Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Б. Винберг, Коммутативные однородные пространства и коизотропные симплектические действия, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 1, 3–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm356>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 12:31:18

УДК 514.75

КОММУТАТИВНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА
И КОИЗОТРОПНЫЕ СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ

Э. Б. Винберг

Статья посвящена обзору связей между следующими свойствами риманова однородного пространства $X = G/K$: слабая симметричность в смысле А. Сельберга, коммутативность алгебры K -инвариантных мер на X , коммутативность алгебры G -инвариантных дифференциальных операторов на X , коммутативность алгебры Пуассона G -инвариантных функций на кокасательном расслоении пространства X и (в случае редуктивной группы G) простота спектра линейного представления группы G в алгебре полиномиальных функций на X . Приводятся различные структурные и классификационные результаты, в том числе полученная автором классификация неприводимых римановых однородных пространств гейзенбергова типа, для которых алгебра Пуассона инвариантных функций на кокасательном расслоении коммутативна.

Библиография: 49 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

Некоторые обозначения	5
Глава I. Коммутативные однородные пространства	6
§ 1. Симметрические и слабо симметрические пространства	6
§ 2. Пары Гельфанда и коммутативные однородные пространства	11
§ 3. Сферические однородные пространства редуктивных групп	18
§ 4. Слабо коммутативные однородные пространства	28
Глава II. Коизотропные симплектические действия	29
§ 1. Симплектические и пуассоновы многообразия	30
§ 2. Пуассоновы действия и отображение моментов	37
§ 3. Коранг симплектического действия	42
§ 4. Структура слабо коммутативных однородных пространств	51
Список литературы	60

Одной из целей этой статьи является собрание воедино информации о связях между некоторыми замечательными классами римановых однородных пространств – информации, рассыпанной доселе во многих публикациях разных авторов.

Статья написана при поддержке гранта РФФИ 98-01-00598, гранта INTAS 97-1570, а также гранта CRDF RM1-2088. Работа над статьей была завершена во время моего пребывания в гостеприимном университете Билефельда, которому я выражаю свою глубокую благодарность.

Пусть $X = G/K$ – связное риманово однородное пространство группы Ли G . Пространство X называется *коммутативным* (или пара (G, K) называется *парой Гельфанда*), если выполнены следующие эквивалентные условия:

- 1) алгебра K -инвариантных мер с компактным носителем на X коммутативна (относительно свертки);
- 2) алгебра G -инвариантных дифференциальных операторов на X коммутативна.

К числу коммутативных пространств относятся все симметрические пространства и, более общо, все так называемые слабо симметрические пространства. Пространство X называется *слабо симметрическим*, если существует такой диффеоморфизм s многообразия X , нормализующий группу G , что для любых двух точек $x, y \in X$ в множестве sG имеется преобразование, переставляющее x и y .

Если группа G редуктивна, то условия 1) и 2) эквивалентны также любому из следующих условий:

- 3) пространство X слабо симметрично;
- 4) естественное линейное представление группы G в алгебре $\mathbb{C}[X]$ полиномиальных функций на X имеет простой спектр;
- 5) алгебра Пуассона G -инвариантных функций на кокасательном расслоении T^*X многообразия X коммутативна.

Аффинные однородные пространства комплексных редуктивных алгебраических групп, удовлетворяющие условию 4), изучались в работах по алгебраическим группам преобразований под названием (аффинных однородных) *сферических многообразий*. В частности, известна их классификация. Коммутативные римановы однородные пространства редуктивных групп Ли – это их вещественные формы.

В общем случае условие 5) следует из условия 2). Римановы однородные пространства, удовлетворяющие условию 5), мы называем в этой статье *слабо коммутативными*. Впрочем, весьма правдоподобно, что условие 5) эквивалентно условию 2), т.е. всякое слабо коммутативное пространство на самом деле коммутативно. Во всяком случае, это верно в двух противоположных случаях: когда группа G редуктивна и когда $G = N \ltimes K$, где N – нильпотентная группа Ли.

Однородное пространство вида $X = (N \ltimes K)/K$ может быть коммутативным, только если группа N не более чем 2-ступенно нильпотентна, т.е. ее коммутант Z содержится в ее центре. Такие однородные пространства мы называем пространствами *гейзенбергова типа*. Если при этом естественное линейное представление группы K в векторном пространстве $V = N/Z$ неприводимо, то мы называем пространство X *неприводимым*. В статье приведена классификация всех неприводимых коммутативных однородных пространств гейзенбергова типа. Ранее эта классификация была известна для случая, когда $\dim Z = 1$. (Случай $\dim Z = 0$ тривиален.)

Во второй части статьи (слабо) коммутативные однородные пространства обсуждаются в более широком контексте эквивариантной симплектической геометрии.

Корангом симплектического действия (вещественной или комплексной) группы Ли G на связном симплектическом (вещественном или комплексном) гладком многообразии M называется коранг касательного пространства орбиты общего положения. Симплектические действия коранга 0 называются *коизотропными*.

Однородное пространство $X = G/K$ слабо коммутативно тогда и только тогда, когда действие $G: T^*X$ коизотропно (в смысле стандартной симплектической структуры кокасательного расслоения).

Пусть задано любое действие редуктивной комплексной алгебраической группы G на неприводимом комплексном алгебраическом многообразии X . В этой ситуации оказывается, что коранг действия $G : T^*X$ просто выражается в терминах действия $G : X$. А именно, пусть B – борелевская подгруппа группы G . Тогда коразмерность орбиты общего положения действия $B : X$ называется *сложностью* действия $G : X$. В теории редуктивных алгебраических групп преобразований сложность является весьма важной и хорошо изученной характеристикой действия. Оказывается, что коранг действия $G : T^*X$ равен удвоенной сложности действия $G : X$. В частности, действие $G : T^*X$ коизотропно тогда и только тогда, когда действие $G : X$ имеет сложность 0 или, как говорят, является сферическим. В статье дается новое доказательство этих фактов в случае, когда многообразие X квазиаффинно.

По поводу используемых в статье стандартных сведений из теории групп Ли и алгебраических групп мы отсылаем читателя к книге [1], а по поводу сведений из теории инвариантов – к обзорной статье [2], хотя все это, конечно, может быть найдено и во многих других местах.

Необходимые ссылки на оригинальные работы, содержащие упомянутые в этом резюме и другие результаты, даны в теле статьи.

Я благодарю Г.И. Ольшанского за полезные замечания и Д.А. Титашева, указавшего мне на некоторые неточности в предыдущем варианте статьи.

