Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

У. Х. Каримов, Д. Реповш, Гавайские группы топологических пространств, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 5, 185–186

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm3504>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 14:39:08

Гавайские группы топологических пространств

У. Х. Каримов, Д. Реповш

n -мерной Гавайской серьгой ($n = 0, 1, 2, \dots$) называется следующее подпространство $(n+1)$ -мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\mathcal{H}^n = \left\{ \bar{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x_0 - 1/k)^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2 = (1/k)^2, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Точку $\theta = (0, 0, \dots)$ будем считать отмеченной точкой $\mathcal{H}^n$.

n -мерное Гавайское множество пространства X с отмеченной точкой x_0 определяется как множество гомотопических классов $[f]$ отображений $f: (\mathcal{H}^n, \theta) \rightarrow (X, x_0)$. Обозначим его символом $\mathcal{H}_n(X, x_0)$. При $n \geq 1$ в $\mathcal{H}_n(X, x_0)$ естественно определяется групповая операция, порожденная группами $\pi_n(X, x_0)$. Группы $\mathcal{H}_n(X, x_0)$ (множества $\mathcal{H}_0(X, x_0)$) являются гомотопическими инвариантами в категории всех топологических пространств с отмеченными точками.

ТЕОРЕМА 1. Если пространство X локально n -связно в точке x_0 и удовлетворяет первой аксиоме счетности, то группа $\mathcal{H}_n(X, x_0)$ изоморфна слаботому прямому произведению $\prod_{i=0}^{\infty} G_i$, в котором все $G_i = \pi_n(X, x_0) \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим любое отображение $f: (\mathcal{H}^n, \theta) \rightarrow (X, x_0)$. Так как X локально n -связно в x_0 , то существует окрестность V_{x_0} такая, что вложение $V_{x_0} \subset X$ n -тривиально. Так как f непрерывно, то существует натуральное число K такое, что $S_k^n \subset f^{-1}(V_{x_0})$ для $k > K$. Поэтому все отображения $f|_{S_k^n}$ являются n -тривиальными при $k > K$. Определим отображение $\varphi: \mathcal{H}_n(X, x_0) \rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} G_i$ следующим образом: $\varphi([f]) = ([f|_{S_1^n}], [f|_{S_2^n}], [f|_{S_3^n}], \dots, [f|_{S_K^n}], e, e, \dots) \in \prod_{i=0}^{\infty} G_i$. Очевидно, что φ — сюръективное отображение. Докажем, что φ инъективно. Для этого рассмотрим два отображения f и g такие, что $\varphi(f) = \varphi(g)$. Так как пространство X локально n -связно и удовлетворяет первой аксиоме счетности, то существует счетная вложенная система U_i окрестностей точки x_0 такая, что все вложения $U_{i+1} \subset U_i$ гомотопически n -тривиальны. Существует возрастающая система натуральных чисел $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ такая, что $\text{Im}(f|_{S_k^n}) \cup \text{Im}(g|_{S_k^n}) \subset U_{m+1}$ при всех $k > K_m$. Для $k \leq K_1$ выберем любую гомотопию относительно точки θ , которая связывает отображение $f|_{S_k^n}$ с $g|_{S_k^n}$ (это можно сделать так как $\varphi(f) = \varphi(g)$). Для k таких, что $K_1 < k \leq K_2$, выберем в множестве U_1 любую гомотопию между $f|_{S_k^n}$ и $g|_{S_k^n}$. Вообще, для k таких, что $K_m < k \leq K_{m+1}$, выберем любую гомотопию, связывающую $f|_{S_k^n}$ с $g|_{S_k^n}$ в множестве U_m . В результате мы получим гомотопию относительно точки θ между f и g , т.е. φ инъективно.

ТЕОРЕМА 2. Если пространство X имеет счетную систему окрестностей в точке x_0 и группы $\mathcal{H}_n(X, x_0)$ (множества $\mathcal{H}_0(X, x_0)$) счетны, тогда X локально n -связно в точке x_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что X не локально n -связно в точке x_0 . Тогда существует вложенная система открытых окрестностей V_i точки x_0 такая, что вложения $V_i \subset V_1$ существенны в размерности n и $\bigcap_{i=1}^{\infty} V_i = x_0$. Выберем для каждого i отображение $f_i: S^n \rightarrow V_i$, композиция которого с вложением $V_i \subset V_1$ гомотопически существенна. Далее, каждой последовательности нулей и единиц $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots)$, $\sigma_i = 0$ или 1, очевидно, соответствует отображение $f_\sigma: (\mathcal{H}^n, \theta) \rightarrow (X, x_0)$. Рассмотрим две такие последовательности σ и σ' , что $\sigma_i \neq \sigma'_i$ для бесконечного множества индексов. Отображение f_σ гомотопически не эквивалентно $f_{\sigma'}$. Действительно, предположим, что они гомотопически эквивалентны и пусть гомотопия $H: (\mathcal{H}^n, \theta) \times I \rightarrow (X, x_0)$ соединяет f_σ и $f_{\sigma'}$. Так как $H(\theta \times I) = x_0 \in V_1$, то существует K такое,

