dots, l - 1$ выполнено следующее условие: $a_{i+1} - a_i \geq 2$, если a_i и a_{i+1} оба четные, и $a_{i+1} - a_i \geq 3$, если хотя бы одно из этих чисел нечетно.

Теперь мы можем сформулировать гипотезу о размерностях групп 2-гомологий.

ПРАВИЛО 1. Пусть $k \geq 3$ нечетно, тогда $\dim(H_2^{(m)}(L_k)) = s + t_1 + t_2$, где s – число (k, m) -стандартных 2-последовательностей a_1, a_2 таких, что $a_2 \leq 2k + 1$ и $a_2 \leq 2k - 1$, если $a_1 = k$, а

$$t_1 = \begin{cases} 1 & \text{при } 4k \leq m \leq 4k + 2, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$t_2 = \begin{cases} -1 & \text{при } 3k + 8 \leq m \leq 4k + 2, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

ПРАВИЛО 2. Пусть $k \geq 2$ четно, тогда $\dim(H_2^{(m)}(L_k)) = s + t$, где s – число (k, m) -стандартных 2-последовательностей a_1, a_2 таких, что $a_2 \leq 2k + 1$, а

$$t = \begin{cases} 1 & \text{при } m = 3k + 4, 3k + 5, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При $2 \leq k \leq 22$ справедливость гипотезы была проверена вычислениями.

Найдены аналогичные формулы для размерностей 3-гомологий, правда здесь удастся получить лишь оценку размерности сверху. Как и ранее, мы отдельно рассмотрим случаи нечетного и четного k .

ПРАВИЛО 3. Пусть $k \geq 15$ нечетно, тогда $\dim(H_3^{(m)}(L_k)) \leq s - 1$, где s – это число (k, m) -стандартных 3-последовательностей a_1, a_2, a_3 таких, что $a_3 \leq 2k + 3$; $a_3 \leq 2k + 1$, если $a_1 = k$; и $a_3 \leq 2k + 2$, если $a_1 \geq k + 7$. При этом неравенство является равенством, если $m \leq 4k + 14$.

ПРАВИЛО 4. Пусть $k \geq 16$ четно, тогда $\dim(H_3^{(m)}(L_k)) \leq s - 1$, где s – это число (k, m) -стандартных 3-последовательностей a_1, a_2, a_3 таких, что $a_3 \leq 2k + 4$ и $a_3 \leq 2k + 3$, если $a_1 \neq k + 2$ или $k + 3$. При этом неравенство является равенством, если $m \leq 4k + 11$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При $15 \leq k \leq 32$ справедливость гипотезы была проверена вычислениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гончарова Л. В. // Функциональный анализ и его прил. 1973. Т. 7. №2. С. 6–14. [2] Weinstein F. V. // Adv. Soviet Math. 1993. V. 17. P. 155–216. [3] Ретах В. С., Фейгин Б. Л. // УМН. 1982. Т. 37. №2. С. 233–234.

E-mail: yuyuk@kochetkov.mccme.ru

Принято редколлегией
03.10.2000