Некоторые обозначения

- $\langle M \rangle$ – линейная оболочка подмножества M векторного пространства V .
- U° – аннулятор подпространства $U \subset V$ в сопряженном (= дуальном) пространстве V^* .
- $S(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S^n(V)$ – симметрическая алгебра пространства V .
- $\Lambda(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Lambda^n(V)$ – внешняя алгебра пространства V .
- PV – проективное пространство, ассоциированное с пространством V .
- $L(V)$ – алгебра линейных операторов в пространстве V .
- $GL(V)$ – группа невырожденных линейных операторов в пространстве V .
- $O(V)$ – ортогональная группа пространства V (относительно заданной квадратичной формы).
- X^G – подмножество неподвижных точек группы G , действующей на множестве X .
- $\sim_G$ – отношение эквивалентности, определяемое действием группы G .
- $G *_H X$ – однородное расслоение над однородным пространством G/H , определяемое действием $H : X$, т.е. фактор прямого произведения $G \times X$ по действию группы H , определяемому формулой $h(g, x) = (gh^{-1}, hx)$.
- $N \rtimes H$ – полупрямое произведение групп N и H (в котором подгруппа N нормальна).
- $N(H)$ – нормализатор подгруппы H в группе.
- $Z(H)$ – централизатор подгруппы H в группе.
- $T_x(X)$ – касательное пространство многообразия X в точке x .
- $F[X]$ – алгебра регулярных (полиномиальных) функций на алгебраическом многообразии X над полем F .
- $F(X)$ – поле рациональных функций на неприводимом алгебраическом многообразии X .
- G^0 – связная компонента единицы группы Ли G .
- $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ – экспоненциальное отображение в группе Ли G .

$g\xi \in T_g(G)$ – результат левого сдвига элемента $\xi \in \mathfrak{g} = T_e(G)$ на элемент g группы Ли G .

$\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}$ – полупрямая сумма алгебр Ли $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{h}$ (в которой $\mathfrak{n}$ – идеал).

$\mathfrak{n}(\mathfrak{h})$ – нормализатор подалгебры $\mathfrak{h}$ в алгебре Ли.

$\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ – централизатор подалгебры $\mathfrak{h}$ в алгебре Ли.

Группы Ли обозначаются прописными латинскими буквами, а их касательные алгебры Ли – соответствующими строчными готическими буквами.

Глава I. Коммутативные однородные пространства

В этой главе мы рассматриваем однородные пространства вида $X = G/K$, где G – (вещественная) группа Ли и K – ее компактная подгруппа. Если не оговорено противное, то мы считаем, что многообразие X связно и действие $G : X$ эффективно, т.е. K не содержит нетривиальных нормальных подгрупп группы G . “Базисная” точка $eK \in X$ обозначается буквой o .

Пространства этого типа обладают инвариантной римановой метрикой (вообще говоря, не единственной). Однако мы рассматриваем их именно как однородные пространства, а не как римановы многообразия. Это, в частности, означает, что изометричные римановы многообразия с различными транзитивными группами движений рассматриваются как неизоморфные объекты. Такая точка зрения, отличная от принятой в большинстве геометрических работ, более удобна в контексте этой статьи.

§ 1. Симметрические и слабо симметрические пространства

1. Понятие симметрического пространства было введено Э. Картаном в 1926 г. Существует несколько эквивалентных определений симметрического пространства. Начнем с того из них, которое более удобно для нас.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Однородное пространство $X = G/K$ называется *симметрическим*, если существует такой диффеоморфизм s многообразия X , что $sGs^{-1} = G$, $so = o$ и

$$ds(\xi) = -\xi \quad \forall \xi \in T_o(X). \quad (1)$$

Диффеоморфизм s , удовлетворяющий условиям этого определения, автоматически инволютивен, т.е. $s^2 = \text{id}$. Он порождает инволютивный автоморфизм σ группы G по формуле

$$\sigma(g) = sgs^{-1}. \quad (2)$$

Если G^σ – подгруппа неподвижных точек этого автоморфизма, то

$$(G^\sigma)^0 \subset K \subset G^\sigma. \quad (3)$$

Обратно, если существует инволютивный автоморфизм σ группы G , удовлетворяющий условию (3) или эквивалентному ему условию

$$\mathfrak{g}^\sigma = \mathfrak{k}, \quad (4)$$

то диффеоморфизм s многообразия X , определяемый по формуле

$$s(g)o = \sigma(g)o, \quad (5)$$

удовлетворяет условиям определения 1 и, следовательно, однородное пространство $X = G/K$ является симметрическим.

Структура симметрических пространств хорошо известна (см., например, [3]). Напомним лишь один факт: всякое симметрическое пространство локально изоморфно прямому произведению симметрического пространства полупростой группы Ли и евклидова пространства. Под евклидовым пространством при нашей точке зрения здесь следует понимать однородное пространство вида $(V \rtimes K)/K$, где V – векторная группа, а K – любая замкнутая подгруппа группы $O(V)$ (так что имеется много евклидовых пространств одной размерности).

2. В 1956 г. А. Сельберг в своей знаменитой работе [4], посвященной так называемой “формуле следа”, ввел понятие слабо симметрического пространства. Нам будет удобно следующее определение слабо симметрического пространства, отличное от оригинального определения Сельберга, но эквивалентное ему с точностью до одной мелочи, о которой будет сказано ниже. Оригинальное определение также будет дано ниже.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Однородное пространство $X = G/K$ называется *слабо симметрическим*, если существует такой диффеоморфизм s многообразия X , что $sGs^{-1} = G$, $so = o$ и

$$ds(\xi) \underset{K}{\sim} -\xi \quad \forall \xi \in T_o(X). \quad (6)$$

Из этого определения ясно, что всякое симметрическое пространство является слабо симметрическим.

В отличие от диффеоморфизма s в определении симметрического пространства, диффеоморфизм s в этом определении определен не однозначно: как минимум его можно умножить на любой элемент из K .

Приведем несколько примеров слабо симметрических пространств, не являющихся симметрическими.

