Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, Надвторичное квантование и квантование энтропии при сохранении заряда, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 6, 145–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm347>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 04:43:12

НАДВОРИЧНОЕ КВАНТОВАНИЕ И КВАНТОВАНИЕ ЭНТРОПИИ ПРИ СОХРАНЕНИИ ЗАРЯДА

В. П. Маслов

Пусть $n_1, n_2, m \geq 0, j_k, i_s$ – целые числа. Рассмотрим функции

$$(1) \quad \Phi_{n,m_1,m_2}(x_1, j_1, \dots, x_{n_1}, j_{n_1}, y_1, i_1, \dots, y_{n_2}, i_{n_2}, z_1, w_1, \dots, z_m, w_m),$$

симметричные относительно перестановок пар переменных x_p, j_p и x_q, j_q ; y_r, i_r и y_s, i_s ; z_l, w_l и z_t, w_t .

Пусть $\mathcal{F}$ – соответствующее пространство Фока [1], [2] и в нем вводятся операторы рождения и уничтожения $\hat{b}_1^\pm(x, j), \hat{b}_2^\pm(y, i), \hat{B}^\pm(z, w)$:

$$\begin{aligned} & (\hat{b}_1^+(x, j)\Phi)_{n_1, n_2, m}(x_1, j_1, \dots, x_{n_1}, j_{n_1}, y_1, i_1, \dots, y_{n_2}, i_{n_2}, z_1, w_1, \dots, z_m, w_m) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n_1}} \sum_{l=1}^{n_1} \delta_{jj_l} \delta(x - x_l) \Phi_{n_1-1, n_2, m}(x_1, j_1, \dots, x_{l-1}, j_{l-1}, x_{l+1}, j_{l+1}, \dots, x_{n_1}, j_{n_1}, \\ & \quad y_1, i_1, \dots, y_{n_2}, i_{n_2}, z_1, w_1, \dots, z_m, w_m), \\ & (\hat{b}_1^-(x, j)\Phi)_{n_1, n_2, m}(x_1, j_1, \dots, x_{n_1}, j_{n_1}, y_1, i_1, \dots, y_{n_2}, i_{n_2}, z_1, w_1, \dots, z_m, w_m) \\ &= \sqrt{n_1+1} \Phi_{n_1+1, n_2, m}(x, j, x_1, j_1, \dots, x_{n_1}, j_{n_1}, y_1, i_1, \dots, y_{n_2}, i_{n_2}, z_1, w_1, \dots, z_m, w_m), \\ & (\hat{b}_2^+(y, i)\Phi)_{n_1, n_2, m}(x_1, j_1, \dots, x_{n_1}, j_{n_1}, y_1, i_1, \dots, y_{n_2}, i_{n_2}, z_1, w_1, \dots, z_m, w_m) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n_2}} \sum_{l=1}^{n_2} \delta_{ii_l} \delta(y - y_l) \Phi_{n_1, n_2-1, m}(x_1, j_1, \dots, x_{n_1}, j_{n_1}, y_1, i_1, \dots, y_{l-1}, i_{l-1}, \\ & \quad y_{l+1}, i_{l+1}, \dots, y_{n_2}, i_{n_2}, z_1, w_1, \dots, z_m, w_m), \\ & (\hat{b}_2^-(y, i)\Phi)_{n_1, n_2, m}(x_1, j_1, \dots, x_{n_1}, j_{n_1}, y_1, i_1, \dots, y_{n_2}, i_{n_2}, z_1, w_1, \dots, z_m, w_m) \\ &= \sqrt{n_2+1} \Phi_{n_1, n_2+1, m}(j_1, \dots, x_{n_1}, j_{n_1}, y, i, y_1, i_1, \dots, y_{n_2}, i_{n_2}, z_1, w_1, \dots, z_m, w_m), \\ & (\hat{B}^+(z, w)\Phi)_{n_1, n_2, m}(x_1, j_1, \dots, x_{n_1}, j_{n_1}, y_1, i_1, \dots, y_{n_2}, i_{n_2}, z_1, w_1, \dots, z_m, w_m) \\ &= \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{l=1}^m \delta(z - z_l) \delta(w - w_l) \Phi_{n_1, n_2, m-1}(x_1, j_1, \dots, x_{n_1}, j_{n_1}, y_1, i_1, \dots, y_{n_2}, i_{n_2}, \\ & \quad z_1, w_1, \dots, z_{l-1}, w_{l-1}, z_{l+1}, w_{l+1}, \dots, z_m, w_m), \\ & (\hat{B}^-(z, w)\Phi)_{n_1, n_2, m}(x_1, j_1, \dots, x_{n_1}, j_{n_1}, y_1, i_1, \dots, y_{n_2}, i_{n_2}, z_1, w_1, \dots, z_m, w_m) \\ &= \sqrt{m+1} \Phi_{n_1, n_2, m+1}(x_1, j_1, \dots, x_{n_1}, j_{n_1}, y_1, i_1, \dots, y_{n_2}, i_{n_2}, z, w, z_1, w_1, \dots, z_m, w_m). \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь “обычное” фоковское пространство [3] $\mathcal{H}$ системы бозонов с зарядами ± 1 , которое состоит из наборов функций $\phi = \{\phi_{q_1, q_2}(x_1, \dots, x_{q_1}, y_1, \dots, y_{q_2})\}$, $q_1, q_2 = 0, 1, \dots$, симметричных относительно перестановок переменных x_l и x_p и относительно перестановок переменных y_k и y_r . В этом пространстве определены операторы рождения и уничтожения бозонов с зарядом 1 $\hat{\psi}_1^\pm(x)$ и бозонов с зарядом -1 $\hat{\psi}_1^\pm(y)$:

$$\begin{aligned} & (\hat{\psi}_1^+(x)\phi)_{q_1, q_2}(x_1, \dots, x_{q_1}, y_1, \dots, y_{q_2}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{q_1}} \sum_{l=1}^{q_1} \delta(x - x_l) \phi_{q_1-1, q_2}(x_1, \dots, x_{l-1}, x_{l+1}, \dots, x_{q_1}, y_1, \dots, y_{q_2}), \\ & (\hat{\psi}_1^-(x)\phi)_{q_1, q_2}(x_1, \dots, x_{q_1}, y_1, \dots, y_{q_2}) \\ &= \sqrt{q_1+1} \phi_{q_1+1, q_2}(x, x_1, \dots, x_{q_1}, y_1, \dots, y_{q_2}), \\ & (\hat{\psi}_2^+(y)\phi)_{q_1, q_2}(x_1, \dots, x_{q_1}, y_1, \dots, y_{q_2}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{q_2}} \sum_{l=1}^{q_2} \delta(y - y_l) \phi_{q_1, q_2-1}(x_1, \dots, x_{q_1}, y_1, \dots, y_{l-1}, y_{l+1}, \dots, y_{q_2}), \end{aligned}$$

$$(\hat{\psi}_2^-(y)\phi)_{q_1, q_2}(x_1, \dots, x_{q_1}, y_1, \dots, y_{q_2}) \\ = \sqrt{q_2 + 1} \phi_{q_1, q_2+1}(x_1, \dots, x_{q_1}, y, y_1, \dots, y_{q_2}).$$

Оператором заряда $\hat{Q}$ называется оператор в $\mathcal{H}$ вида

$$(2) \quad \hat{Q} = \int dx \hat{\psi}_1^+(x) \hat{\psi}_1^-(x) - \int dx \hat{\psi}_2^+(x) \hat{\psi}_2^-(x).$$

Пусть $\hat{A}$ – оператор в пространстве $\mathcal{H}$, коммутирующий с оператором заряда $\hat{Q}$. Надвторично квантованным оператором $\hat{\bar{A}}$ будем называть следующий оператор в $\mathcal{F}$

$$(3) \quad \hat{\bar{A}} = A[\hat{b}_1^+(x, j), \hat{b}_1^-(x, j), \hat{b}_2^+(y, i), \hat{b}_2^-(y, i), \hat{B}^+(z, w), \hat{B}^-(z, w)].$$

