Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Натанзон, С. В. Шадрин, Топологическая классификация унитарных функций произвольного рода, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 6, 151–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm350>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 17:39:04

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ УНИТАРНЫХ ФУНКЦИЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО РОДА

С. М. НАТАНЗОН, С. В. ШАДРИН

1. *Унитарной функцией* мы называем тройку (P, τ, f) , где P – компактная риманова поверхность, $\tau: P \rightarrow P$ – антиголоморфная инволюция (т.е. (P, τ) – вещественная алгебраическая кривая) и $f: P \rightarrow \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ – мероморфная функция, удовлетворяющая условию $f(\tau(z)) = (\overline{f(z)})^{-1}$. Унитарными являются, например, мономы $h_n(z) = z^n$ на вещественной кривой $(\overline{\mathbb{C}}, \eta)$, где $\eta(z) = \overline{z}^{-1}$. Унитарные функции (P_1, τ_1, f_1) и (P_2, τ_2, f_2) считаются совпадающими, если существует биголоморфное отображение $\varphi: P_1 \rightarrow P_2$ такое, что $f_1 = f_2 \varphi$ и $\varphi \tau_1 = \tau_2 \varphi$. Естественная топология пространства мероморфных функций [1] наделяет множество унитарных функций структурой топологического пространства.

Статья посвящена топологической классификации унитарных функций с фиксированным топологическим типом дивизора полюсов. Соответствующие топологические инварианты аналогичны инвариантам вещественных мероморфных функций [1]–[3] и выделяют компоненту связности в пространстве унитарных функций. Кроме того, эти инварианты хорошо согласованы с мультипликативной структурой унитарных функций.

2. Множество вещественных точек вещественной алгебраической кривой (P, τ) совпадает с множеством P^τ неподвижных точек инволюции τ . Оно состоит из простых попарно непересекающихся замкнутых контуров, называемых *овалами*. Если множество $P \setminus P^\tau$ несвязно (связно), то кривая называется *разделяющей* (*неразделяющей*). *Топологическим типом кривой* (P, τ) называется набор чисел (g, k, ε) , где g – род поверхности P , k – число овалов и ε – число, равное 1 для разделяющих кривых и 0 для неразделяющих.

Топологическим типом дивизора полюсов мероморфной функции $f: P \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ называется набор чисел $A = (a_1, \dots, a_m)$ такой, что $f^{-1}(\infty) = a_1 p_1 + \dots + a_m p_m$, где $p_i \neq p_j$.

Рассмотрим мероморфную функцию $f: P \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ степени n на кривой рода $g > 0$ такую, что все ее критические значения, кроме 0 и ∞ , простые. Существует и единственно [4] число $1 \leq r < n$, делящее n , такое, что группа монодромии f порождается подстановками $(1, \dots, n)$ и $(1, r+1)$, и f представляется в виде композиции $h_r \circ f_1$ для некоторой мероморфной функции $f_1: P \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$. Мы будем называть число r *характеристикой* функции $f: P \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, полагая по определению $r = 1$ для функций на сфере $\overline{\mathbb{C}}$.

3. *Индексом унитарной функции* (P, τ, f) на овале $s \subset P^\tau$ называется число обходов нуля точкой $f(p)$ при однократном обходе точкой p овала s . *Топологическим типом унитарной функции* (P, τ, f) на *неразделяющей вещественной кривой* называется набор чисел $(g, n, 0|I|A, r)$, где $(g, k, 0)$ – топологический тип кривой (P, τ) , n – число листов накрытия f , $I = (i_1, \dots, i_k)$ – совокупность индексов функции (P, τ, f) на овалах, A – топологический тип дивизора полюсов функции f и r – характеристика функции $f^*: P \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, близкой к f , имеющей тот же топологический тип дивизоров полюсов и нулей и имеющей простые ненулевые конечные критические значения.

Обозначим через $H(g, n, 0|I|A, r)$ множество унитарных функций топологического типа $(g, n, 0|I|A, r)$.

ТЕОРЕМА 1. *Множество $H = H(g, n, 0|I|A, r)$ непусто, если и только если $1 \leq r < n$; $r = 1$, если $g = 0$; r делит n , I и A ; $n = \sum_{j=1}^m a_j$; $0 \leq k \leq g$; $\sum_{j=1}^k i_j \leq n - 2$ и $\sum_{j=1}^k i_j \equiv n \pmod{2}$. В этом случае H – связное пространство размерности $2(g + m - 1)$.*

4. Индексам унитарной функции (P, τ, f) на овалах разделяющей кривой (P, τ) можно приписать знаки. А именно, ориентируем $\overline{\mathbb{C}}$ и P так, чтобы f сохраняла ориентацию. Пусть P_1 и P_2

Работа первого автора выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-01-00612).

– компоненты связности дополнения $P \setminus P^\tau$. Ориентация поверхности P_1 и диска $D = \{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid |z| \leq 1\}$ индуцирует ориентацию на их границах $P^\tau = \partial P_1$ и ∂D . Ввиду $f(P^\tau) \subset \partial D$ эта ориентация позволяет определить *степени* $(i_1, \dots, i_k)$ функции (P, τ, f) на овалах кривой (P, τ) . Набор степеней определен с точностью до замены $(i_1, \dots, i_k) \mapsto (-i_1, \dots, -i_k)$, связанной с произволом в выборе компоненты связности дополнения $P \setminus P^\tau$. Модули степеней совпадают с соответствующими индексами функции (P, τ, f) на овалах.