ПРИМЕР 1. Оригинальный пример Сельберга – 3-мерное пространство

$$X = (\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}_2)/\mathrm{SO}_2$$

единичных касательных векторов плоскости Лобачевского L^2 . Здесь множитель $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ – группа собственных движений плоскости L^2 , действующая на X естественным образом, множитель SO_2 – группа одновременных поворотов всех касательных векторов на один и тот же угол. Стабилизатор $K = \mathrm{SO}_2$ базисной точки $o \in X$, вложенный в произведение антидиагональным образом, тривиально действует на слое естественного расслоения $X \rightarrow L^2$, проходящем через o . Соответственно этому он действует в касательном пространстве $T_o(X)$ поворотами вокруг “вертикальной” оси, касающейся этого слоя. Возьмем в качестве s диффеоморфизм пространства X , индуцированный отражением плоскости L^2 относительно прямой, направляющий вектор которой есть точка o пространства X . Тогда $d_o s$ – это поворот на π вокруг прямой, ортогональной вертикальной оси, и нетрудно видеть, что условие (6) выполнено.

ПРИМЕР 2. Вырождением предыдущего пространства является так называемое нильпространство Тёрстона

$$X = (H \rtimes \mathrm{SO}_2)/\mathrm{SO}_2,$$

где H – 3-мерная группа Гейзенберга (изоморфная группе унитарных матриц 3-го порядка). Пространство X естественным образом отождествляется с группой H ; при этом пространство $T_o(X)$ отождествляется с касательной алгеброй $\mathfrak{h}$ группы H . Группа $K = \mathrm{SO}_2$ действует на $T_o(X)$ поворотами вокруг прямой $\mathfrak{z}$, являющейся центром алгебры $\mathfrak{h}$. В качестве s можно взять автоморфизм группы H , дифференциал которого есть поворот на π относительно некоторой прямой, ортогональной $\mathfrak{z}$. Условие (6) будет выполнено по той же причине, что и в предыдущем примере.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим однородное пространство

$$X = (\mathrm{SO}_3 \times \mathrm{SO}_3 \times \mathrm{SO}_3)/\mathrm{SO}_3,$$

где стабилизатор $K = \mathrm{SO}_3$ вложен в произведение диагональным образом. Касательное пространство $T_o(X)$ может быть отождествлено с прямой суммой двух копий евклидова пространства $\mathbb{E}^3$, на которой группа $K = \mathrm{SO}_3$ действует естественным образом. Так как любые два вектора пространства $\mathbb{E}^3$ можно одновременно обратить поворотом на π вокруг ортогональной им оси, то условие (6) выполнено для $s = \mathrm{id}$.

ПРИМЕР 4. Сфера S^{2n-1} может рассматриваться как однородное пространство группы SU_n :

$$S^{2n-1} = \mathrm{SU}_n/\mathrm{SU}_{n-1} \subset \mathbb{C}^n.$$

В этом качестве она, не будучи симметрическим пространством, все же является слабо симметрическим пространством. В качестве s можно взять комплексное сопряжение.

3. Приведем еще два эквивалентных определения слабой симметричности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Однородное пространство $X = G/K$ слабо симметрично тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих эквивалентных условий:*

(WS1) *существует такой диффеоморфизм s многообразия X , что $sGs^{-1} = G$ и*

$$(sx, sy) \underset{G}{\sim} (y, x) \quad \forall x, y \in X; \quad (7)$$

(WS2) *существует такой автоморфизм σ группы G , что*

$$\sigma(g) \in Kg^{-1}K \quad \forall g \in G. \quad (8)$$

Условие (WS1) является оригинальным определением Сельберга, с той оговоркой, что он дополнительно требовал, чтобы $s^2 \in G$. Мне кажется более удобным не требовать этого; с другой стороны, я не знаю примеров слабо симметрических пространств в смысле этой статьи, для которых это условие не было бы выполнено при подходящем выборе s .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что многообразие X снабжено G -инвариантной римановой метрикой. При выполнении любого из условий (6) и (7) эта метрика будет автоматически инвариантна и относительно s .

Пусть s – диффеоморфизм многообразия X , нормализующий группу G . Тогда s сохраняет отношение G -эквивалентности на $X \times X$, и из выполнения условия (7) для какой-то пары $(x, y) \in X \times X$ следует его выполнение для любой эквивалентной пары.

Предположим, что $so = o$ и выполнено условие (6). Проверим выполнение условия (7). Соединим точки x и y геодезическим отрезком $\overline{xy}$. Пусть p – середина этого отрезка. Заменяя пару (x, y) на эквивалентную, можно считать, что $p = o$. Пусть ξ – единичный касательный вектор отрезка $\overline{xy}$ в точке o , и пусть $k \in K$ – такой элемент, что $ds(\xi) = -dk(\xi)$. Тогда $sx = ky$ и $sy = kx$ (см. рис. 1).

Рис. 1

Обратно, пусть выполнено условие (7). Домножив s на подходящий элемент группы G , можно считать, что $so = o$. Проверим выполнение условия (6). Пусть $\xi \in T_o(X)$ – любой единичный вектор. Проведем через точку o геодезическую по направлению ξ и возьмем на ней точки x и y на равном расстоянии от o , как на рис. 1. Будем считать, что точки x и y настолько близки к o , что отрезок $\overline{xy}$ нашей геодезической с серединой в точке o является единственным кратчайшим геодезическим отрезком, соединяющим x и y . Тогда $s(\overline{xy})$ будет единственным кратчайшим геодезическим отрезком, соединяющим sx и sy . Пусть $g \in G$ – такой элемент, что $gx = sy$ и $gy = sx$. Тогда $g(\overline{xy}) = s(\overline{yx})$ и, следовательно, $go = o$, т.е. $g \in K$, и $dg(\xi) = -ds(\xi)$.

Таким образом, мы доказали, что условие (WS1) эквивалентно слабой симметричности пространства X .

Пусть снова s удовлетворяет условию (7) и $so = o$. Пусть σ – автоморфизм группы G , определяемый по формуле (5). Тогда для любого $g \in G$

$$(o, \sigma(g)o) = (so, sgo) \underset{G}{\sim} (go, o),$$

т.е. существует такой элемент $h \in G$, что $hgo = o$ и $ho = \sigma(g)o$. Из первого из этих равенств следует, что $h = k_1g^{-1}$ ($k_1 \in K$). Подставляя это во второе равенство, получаем, что

$$\sigma(g) = hk_2 = k_1g^{-1}k_2 \quad (k_1, k_2 \in K).$$

Таким образом, для автоморфизма σ выполнено условие (8).