что $H(S_k^n \times I) \subset V_1$ при $k > K$. Так как $\sigma_i \neq \sigma'_i$ для бесконечного числа индексов, то существует $k_0 > K$, для которого $\sigma_{k_0} \neq \sigma'_{k_0}$. Тогда одно из отображений $f_\sigma|_{S_{k_0}^n} : S_{k_0}^n \rightarrow V_{k_0} \rightarrow V_1$ или $f_{\sigma'}|_{S_{k_0}^n} : S_{k_0}^n \rightarrow V_{k_0} \rightarrow V_1$ гомотопически существенно, а другое гомотопически постоянно. Это противоречит тому, что $H(S_{k_0}^n \times I) \subset V_1$. Поэтому f_σ и $f_{\sigma'}$ гомотопически неэквивалентны.

Так как множество всех σ , которые отличаются друг от друга на бесконечном множестве индексов, несчетно, то $\mathcal{H}_n(X, x_0)$ несчетно. Это противоречит предположениям теоремы 2.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Связное компактное метрическое пространство X есть континуум Пеано в том и только том случае, когда множество $\mathcal{H}_0(X, x_0)$ счетно в каждой точке x_0 пространства X .*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Конечномерное компактное метрическое пространство X есть ANR в том и только том случае, когда группы $\mathcal{H}_n(X, x_0)$ счетны для всех n и всех точек $x_0 \in X$.*

СЛЕДСТВИЕ 3. *Конечномерное компактное метрическое пространство X есть AR тогда и только тогда, когда $\mathcal{H}_n(X, x_0) = e$ при всех n и во всех точках x_0 пространства X .*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Существует стягиваемый компакт X такой, что $\mathcal{H}_1(X, *) \neq e$ для некоторой точки $*$.

Конус над 1-мерной Гавайской серьгой $C(\mathcal{H}^1, \theta)$ является таким пространством ($*$ – любая внутренняя точка сегмента $C(\theta)$). Конус $C(\mathcal{H}^1, \theta)$ не локально 1-связен в $*$, поэтому $\mathcal{H}_1(C(\mathcal{H}^1, \theta), *) \neq e$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 (К. Эда). Существует локально 1-связный во всех точках компакт X такой, что группа $\mathcal{H}_1(X, *)$ несчетна во всех его точках. Например, надстройка ΣC над компактом Кантора C является таким пространством.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Существует локально 2-связный континуум Пеано X такой, что группы $\mathcal{H}_2(X, *)$ несчетны во всех точках $*$.

Букет 2-мерной сферы и 1-мерной Гавайской серьги является таким пространством.

ТЕОРЕМА 3. *Существует нестягиваемый клеточно-подобный компакт X такой, что для всех n и всех точек $x_0 \in X$ группа $\mathcal{H}_n(X, x_0)$ тривиальна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим счетный компактный букет сфер возрастающей размерности $\bigvee_{i=1}^\infty S^i$ с отмеченной точкой θ . Пусть $C(\bigvee_{i=1}^\infty S^i)$ есть конус над букетом $\bigvee_{i=1}^\infty S^i$ с вершиной a и с основанием, которое мы отождествим с $\bigvee_{i=1}^\infty S^i$. Пусть $\theta \in \bigvee_{i=1}^\infty S^i \subset C(\bigvee_{i=1}^\infty S^i)$ будет отмеченной точкой конуса. Пусть X_1 и X_2 – две копии конуса $C(\bigvee_{i=1}^\infty S^i)$ с вершинами a_1, a_2 и с отмеченными точками θ_1, θ_2 соответственно. Пусть X есть одноточечное объединение пространств X_1 и X_2 относительно точек θ_1 и θ_2 . Очевидно, X удовлетворяет всем условиям теоремы.

ВОПРОС. Пусть P и P^* суть одноточечные компактификации счетных полиэдров точками θ и θ^* соответственно. Пусть $f : (P, \theta) \rightarrow (P^*, \theta^*)$ есть такое непрерывное отображение, что $\mathcal{H}_n(f) : \mathcal{H}_n(P, \theta) \rightarrow \mathcal{H}_n(P^*, \theta^*)$ является изоморфизмом для всех n . Верно ли, что f есть гомотопическая эквивалентность?

У. Х. Каримов (U. Kh. Karimov)

Институт математики АН Республики Таджикистан,
Душанбе, Таджикистан
E-mail: umed-karimov@mail.ru

Представлено В. М. Бухштабером

Принято редколлегией
24.07.2006

Д. Реповш (D. Repovš)

Institute of Mathematics, Physics and Mechanics,
University of Ljubljana, Ljubljana, Slovenia
E-mail: dusan.repovs@uni-lj.si