Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Савчук, Регуляризованный след первого порядка оператора Штурма–Лиувилля с δ -потенциалом, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 6, 155–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm352>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 10:53:10

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ СЛЕД ПЕРВОГО ПОРЯДКА ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С δ -ПОТЕНЦИАЛОМ

А. М. САВЧУК

Для оператора Штурма–Лиувилля в пространстве $L_2[0, \pi]$, порожденного дифференциальным выражением

$$l(y) = -y'' + q(x)y$$

и граничными условиями Дирихле

$$y(0) = y(\pi) = 0,$$

собственные значения которого мы будем обозначать λ_n , $n = 1, 2, \dots$, в случае гладкого потенциала $q(x) \in C^1[0, \pi]$ хорошо известна классическая формула регуляризованного следа первого порядка (см. [1]–[4]):

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n - n^2 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} q(x) dx \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} q(x) dx - \frac{q(0) + q(\pi)}{4}.$$

Эта формула следа сохраняется для произвольного потенциала $q(x) \in L_2$, для которого ряд Фурье в точках 0 и π сходится к значениям функции. Доказательство этого можно найти в [5; гл. 1, §5], но по существу этот же результат доказан в более ранней работе [3], хотя явно он там не сформулирован.

В данной заметке вычисляется регуляризованный след первого порядка оператора L с потенциалом $q(x) = \delta(x - \frac{\pi}{2})$. Этот оператор можно определить, используя общие результаты работы [6] (для рассматриваемой конкретной задачи эквивалентное определение см. в книге [7; гл. XI]):

$$Ly = -(y' - u(x)y)' - u(x)(y' - u(x)y) - u^2(x)y, \quad \text{где } u(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geq \pi/2 \\ 0 & \text{при } x < \pi/2 \end{cases},$$

$$\mathcal{D}(L) = \left\{ y \in AC \mid \begin{array}{l} y' \in AC[0, \pi/2] \cup [\pi/2, \pi], \\ y'(\frac{\pi}{2} + 0) - y'(\frac{\pi}{2} - 0) = y(\frac{\pi}{2}), \quad y(0) = y(\pi) = 0 \end{array} \right\}.$$

Собственные значения оператора L имеют следующую асимптотику:

$$(2) \quad \lambda_n = n^2 + \frac{1}{\pi} - (-1)^n \frac{1}{\pi} + O(n^{-1}), \quad n = 1, 2, \dots$$

Эту формулу можно установить непосредственными вычислениями, она также следует из результатов работы [8]. Асимптотика (2) показывает, что ряд в левой части (1) расходится. В дальнейшем под регуляризованным следом первого порядка изучаемого оператора мы будем понимать сумму ряда

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n - n^2 - \frac{1}{\pi} + (-1)^n \frac{1}{\pi} \right).$$

ТЕОРЕМА. Пусть L – оператор Штурма–Лиувилля, порожденный дифференциальным выражением

$$l(y) = -y'' + \delta\left(x - \frac{\pi}{2}\right)y$$

на отрезке $[0, \pi]$ с граничными условиями Дирихле. Тогда ряд (3) сходится, а его сумма равна $-\frac{1}{8}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно видеть, что $L > 0$. Запишем уравнение на собственные значения $\lambda_n = z_n^2$

$$-y'' + \delta\left(x - \frac{\pi}{2}\right)y = z^2 y$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 98-01-01000, 96-15-96091).

и воспользуемся определением оператора L . Собственные функции $y_n(x)$ должны удовлетворять условиям: $-y_n'' = z_n^2 y_n$ при $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ и при $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$; $y_n(0) = y_n(\pi) = 0$; $y_n(\frac{\pi}{2} - 0) = y_n(\frac{\pi}{2} + 0)$; $y_n'(\frac{\pi}{2} + 0) - y_n'(\frac{\pi}{2} - 0) = y_n(\frac{\pi}{2})$. Прямыми вычислениями легко показать, что числа z_n являются положительными корнями функции

$$f(z) = \sin\left(\frac{\pi}{2}z\right) \left(2 \cos\left(\frac{\pi}{2}z\right) + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)}{z}\right) = \sin(\pi z) \left(1 + \frac{1}{2z} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}z\right)\right).$$

Обозначим через γ_n окружность в $\mathbb{C}$ радиуса $n + \frac{1}{2}$. Заметим, что $f(z)$ нечетна, функция $\frac{1}{2z} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}z\right)$ ограничена на γ_n некоторой константой, не зависящей от n , а функция $\ln\left(1 + \frac{1}{2z} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}z\right)\right)$ голоморфна на γ_n при больших n . Поэтому в силу теоремы Коши о вычетах, получим

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=1}^n \lambda_k &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} z^2 d \ln f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} z^2 d \ln \sin(\pi z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} z^2 d \ln \left(1 + \frac{1}{2z} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}z\right)\right) \\ &= 2 \sum_{k=1}^n k^2 - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} 2z \left(\frac{1}{2z} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}z\right) - \frac{1}{8z^2} \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}z\right)\right) dz + o(1) \\ &= 2 \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{|z| < n + \frac{1}{2}} \operatorname{res} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}z\right) + \sum_{|z| < n + \frac{1}{2}} \operatorname{res} \frac{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}z\right)}{4z} + o(1) \\ &= 2 \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{n'} 1 + \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n'} \frac{1}{k^2} + o(1). \end{aligned}$$

Здесь символ $\sum_{k=1}^{n'}$ означает суммирование по всем нечетным числам, меньшим n . Таким образом,

$$\sum_{k=1}^n \left(\lambda_k - k^2 - \frac{1}{\pi}\right) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n (-1)^k + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n'} \frac{1}{k^2} + o(1).$$

При $n \rightarrow \infty$ последняя сумма стремится к $\pi^2/8$, что влечет утверждение теоремы.

СЛЕДСТВИЕ. Известно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ суммируем методом средних арифметических и его сумма равна $-\frac{1}{2}$. Поэтому из теоремы следует, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n - n^2 - \frac{1}{\pi}\right)$$

сходится в смысле суммирования методом средних и его сумма равна $\frac{1}{2\pi} - \frac{1}{8}$.

Автор благодарит А. А. Шкаликова за постановку задачи и ценные замечания и В. Е. Подольского за консультацию по литературе о следах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гельфанд И. М., Левитан Б. М. // Докл. АН СССР. 1953. Т. 88. № 4. С. 593–596.
- [2] Лидский В. Б., Садовничий В. А. // Докл. АН СССР. 1967. Т. 176. № 2. С. 259–262.
- [3] Дикий Л. А. // УМН. 1953. Т. 8. № 2. С. 119–123. [4] Левитан Б. М. // УМН. 1964. Т. 19. № 1. С. 161–165. [5] Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977. [6] Савчук А. М., Шкаликов А. А. // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 6. С. 897–912. [7] Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. М.: Мир, 1968. [8] Савчук А. М. // Матем. заметки. (в печати).

Принято редколлегией
03.10.2000