Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. М. Мухамедов, О бесконечномерных квадратичных вольтерровских операторах, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 6, 149–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm349>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 04:20:34

О БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ВОЛЬТЕРРОВСКИХ ОПЕРАТОРАХ

Ф. М. МУХАМЕДОВ

Понятие квадратичного стохастического оператора впервые было сформулировано в работе С. Н. Бернштейна [1]. Одной из задач при изучении квадратичных операторов является исследование эргодических свойств таких операторов [2], [3]. Одним из классов квадратичных операторов является класс вольтерровских операторов, изучению которого посвящены многочисленные работы (см., например, [4]).

В статье дается определение бесконечномерного квадратичного вольтерровского оператора и изучаются некоторые свойства траекторий таких операторов.

Через S обозначим следующее множество:

$$S = \left\{ x = (x_n) : x_i \geq 0, \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 1 \right\}.$$

Ясно, что S является выпуклой оболочкой векторов вида

$$e^{(n)} = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots),$$

где единица стоит на n -м месте, и только они являются экстремальными элементами множества S . Множество экстремальных точек S обозначим через $\text{extr}(S)$.

Определим оператор $V : S \rightarrow S$ следующим образом:

$$(1) \quad (V(x))_k = \sum_{i,j=1}^{\infty} p_{ij,k} x_i x_j, \quad k \in \mathbb{N}, \quad x = (x_i) \in S,$$

где

$$p_{ij,k} \geq 0, \quad p_{ij,k} = p_{ji,k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} p_{ij,k} = 1, \quad i, j \in \mathbb{N}.$$

Так определенный оператор будем называть *бесконечномерным квадратичным стохастическим оператором*. Оператор V , определенный равенством (1), называется *вольтерровским*, если $p_{ij,k} = 0$ при $k \neq i, j$.

Для $x, y \in S$ обозначим

$$(\tilde{V}(x, y))_k = \sum_{i,j=1}^{\infty} p_{ij,k} x_i y_j, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Напомним, что выпуклое множество $C \subset S$ называется *гранью*, если из того, что $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$, где $x, y \in S$ и $\lambda \in (0, 1)$, следует $x, y \in C$. Совокупность всех граней множества S обозначим через Γ . Для векторов $\varphi, \psi \in S$ обозначим $\Gamma(\varphi, \psi) = \{\lambda\varphi + (1 - \lambda)\psi : \lambda \in (0, 1)\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Квадратичный оператор V вольтерров тогда и только тогда, когда для любых $\varphi, \psi \in \text{extr}(S)$ имеет место $\tilde{V}(\varphi, \psi) \in \Gamma(\varphi, \psi)$.*

Через QV обозначим совокупность всех вольтерровских операторов. Наделим QV топологией, которая определяется по сходимости: сеть V_ν сходится к V , если для любого $x \in S$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} (V_\nu(x))_k = (V(x))_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *QV является выпуклым слабо компактным множеством.*

Из этого предложения и в силу теоремы Крейна–Мильмана следует, что множество всех экстремальных вольтерровских операторов $\text{extr}(QV)$ непусто.

Квадратичный оператор V , определенный равенством (1), называется *чистым*, если для всех $\varphi, \psi \in S$ имеет место

$$\tilde{V}(\varphi, \psi) \in \text{extr} \Gamma(\varphi, \psi).$$

Ясно, что чистые квадратичные операторы являются вольтерровскими.

ТЕОРЕМА 1. Квадратичный оператор V чистый тогда и только тогда, когда он экстремальный в QV , т.е. $V \in \text{extr}(QV)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $V \in QV$ – вольтерровский оператор, тогда $x' = Vx$ можно записать в виде:

$$x'_k = x_k \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_{ki} x_i \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

где $a_{ki} = -a_{ik}$, $|a_{ki}| \leq 1$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Любая грань симплекса S инвариантна относительно действия вольтерровского оператора V .

СЛЕДСТВИЕ 2. Вершины симплекса, т.е. грани Γ_I при $|N \setminus I| = 1$, являются неподвижными точками вольтерровского оператора V .

В конечномерном случае известно (см. [4]), что каждый вольтерровский оператор является биективным отображением симплекса. С помощью предложения 3 доказывается следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть $V \in QV$ – вольтерровский оператор, тогда он является автоморфизмом S .

Пусть $V: S \rightarrow S$ – вольтерров оператор, т.е.

$$(2) \quad x'_k = x_k \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_{ki} x_i \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

где $a_{ki} = -a_{ik}$, $|a_{ki}| \leq 1$.

Через $\mathcal{G}$ обозначим множество решений системы неравенств

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{ki} y_i \leq 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

принадлежащих S .

ЗАМЕЧАНИЕ. Известно [4], что в конечномерном случае множество $\mathcal{G}$ всегда является непустым множеством. В бесконечномерном случае, в отличие от конечномерного, множество $\mathcal{G}$ может оказаться пустым.

ПРИМЕР. Рассмотрим вольтерровский оператор, определенный следующим образом:

$$V_0 : \begin{cases} x'_1 = x_1(1 - x_1), \\ x'_k = x_k(1 + x_{k-1} - x_{k+1}), \quad k \geq 2, \end{cases}$$

тогда для этого оператора множество $\mathcal{G}$ пусто.

Далее предположим, что множество $\mathcal{G}$ непусто. Тогда ясно, что $\mathcal{G}$ выпуклое подмножество S и состоит из неподвижных точек оператора V .

ТЕОРЕМА 3. Пусть V – вольтерров оператор, и пусть $x^0 \in S$ такова, что $x_i^0 > 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Если $Vx^0 \neq x^0$ и предел $\lim_{n \rightarrow \infty} V^n x^0$ существует, тогда предельная точка траектории лежит в $\mathcal{G}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Вернштейн С. Н. // Уч. зап. Н.-И. каф. Укр. отд. мат. 1924. № 1. С. 83–115. [2] Kesten H. // Adv. Appl. Probab. 1970. V. 2. P. 1–82; С. 179–228. [3] Любич Ю. И. // УМН. 1971. Т. 26, № 5. С. 51–116. [4] Ганиходжаев Р. Н. Квадратичные стохастические операторы и функции Ляпунова // Матем. сб. 1992. Т. 183. № 8. С. 119–140.

Принято редколлегией
03.10.2000