Обратно, пусть автоморфизм σ группы G удовлетворяет условию (8). Полагая $g \in K$, получаем, что $\sigma(K) = K$. Пусть s – диффеоморфизм многообразия X , определяемый по формуле (2). Проверим выполнение условия (7). Заменяя пару (x, y) на эквивалентную, можно считать, что $x = o$, $y = go$ ($g \in G$). Пусть $\sigma(g) = k_1g^{-1}k_2$ ($k_1, k_2 \in K$). Тогда, обращая предыдущие выкладки, получаем, что

$$(sx, sy) = (o, \sigma(g)o) \underset{G}{\sim} (go, o) = (y, x).$$

4. Понятие слабо симметрического пространства, введенное Сельбергом, кажется, было забыто на 40 лет. Лишь около 1995 г. геометры начали изучать эти пространства (см. [5]–[10]). При этом они выработали следующее определение, отличное от определения Сельберга, но более естественное с точки зрения геометрии: слабо симметрическим пространством называется связное риманово многообразие X , для любых двух точек которого существует движение, их переставляющее. В терминологии настоящей статьи это означает, что X является слабо симметрическим пространством относительно полной группы движений. Как мы сейчас покажем, в этом случае оно является слабо симметрическим пространством и относительно связной компоненты этой группы.

ЛЕММА 1. Пусть $K \subset \mathrm{GL}(V)$ – компактная линейная группа и $s_0 \in \mathrm{GL}(V)$ – такой линейный оператор, что $s_0 K s_0^{-1} = K$ и

$$s_0(\xi) \underset{K}{\sim} -\xi \quad \forall \xi \in V. \quad (9)$$

Тогда найдется такой элемент $s \in K s_0$, что

$$s(\xi) \underset{K^0}{\sim} -\xi \quad \forall \xi \in V. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всякого $s \in K s_0$ положим

$$V(s) = \{\xi \in V : s(\xi) \underset{K^0}{\sim} -\xi\} \subset V.$$

Так как орбиты компактной линейной группы разделяются полиномиальными инвариантами [1], то $V(s)$ – алгебраическое многообразие. Очевидно, что $V(s)$ зависит только от смежного класса по K^0 , в котором лежит s , и, стало быть, имеется лишь конечное число таких многообразий. Из условия (9) следует, что пространство V ими покрывается; но тогда оно должно совпадать с одним из них.

Таким образом, в определении 2 слабо симметрического пространства эквивалентность относительно подгруппы K можно заменить эквивалентностью относительно ее связной компоненты K^0 . Отсюда, в частности, следует, что если однородное пространство G/K является слабо симметрическим, то и пространство $G^0/(K \cap G^0)$ (т.е. то же многообразие, но с группой G^0) является таковым.

Для однородных пространств связных групп Ли мы докажем, что свойство слабой симметричности является локальным, т.е. зависит только от алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и ее подалгебры $\mathfrak{k}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $X = G/K$ – слабо симметрическое пространство. Тогда группа $N(K)/K$ абелева и автоморфизм σ действует на ней как инверсия.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение следует из второго, а второе – из свойства (8).

СЛЕДСТВИЕ. Автоморфизм σ действует на центре Z группы G как инверсия.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Однородное пространство связной группы Ли является слабо симметрическим тогда и только тогда, когда таковым является его односвязное накрывающее пространство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если допустить неэффективные (но локально эффективные) действия, то односвязное накрытие $p: X \rightarrow X_1$ однородного пространства X_1 связной группы Ли может быть представлено следующим образом:

$$p: X = G/K \rightarrow G/\hat{K} = X_1, \quad gK \mapsto g\hat{K},$$

где подгруппа $\hat{K}$ (не обязательно компактная) содержит подгруппу K в качестве связной компоненты. Можно считать действие $G: X$ эффективным; тогда ядром неэффективности действия $G: X_1$ будет подгруппа $N = \hat{K} \cap Z$, где Z – центр группы G . Положим $G_1 = G/N$ и $K_1 = \hat{K}/N$; тогда $X_1 = G_1/K_1$ будет эффективным представлением однородного пространства X_1 .

Если пространство X_1 слабо симметрично, то по лемме 1 соответствующий диффеоморфизм s_1 может быть выбран так, чтобы условие (6) было выполнено для группы $K_1^0 = K$. Он может быть (единственным образом) поднят до диффеоморфизма s многообразия X , оставляющего на месте точку o . При этом s будет нормализовать группу G и будет выполнено условие (6).

Обратно, пусть пространство X слабо симметрично и σ – автоморфизм группы G , порождаемый соответствующим диффеоморфизмом s . Так как $\hat{K} \subset N(K)$, то из предложения 2 следует, что $\sigma(\hat{K}) = \hat{K}$ и, значит, автоморфизм σ спускается до автоморфизма σ_1 группы G_1 , сохраняющего подгруппу K_1 . Так как $K_1 \supset K$, то соответствующий диффеоморфизм s_1 многообразия X_1 удовлетворяет условию (6).

§ 2. Пары Гельфанда и коммутативные однородные пространства

1. Пусть G – конечная группа и $\mathbb{R}G$ – ее вещественная групповая алгебра. Для любой подгруппы $K \subset G$ подпространство $(\mathbb{R}G)^{K \times K}$ элементов алгебры $\mathbb{R}G$, инвариантных относительно умножений слева и справа на элементы подгруппы K , является подалгеброй. Пара (G, K) называется *парой Гельфанда*, если эта подалгебра коммутативна. Это равносильно тому, что в пространстве любого неприводимого комплексного линейного представления группы G подпространство K -инвариантных векторов не более чем одномерно, или, по двойственности Фробениуса, тому, что представление группы G в пространстве $\mathbb{C}[G/K]$ функций на G/K имеет простой спектр (см., например, [11]).

Все это может быть обобщено на локально компактные топологические группы, если принять какую-либо топологическую версию групповой алгебры.

Пусть G – произвольная локально компактная топологическая группа, и пусть $C(G)$ – пространство непрерывных функций на G с топологией компактной сходимости. Назовем групповой алгеброй группы G и обозначим через $\mathbb{R}G$ пространство

непрерывных линейных функционалов на $C(G)$, т.е. обобщенных мер с компактным носителем на G , с операцией свертки $*$ в качестве умножения.

Пусть $K \subset G$ – компактная подгруппа.

Отметим, что пространство $(\mathbb{R}G)^{K \times K}$ может быть отождествлено с пространством непрерывных линейных функционалов на $C(G)^{K \times K}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пара (G, K) называется *парой Гельфанда*, если алгебра $(\mathbb{R}G)^{K \times K}$ коммутативна.

Известно [12] (но нам это не понадобится), что это условие равносильно тому, что в пространстве любого неприводимого унитарного представления группы G подпространство K -инвариантных векторов не более чем одномерно, или тому, что представление группы G в пространстве $L^2(G/K)$ имеет простой спектр.

