Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. М. Феоктистов, Расчет верхних и нижних цен платежных обязательств посредством пополнения рынка, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 2, 165–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm35>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 13:53:12

РАСЧЕТ ВЕРХНИХ И НИЖНИХ ЦЕН ПЛАТЕЖНЫХ ОБЯЗАТЕЛЬСТВ ПОСРЕДСТВОМ ПОПОЛНЕНИЯ РЫНКА

К. М. ФЕОКТИСТОВ

В работе изучается вопрос расчета цен платежных обязательств Европейского типа на конечном полиномиальном рынке, обобщающем биномиальную модель рынка Кокса, Росса и Рубинштейна. Хорошо известно (см. [1]) соотношение, связывающее безарбитражные цены покупки и продажи обязательств Европейского типа:

$$(1) \quad \mathbb{C}_* = \sup_{\pi \in \Pi_*} X_0^\pi = \inf_{p \in \mathbb{P}^*} E_p \frac{F_T}{S_T^0} \leq \sup_{p \in \mathbb{P}^*} E_p \frac{F_T}{S_T^0} = \inf_{\pi \in \Pi^*} X_0^\pi = \mathbb{C}^*$$

где: $\Pi_* = \{\pi : \pi - \text{самофинансируемая стратегия, } X_T^\pi \leq F_T\}$, $\Pi^* = \{\pi : \pi - \text{самофинансируемая стратегия, } X_T^\pi \geq F_T\}$, F_T – обязательство Европейского типа, S_t^0 – безрисковый актив, $\mathbb{P}^*$ – множество мартингалов мер, эквивалентных исходной.

Заметим, что в случае полного рынка верхняя и нижняя цены образуют одну, “справедливую”, цену, которая находится по формуле: $C = E_{p^*} \frac{F_T}{S_T^0}$, где p^* – единственная мартингалов мера. Возникает естественная идея – пополнить исходный рынок дополнительными активами до полного, а затем вычислить справедливую цену (зависящую от способа пополнения рынка).

На исходном вероятностном пространстве (имеющем структуру полиномиального дерева) задан $(K + 1)$ -мерный случайный процесс цен $S_t = (S_t^0, \dots, S_t^K)$, где S^0 – безрисковый актив ($S_{t+1}^0 \stackrel{\text{def}}{=} S_{t+1}^0(A_1) = \dots = S_{t+1}^0(A_n)$), а $S^1, \dots, S^K$ – рискованные. Рассматривается сужение этого процесса на редуцированное вероятностное пространство $(A, \mathcal{A}_A, P_A)$, описывающее один узел (t, A) полиномиального дерева (все обозначения взяты из [2]); $\mathcal{A}_A = \sigma\{A_1, \dots, A_n\}$, где $A_1, \dots, A_n$ – все вероятностные исходы, которые могут произойти в момент $t + 1$ с положительной вероятностью. Число n называется индексом ветвления (splitting index). Из рассмотрения исключается вырожденный случай наличия на рынке активов, линейно выражаемых через другие, поскольку они не влияют на построение хеджирующей стратегии. В [2] формулируются следующие критерии

КРИТЕРИЙ БЕЗАРБИТРАЖНОСТИ. *Рынок полон* $\iff$

$$\underbrace{(S_{t+1}^0, \dots, S_{t+1}^0)^T}_{K+1} \in \text{ri} \{ \text{conv} \{ S_{t+1}(A_i) : i \in \{1 \dots n\} \} \}.$$

КРИТЕРИЙ ПОЛНОТЫ. *Безарбитражный рынок полон* $\iff$

$$\dim \{ \text{span} \{ S_{t+1}(A_i) : i \in \{1 \dots n\} \} \} = n,$$

где $S_{t+1}(A_i) = (S_{t+1}^0(A_i), \dots, S_{t+1}^K(A_i))^T$ – вектор стоимостей активов.

Используя утверждения выпуклой алгебры (см. [3]), можно получить следующий, эквивалентный, критерий: рынок полон и безарбитражен $\iff$ система

$$(2) \quad \begin{cases} S_{t+1}(A) \cdot \underbrace{(S_{t+1}^0, \dots, S_{t+1}^0)^T}_{K+1} \\ p_i > 0 : i \in \{1, \dots, n\} \end{cases}$$

имеет решение, и только одно.

Здесь: $S_{t+1}(A) = (S_{t+1}(A_1), \dots, S_{t+1}(A_n))$ – матрица, описывающая исходный рынок, $p = (p_1, \dots, p_n)^T$ – вектор вероятностей событий $A_1, \dots, A_n$.