Топологическим типом унитарной функции (P, τ, f) на разделяющей вещественной кривой называется набор чисел $(g, n, 1|I|A_1, A_2, r)$, где $(g, k, 1)$ – топологический тип кривой (P, τ) , n – число листов накрытия f , I – совокупность степеней функции (P, τ, f) на овалах, $A_i = (a_1^i, \dots, a_{m_i}^i)$ – топологический тип дивизора полюсов ограничения функции f на P_i и r – характеристика функции $f^*: P \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, близкой к f , имеющей тот же топологический тип дивизоров полюсов и нулей и имеющей простые ненулевые конечные критические значения. Говорят, что топологический тип *допускает расширение*, если $|\sum_{j=1}^k i_j| < \sum_{j=1}^k |i_j| = n - 2r$.

Обозначим через $H(g, n, 1|I|A_1, A_2, r)$ множество унитарных функций топологического типа $(g, n, 1|I|A_1, A_2, r)$. Очевидно, что $H(g, n, 1|I|A_1, A_2, r) = H(g, n, 1| - I|A_2, A_1, r)$.

ТЕОРЕМА 2. *Множество $H = H(g, n, 1|I|A_1, A_2, r)$ непусто, если и только если $1 \leq r < n$; $r = 1$, если $g = 0$; r делит n , I , A_1 и A_2 ; $1 \leq k \leq g + 1$; $k \equiv g + 1 \pmod{2}$; $\sum_{j=1}^k i_j \equiv n \pmod{2}$; $\sum_{j=1}^{m_1} a_j^1 = \sum_{j:i_j > 0} i_j + (n - \sum_{j=1}^k |i_j|)/2$; $\sum_{j=1}^{m_2} a_j^2 = -\sum_{j:i_j < 0} i_j + (n - \sum_{j=1}^k |i_j|)/2$ и либо $n = 1$, $g = 0$, $i_1 = \pm 1$, либо $n = 2$, $k = g + 1$, $i_1 = \dots = i_k = 0$, либо $n \geq 2$, $|\sum_{j=1}^k i_j| = n$, $i_j \neq 0$, либо $n \geq 3$, $\sum_{j=1}^k |i_j| \leq n - 2$. Кроме того, если множество H непусто и топологический тип $(g, n, 1|I|A_1, A_2, r)$ не допускает расширения, то H – связное пространство размерности $2(g + m_1 + m_2 - 1)$.*

5. Пусть теперь топологический тип $(g, n, 1|I|A_1, A_2, r)$ допускает расширение и множество $H = H(g, n, 1|I|A_1, A_2, r)$ непусто. Для каждой $(P, \tau, f) \in H$ рассмотрим компоненту связности H_0 пространства H , содержащую функцию (P, τ, f) . Тогда найдется функция $(P', \tau', f') \in H_0$ такая, что $P'_1 \cap f'^{-1}(D)$ – связная поверхность (здесь P'_1 – та из связных компонент дополнения $P' \setminus (P')^{\tau'}$, с помощью которой определяется топологический тип $(g, n, 1|I|A_1, A_2, r)$). *Расширенным топологическим типом* функции $(P, \tau, f) \in H$ называется набор чисел $(g, n, 1|I, \chi|A_1, A_2, r)$, где χ – род поверхности $P'_1 \cap f'^{-1}(D)$. Можно доказать, что расширенный топологический тип определен корректно с точностью до замены $(g, n, 1|I, \chi|A_1, A_2, r) \mapsto (g, n, 1| - I, \chi|A_2, A_1, r)$.

Обозначим через $H(g, n, 1|I, \chi|A_1, A_2, r)$ подмножество H , состоящее из всех функций расширенного топологического типа $(g, n, 1|I, \chi|A_1, A_2, r)$. Очевидно, что $H(g, n, 1|I, \chi|A_1, A_2, r) = H(g, n, 1| - I, (g - k + 1)/2 - \chi|A_2, A_1, r)$.

ТЕОРЕМА 3. *Множество $H_0 = H(g, n, 1|I, \chi|A_1, A_2, r)$ непусто, если и только если $0 \leq \chi \leq (g - k + 1)/2$. В этом случае H_0 – связное пространство размерности $2(g + m_1 + m_2 - 1)$.*

6. Доказательства теорем строятся по той же схеме, что и в [3], но с использованием теоремы [4] о топологической классификации разветвленных накрытий над сферой с двумя непустыми критическими значениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Натанзон С. М. // Докл. АН СССР. 1984. Т. 279. № 4. С. 803–805. [2] Натанзон С. М. // Докл. АН СССР. 1987. Т. 297. № 1. С. 40–43. [3] Natanzon S. M. // Selecta Math. Soviet. 1993. V. 12. № 3. P. 251–291. [4] Wajnryb B. // Indag. Math. 1996. V. 7. P. 549–558.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;
Независимый московский университет
E-mail: natanzon@mccme.ru, shadrin@mccme.ru

Принято редколлегией
03.10.2000