2. Любой автоморфизм σ группы G индуцирует естественным образом автоморфизм ее групповой алгебры $\mathbb{R}G$. При этом если $\sigma(K) = K$, то подалгебра $(\mathbb{R}G)^{K \times K}$ инвариантна относительно σ . Аналогично, любой антиавтоморфизм группы G (в частности, инверсия) индуцирует антиавтоморфизм алгебры $\mathbb{R}G$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Предположим, что существует такой автоморфизм σ группы G , что*

$$\sigma(g) \in Kg^{-1}K \quad \forall g \in G. \quad (11)$$

Тогда пара (G, K) является парой Гельфанда.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия (11) следует, в частности, что $\sigma(K) = K$, так что σ индуцирует автоморфизм алгебры $(\mathbb{R}G)^{K \times K}$. В то же время из (11) следует, что этот автоморфизм совпадает с антиавтоморфизмом, индуцированным инверсией. Значит, алгебра $(\mathbb{R}G)^{K \times K}$ коммутативна.

Заметим, что условие (11) совпадает с условием (8) предложения 1.

СЛЕДСТВИЕ. *Если G/K – слабо симметрическое пространство, то (G, K) – пара Гельфанда.*

Условие (11) иногда называют условием Гельфанда, так как на нем было основано предложенное И. М. Гельфандом (см. [13], [12]) доказательство того, что для всякого симметрического пространства G/K компактной группы Ли G представление группы G в пространстве $L^2(G/K)$ имеет простой спектр – факта, доказанного ранее Э. Картаном путем перебора случаев.

Легко видеть, что если N – нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в K , то пара (G, K) является парой Гельфанда тогда и только тогда, когда таковой является пара $(G/N, K/N)$. Это означает, что свойство пары (G, K) быть парой Гельфанда есть на самом деле свойство однородного пространства G/K .

3. Для любой меры $\mu \in \mathbb{R}G$ обозначим через $\mu^\natural$ результат ее двустороннего усреднения по группе K . Через δ_g обозначим δ -функцию точки $g \in G$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Пара (G, K) является парой Гельфанда тогда и только тогда, когда меры $\delta_g^\natural$ и $\delta_h^\natural$ коммутируют для любых $g, h \in G$. Более того, если G – группа Ли и многообразие $X = G/K$ связно, то достаточно потребовать, чтобы меры $\delta_g^\natural$ и $\delta_h^\natural$ коммутировали для любых g, h из некоторой окрестности единицы группы G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно (см., например, [14]), что линейные комбинации δ -функций, т.е. меры с конечным носителем, образуют плотное подмножество в алгебре $\mathbb{R}G$ в слабой топологии. Следовательно, линейные комбинации их усреднений образуют плотное подмножество в алгебре $(\mathbb{R}G)^{K \times K}$. Так как операция свертки непрерывна по каждому множителю в слабой топологии (см. там же), то из перестановочности мер $\delta_g^{\natural}$ и $\delta_h^{\natural}$ для любых $g, h \in G$ вытекает коммутативность алгебры $(\mathbb{R}G)^{K \times K}$.

Пусть теперь G – группа Ли. Интеграл функции $\varphi \in C(G)^{K \times K}$ по мере $\delta_g^{\natural} * \delta_h^{\natural}$ равен

$$I(\varphi; g, h) = \int_K \varphi(gkh) dk, \quad (12)$$

где dk обозначает нормированную меру Хаара на группе K . Следовательно, если φ – аналитическая функция, то $I(\varphi; g, h)$ – аналитическая функция от g и h , и если многообразие $X = G/K$ связно и равенство $I(\varphi; g, h) = I(\varphi; h, g)$ имеет место для всех g и h , достаточно близких к единице группы G , то оно имеет место вообще для всех g и h . Но так как множество аналитических функций на группе G (как и на всяком вещественном аналитическом многообразии) плотно в $C(G)$ [15], то из выполнения этого равенства для всех аналитических функций φ следует, что $\delta_g^{\natural} * \delta_h^{\natural} = \delta_h^{\natural} * \delta_g^{\natural}$.

4. В случае, когда G – линейная группа Ли, понятие пары Гельфанда можно перевести в алгебраическую плоскость.

Пусть $G \subset \mathrm{GL}(U)$ – линейная группа Ли и G^a – ее замыкание в топологии Зарисского в $\mathrm{GL}(U)$. Назовем *алгеброй полиномиальных функций* на G и обозначим через $\mathbb{R}[G]$ алгебру функций на группе G , являющихся ограничениями функций из $\mathbb{R}[G^a]$. Алгебра $\mathbb{R}[G]$ порождается матричными элементами тавтологического линейного представления группы G в пространстве U и функцией $(\det g)^{-1}$. (Впрочем, функцию $(\det g)^{-1}$ можно иметь уже в числе матричных элементов, если добавить к исходному представлению одномерное представление $g \mapsto (\det g)^{-1}$.) По теореме Вейерштрасса о приближении непрерывных функций многочленами пространство $\mathbb{R}[G]$ плотно в $C(G)$.

Конечномерное линейное представление $R: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ назовем *полиномиальным*, если его матричные элементы принадлежат алгебре $\mathbb{R}[G]$. Матричные элементы полиномиальных линейных представлений линейно порождают пространство $\mathbb{R}[G]$. В самом деле, группа G действует в пространстве $\mathbb{R}[G]$ левыми сдвигами:

$$(g\varphi)(x) = \varphi(g^{-1}x).$$

Так как степень полиномиальной функции (относительно матричных элементов тавтологического представления и функции $(\det g)^{-1}$) при этом сохраняется, то каждая функция $\varphi \in \mathbb{R}[G]$ порождает конечномерное инвариантное подпространство. Обозначим его через $W(\varphi)$. Пусть $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ – его базис и $x_1, \dots, x_m \in G$ – такие точки, что $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$. Имеем:

$$\varphi_i(gx) = \sum_j a_{ij}(g) \varphi_j(x). \quad (13)$$

Подставляя $x = x_k$, получаем:

$$a_{ik}(g) = \varphi_i(gx_k),$$

откуда следует, что $a_{ik} \in \mathbb{R}[G]$. Но a_{ik} — это матричные элементы представления группы G в пространстве $W(\varphi)^* = V(\varphi)$, сопряженном к $W(\varphi)$ (для которого $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ служат координатными функциями), так что представление $G : V(\varphi)$ полиномиально. С другой стороны, полагая в (13) $x = e$, получаем, что $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ принадлежат линейной оболочке матричных элементов этого представления.