Функционал $A[b_1^*(\cdot), b_1(\cdot), b_2^*(\cdot), b_2(\cdot), B^*(\cdot), B(\cdot)]$ имеет вид

$$(4) \quad A[b_1^*(\cdot), b_1(\cdot), b_2^*(\cdot), b_2(\cdot), B^*(\cdot), B(\cdot)] = \text{Sp}(\hat{A}\hat{\rho}[b_1^*(\cdot), b_1(\cdot), b_2^*(\cdot), b_2(\cdot), B^*(\cdot), B(\cdot)]) \\ \times \exp\left(-\sum_{j=1}^{\infty} \int dx b_1^*(x, j) b_1(x, j) - \sum_{i=1}^{\infty} \int dy b_2^*(y, i) b_2(y, i)\right),$$

а $\hat{\rho}[b_1^*(\cdot), b_1(\cdot), b_2^*(\cdot), b_2(\cdot), B^*(\cdot), B(\cdot)]$ – операторнозначный функционал, который принимает значения в множестве операторов в пространстве $\mathcal{H}$ и имеет вид

$$(5) \quad \hat{\rho}[b_1^*(\cdot), b_1(\cdot), b_2^*(\cdot), b_2(\cdot), B^*(\cdot), B(\cdot)] \\ = \exp\left\{\left(\frac{1}{2} \iint dz_1 dw_1 B(z_1, w_1) \hat{\psi}_1^+(z_1) \hat{\psi}_2^+(w_1)\right) \right. \\ + \left(\frac{1}{2} \iint dz_2 dw_2 B^*(z_2, w_2) \hat{\psi}_1^-(z_2) \hat{\psi}_2^-(w_2)\right) \\ + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \iint dx_1 dx_2 b_1(x_1, j) b_1^*(x_2, j) \hat{\psi}_1^+(x_1) \hat{\psi}_1^-(x_2)\right) \\ + \left(\sum_{i=1}^{\infty} \iint dy_1 dy_2 b_2(y_1, i) b_2^*(y_2, i) \hat{\psi}_2^+(y_1) \hat{\psi}_2^-(y_2)\right) \\ \left. - \int dx \hat{\psi}_1^+(x) \hat{\psi}_1^-(x) - \int dy \hat{\psi}_2^+(y) \hat{\psi}_2^-(y)\right\}.$$

Вторично квантованному оператору $\hat{A}$ естественным образом ставится в соответствие оператор $\hat{\bar{A}}$ в пространстве $\mathcal{F}^B$ такой, что

$$(6) \quad (\hat{\bar{A}}\Phi)_{q_1, q_2, m}(x_1, j_1, \dots, x_{q_1}, j_{q_1}, y_1, i_1, \dots, y_{q_2}, i_{q_2}, x_{q_1+1}, y_{q_2+1}, \dots, x_{q_1+m}, y_{q_2+m}) \\ = (\hat{A}\phi(j_1, \dots, j_{q_1}, i_1, \dots, i_{q_2}))_{q_1+m, q_2+m}(x_1, \dots, x_{q_1+m}, y_1, \dots, y_{q_2+m}).$$

Имеет место следующая теорема

ТЕОРЕМА. *Проекция надвторично квантованного оператора $\hat{\bar{A}}$ на бозонное подпространство равна $\hat{\bar{A}}$.*

Аналогично тому, как это было сделано в работах [1], [2] для систем с сохраняющимся числом частиц, введем оператор надвторично квантованной энтропии $\hat{\bar{S}}$ для систем с сохраняющимся зарядом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Маслов В. П. // ТМФ. 2000. Т. 125. №2. С. 297–314. [2] Маслов В. П. // Функц. анализ и его прил. 2000. Т. 34. №4. С. 35–48. [3] Березин Ф. А. Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1986.