Для любого линейного представления $R: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ обозначим через $A(R)$ линейную оболочку операторов представления. Это подалгебра (ассоциативной) алгебры $L(V)$. Обозначим через $A(R)^{K \times K}$ ее подалгебру, состоящую из линейных операторов, инвариантных относительно умножений слева и справа на операторы $R(k)$, $k \in K$. Она может рассматриваться как некоторая алгебра линейных операторов в пространстве

$$V^K = \{v \in V : R(k)v = v \ \forall k \in K\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Пара (G, K) является парой Гельфанда тогда и только тогда, когда для любого полиномиального линейного представления R группы G алгебра $A(R)^{K \times K}$ коммутативна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любое полиномиальное линейное представление $R: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ продолжается до представления групповой алгебры $\mathbb{R}G$. Образом алгебры $\mathbb{R}G$ при этом представлении является алгебра $A(R)$, а образом подалгебры $(\mathbb{R}G)^{K \times K}$ — подалгебра $A(R)^{K \times K}$. Так как пространство $\mathbb{R}[G]$ плотно в $C(G)$, то пересечение ядер всех получаемых таким образом линейных представлений алгебры $\mathbb{R}G$ равно нулю. Следовательно, коммутативность алгебры $(\mathbb{R}G)^{K \times K}$ равносильна коммутативности всех алгебр $A(R)^{K \times K}$.

Всякое полиномиальное линейное представление группы G (однозначно) продолжается до линейного представления алгебраической группы G^a , причем линейные оболочки операторов представления для групп G и G^a одинаковы. Поэтому справедливо

СЛЕДСТВИЕ. *Пара (G, K) является парой Гельфанда тогда и только тогда, когда таковой является пара (G^a, K) .*

5. Понятие пары Гельфанда может быть интерпретировано также в терминах инвариантных дифференциальных операторов на однородном пространстве $X = G/K$.

Обозначим через $\mathcal{D}(X)$ алгебру всех дифференциальных операторов на X и через $\mathcal{D}(X)^G$ — подалгебру инвариантных дифференциальных операторов.

Алгебра $\mathcal{D}(X)$ фильтрована по порядку дифференциального оператора. Соответствующая градуированная алгебра $\mathrm{gr} \mathcal{D}(X)$ есть алгебра $\mathcal{P}(T^*X)$ функций на кокасательном расслоении T^*X многообразия X , полиномиальных на слоях, причем изоморфизм осуществляется взятием символа дифференциального оператора. Градуированная алгебра, соответствующая подалгебре $\mathcal{D}(X)^G \subset \mathcal{D}(X)$, вложена в подалгебру $\mathcal{P}(T^*X)^G \subset \mathcal{P}(T^*X)$ инвариантных функций на T^*X . Мы покажем, что эти алгебры на самом деле совпадают, и одновременно получим описание алгебры $\mathcal{D}(X)^G$ в терминах обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Каждому элементу ξ алгебры Ли $\mathfrak{g} = T_e(G)$ поставим в соответствие левоинвариантный дифференциальный оператор первого порядка на группе G , состоящий в дифференцировании по направлению левоинвариантного векторного поля, равного ξ в единице группы G . Это отображение продолжается до изоморфизма алгебры $U(\mathfrak{g})$ на

алгебру левоинвариантных дифференциальных операторов на G . При этом порядок дифференциального оператора, соответствующего элементу $u \in U(\mathfrak{g})$, равен степени выражения элемента u через элементы алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а взятие символа левоинвариантного дифференциального оператора в точке e есть не что иное, как изоморфизм $\text{gr } U(\mathfrak{g}) \rightarrow S(\mathfrak{g})$, описываемый теоремой Пуанкаре–Биркгофа–Витта.

Обозначим через $U(\mathfrak{g})^K$ подалгебру алгебры $U(\mathfrak{g})$, состоящую из элементов, инвариантных относительно присоединенного действия подгруппы K . Всякий оператор $D \in U(\mathfrak{g})^K$ перестановочен с правыми сдвигами на элементы подгруппы K и, следовательно, переводит в себя пространство функций на G , правоинвариантных относительно K . Тем самым он определяет некоторый инвариантный дифференциальный оператор D_K на многообразии $X = G/K$. Отметим, что символ оператора D_K есть образ символа оператора D при каноническом гомоморфизме $\mathcal{P}(T^*G)^G \rightarrow \mathcal{P}(T^*X)^G$. В частности, символ оператора D_K в точке $o \in X$ есть образ символа оператора D в точке $e \in G$ при каноническом гомоморфизме $S(\mathfrak{g}) \rightarrow S(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$.

Все дифференциальные операторы из левого идеала $U(\mathfrak{g})\mathfrak{k}$ алгебры $U(\mathfrak{g})$ аннулируют функции, правоинвариантные относительно K . Так как элементы подалгебры $U(\mathfrak{g})^K$ перестановочны с элементами из $\mathfrak{k}$, то $(U(\mathfrak{g})\mathfrak{k})^K$ – двусторонний идеал алгебры $U(\mathfrak{g})^K$. Таким образом, определен гомоморфизм

$$\gamma: U(\mathfrak{g})^K / (U(\mathfrak{g})\mathfrak{k})^K \rightarrow \mathcal{D}(X)^G. \quad (14)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7 [16]. *Гомоморфизм (14) является изоморфизмом. Градуированная алгебра, ассоциированная с $\mathcal{D}(X)^G$, совпадает с $\mathcal{P}(T^*X)^G$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что композиция соответствующего гомоморфизма градуированных алгебр

$$\text{gr } \gamma: \text{gr}(U(\mathfrak{g})^K / (U(\mathfrak{g})\mathfrak{k})^K) \rightarrow \text{gr } \mathcal{D}(X)^G,$$

вложения

$$\text{gr } \mathcal{D}(X)^G \hookrightarrow \mathcal{P}(T^*X)^G$$

и изоморфизма ограничения

$$\mathcal{P}(T^*X)^G \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}[T_o^*X]^K = S(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^K$$

является изоморфизмом. Указанная композиция есть не что иное, как взятие символа в точке o дифференциального оператора на X , определенного элементом алгебры $U(\mathfrak{g})^K / (U(\mathfrak{g})\mathfrak{k})^K$.

Из полной приводимости линейных представлений группы K следует, что факторалгебра $U(\mathfrak{g})^K / (U(\mathfrak{g})\mathfrak{k})^K$ как фильтрованное векторное пространство совпадает с $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\mathfrak{k})^K$ и что соответствующее градуированное векторное пространство совпадает с $(\text{gr}(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\mathfrak{k}))^K$. В силу теоремы Пуанкаре–Биркгофа–Витта пространство $\text{gr}(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\mathfrak{k})$ канонически изоморфно $S(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$. Следовательно, подпространство его K -инвариантных элементов канонически изоморфно $S(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^K$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Однородное пространство $X = G/K$ называется *коммутативным*, если алгебра $\mathcal{D}(X)^G$ коммутативна.

ТЕОРЕМА 1 [16], [17]. *Однородное пространство $X = G/K$ коммутативно тогда и только тогда, когда (G, K) – пара Гельфанда.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $\xi \in \mathfrak{g}$ рассмотрим формальный левоинвариантный дифференциальный оператор

$$\text{Exp } t\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \xi^n}{n!}$$

на группе G . Для аналитической функции φ справедливо равенство

$$((\text{Exp } t\xi)\varphi)(x) = \varphi(x(\exp t\xi))$$

в том смысле, что для любого $x \in G$ и любого достаточно близкого к нулю $t \in \mathbb{R}$ ряд, стоящий в левой части, сходится и его сумма равна правой части.

Далее, для любого элемента $u \in U(\mathfrak{g})$ обозначим через $u^\natural$ результат его усреднения по присоединенному действию группы K и положим

$$(\text{Exp } t\xi)^\natural = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n (\xi^n)^\natural}{n!}.$$

Для аналитической функции φ , правоинвариантной относительно K , в том же смысле, что и выше, справедливо равенство

$$((\text{Exp } t\xi)^\natural \varphi)(x) = \int_K \varphi(xk(\exp t\xi)) dk.$$

Следовательно, для любых $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$

$$((\text{Exp } t\xi)^\natural (\text{Exp } s\eta)^\natural \varphi)(x) = \int_K \varphi_x((\exp t\xi)k(\exp s\eta)) dk, \quad (15)$$

где

$$\varphi_x(y) = \int_K \varphi(xky) dk.$$

Отметим, что функция φ_x двусторонне инвариантна относительно K .

В частности, если функция φ двусторонне инвариантна относительно K , то, полагая в (15) $x = e$, получаем следующее выражение для интеграла (12) при $g = \exp t\xi$, $h = \exp s\eta$:

$$I(\varphi; g, h) = ((\text{Exp } t\xi)^\natural (\text{Exp } s\eta)^\natural \varphi)(e).$$

Если пространство X коммутативно, то операторы $(\text{Exp } t\xi)^\natural$ и $(\text{Exp } s\eta)^\natural$ коммутируют на X и, следовательно, $I(\varphi; g, h) = I(\varphi; h, g)$, т.е. (G, K) – пара Гельфанда.

Обратно, записывая равенство (15) в виде

$$((\text{Exp } t\xi)^\natural (\text{Exp } s\eta)^\natural \varphi)(x) = I(\varphi_x; \exp t\xi, \exp s\eta),$$

мы находим, что если (G, K) – пара Гельфанда, то операторы $(\text{Exp } t\xi)^\natural$ и $(\text{Exp } s\eta)^\natural$ коммутируют на X при любых t и s , а это означает, что операторы $(\xi^n)^\natural$ и $(\eta^m)^\natural$ коммутируют на X при любых n и m . Так как степени элементов из $\mathfrak{g}$ линейно порождают

алгебру $U(\mathfrak{g})$, то их усреднения по K линейно порождают подалгебру $U(\mathfrak{g})^K$. Следовательно, все операторы из $U(\mathfrak{g})^K$ коммутируют на X , т.е. пространство X коммутативно.

Дадим альтернативное доказательство теоремы в случае, когда $G \subset \mathrm{GL}(U)$ – линейная группа Ли.

Так как струи полиномиальных функций в любой точке могут быть произвольны, то при исследовании коммутативности дифференциальных операторов мы можем ограничиться рассмотрением их действия на полиномиальные функции. Далее, всякая полиномиальная функция при подходящем выборе полиномиального линейного представления может быть сделана линейной, т.е. линейной комбинацией матричных элементов этого представления. Посмотрим, как действуют инвариантные дифференциальные операторы на линейные функции.

Пусть $R: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ – полиномиальное линейное представление группы G и $\rho = dR: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ – соответствующее линейное представление ее касательной алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Представление ρ продолжается до представления обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$, которое мы будем обозначать той же буквой. Подалгебра $\rho(U(\mathfrak{g})) \subset \mathrm{L}(V)$ совпадает с определенной выше подалгеброй $A(R)$. Каждая линейная функция α на $A(R)$ определяет полиномиальную функцию $\hat{\alpha} = \alpha \circ R$ на группе G . Получаемые таким образом функции на G мы будем называть R -линейными.

Производная R -линейной функции $\hat{\alpha}(g) = \alpha(R(g))$ по направлению левоинвариантного векторного поля $g \mapsto g\xi$ равна $\alpha(R(g)\rho(\xi))$; в частности, это тоже R -линейная функция. Отсюда следует, что результат применения к функции $\hat{\alpha}(g)$ левоинвариантного дифференциального оператора, определяемого любым элементом $u \in U(\mathfrak{g})$, есть $\alpha(R(g)\rho(u))$.

Таким образом, действие левоинвариантных дифференциальных операторов в пространстве R -линейных функций описывается естественным линейным представлением T алгебры $A(R)$ в сопряженном пространстве $A(R)^*$, определяемым формулой

$$(T(a)\alpha)(x) = \alpha(xa) \quad (a, x \in A(R), \alpha \in A(R)^*).$$

Нас, однако, интересуют не все левоинвариантные дифференциальные операторы на G , а только правоинвариантные относительно K , т.е. определяемые элементами подалгебры $U(\mathfrak{g})^K \subset U(\mathfrak{g})$, и не все R -линейные функции, а только правоинвариантные относительно K , т.е. происходящие из таких же линейных функций на $A(R)$. Подалгебра $U(\mathfrak{g})^K$ при представлении ρ отображается на подалгебру

$$A(R)^K = \{a \in A(R) : aR(k) = R(k)a \ \forall k \in K\} \subset A(R).$$

Для любого $a \in A(R)^K$ положим

$$a^\sharp = \int_K aR(k) dk \in A(R)^{K \times K}.$$

Очевидно, что оператор $T(a^\sharp)$ действует в подпространстве K -инвариантных линейных функций так же, как $T(a)$; с другой стороны, он аннулирует дополнительное K -инвариантное подпространство. Поэтому коммутативность операторов из $U(\mathfrak{g})^K$ на пространстве K -инвариантных R -линейных функций равносильна коммутативности алгебры $A(R)^{K \times K}$.

Ввиду предложения 6 мы можем теперь заключить, что коммутативность однородного пространства $X = G/K$ равносильна тому, что (G, K) – пара Гельфанда.

СЛЕДСТВИЕ. *Всякое слабое симметрическое однородное пространство коммутативно.*

Этот факт был доказан (другим способом) А. Сельбергом в [4]. Обратное утверждение неверно. Примеры коммутативных однородных пространств, не являющихся слабо симметрическими, будут приведены в §4 главы II настоящей статьи. Первые примеры такого рода были построены в [18].

§ 3. Сферические однородные пространства редуктивных групп

1. Линейная группа Ли $G \subset \mathrm{GL}(U)$, имеющая конечное число связных компонент, называется *редуктивной*, если она вполне приводима или, что эквивалентно [19], если ее касательная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ есть прямая сумма полупростой алгебры Ли (совпадающей с коммутантом $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ алгебры $\mathfrak{g}$) и коммутативной алгебры Ли, состоящей из полупростых линейных операторов (совпадающей с центром $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ алгебры $\mathfrak{g}$).

В этом определении пространство U и группа G могут быть вещественными или комплексными. Для наших ближайших целей мы будем иметь в виду вещественный вариант.

Назовем *алгеброй (комплексных) полиномиальных функций* на G и обозначим через $\mathbb{C}[G]$ алгебру комплексных функций на группе G , порожденную матричными элементами ее тавтологического линейного представления в пространстве U и функцией $(\det g)^{-1}$. (Подчеркнем, что U – вещественное векторное пространство.) Конечномерное комплексное линейное представление $R: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ назовем *полиномиальным*, если его матричные элементы принадлежат алгебре $\mathbb{C}[G]$. Известно [19], что всякое полиномиальное линейное представление редуктивной группы вполне приводимо.

Пусть $K \subset G$ – компактная подгруппа и $X = G/K$. Алгебру

$$\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[G]^K = \{\varphi \in \mathbb{C}[G] : \varphi(gk) = \varphi(g) \quad \forall g \in G, k \in K\}$$

будем называть *алгеброй (комплексных) полиномиальных функций* на однородном пространстве X . Так как орбиты компактной линейной группы разделяются полиномиальными инвариантами [1], то алгебра $\mathbb{C}[X]$ разделяет точки многообразия X . Естественное линейное представление группы G в пространстве $\mathbb{C}[X]$ разлагается в сумму неприводимых конечномерных представлений, сопряженных полиномиальным представлениям (ср. рассуждение в §2).

Для однородных пространств редуктивных групп свойство коммутативности особенно просто интерпретируется в терминах конечномерных линейных представлений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Однородное пространство $X = G/K$ редуктивной группы G называется *сферическим*, если представление группы G в пространстве $\mathbb{C}[X]$ имеет простой спектр (т.е. его неприводимые компоненты попарно не изоморфны).

Следующее предложение есть частный случай двойственности Фробениуса.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Однородное пространство $X = G/K$ редуктивной группы G является сферическим тогда и только тогда, когда для любого неприводимого полиномиального комплексного линейного представления $R: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ подпространство $V^K \subset V$ не более чем одномерно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждый вектор $v \in V^K$ порождает G -эквивариантное линейное отображение

$$V^* \rightarrow \mathbb{C}[X], \quad \alpha \mapsto (gK \mapsto \alpha(R(g)v)),$$

и, наоборот, всякое G -эквивариантное линейное отображение из V^* в $\mathbb{C}[X]$ получается таким образом. Следовательно, кратность вхождения R^* в представление $G : \mathbb{C}[X]$ равна $\dim V^K$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Однородное пространство $X = G/K$ редуктивной группы G является сферическим тогда и только тогда, когда оно коммутативно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого полиномиального комплексного линейного представления $R: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ обозначим через $A(R)$ (комплексную) линейную оболочку операторов представления. Если R неприводимо, то по теореме Бернсайда $A(R) = \mathrm{L}(V)$. В общем случае $A(R) \simeq A(R_1) \oplus \cdots \oplus A(R_s)$, где $R_1, \dots, R_s$ – все (попарно не изоморфные) неприводимые представления, входящие в R .

Из теоремы 1 и предложения 6 следует, что пространство X коммутативно тогда и только тогда, когда для любого полиномиального линейного представления $R: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ алгебра $A(R)^{K \times K}$ коммутативна. В силу предыдущего достаточно рассматривать только неприводимые представления; но если R неприводимо, то

$$A(R)^{K \times K} = \mathrm{L}(V)^{K \times K} \simeq \mathrm{L}(V^K),$$

так что коммутативность алгебры $A(R)^{K \times K}$ равносильна тому, что $\dim V^K \leq 1$.

СЛЕДСТВИЕ. *Всякое слабо симметрическое (и, тем более, всякое симметрическое) однородное пространство редуктивной группы является сферическим.*

Как уже упоминалось в §2, сферичность компактных симметрических пространств была доказана Э. Картаном и, затем, более общим методом, И.М. Гельфандом. В простейшем случае двумерной сферы $S^2 = \mathrm{SO}_3/\mathrm{SO}_2$ она была известна много раньше благодаря сферическим функциям Лапласа, применявшимся в математической физике. Отсюда и происходит термин “сферические однородные пространства”.

2. В теории алгебраических групп и теории инвариантов сферические однородные пространства обычно трактуются несколько иначе. Пусть редуктивная комплексная алгебраическая группа G действует на неприводимом аффинном комплексном алгебраическом многообразии X . Действие $G : X$ называется *сферическим*, если естественное линейное представление $G : \mathbb{C}[X]$ имеет простой спектр. В случае, когда $X = G/H$, где H – редуктивная алгебраическая подгруппа группы G , это свойство эквивалентно тому, что $\dim V^H \leq 1$ для любого неприводимого линейного представления $R: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$. Если это выполнено, то однородное пространство G/H , а также подгруппа H называются *сферическими*.

Покажем, как связаны между собой эти два подхода. Пусть $G \subset \mathrm{GL}(U)$ – редуктивная вещественная линейная группа Ли, K – ее компактная подгруппа и $X = G/K$. Обозначим через $G^a(\mathbb{C})$ замыкание по Зарисскому группы G в группе $\mathrm{GL}(U(\mathbb{C}))$, где $U(\mathbb{C})$ – комплексификация пространства U . Это редуктивная алгебраическая группа; ее касательная алгебра $\mathfrak{g}^a(\mathbb{C})$ содержит комплексификацию $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$ алгебры $\mathfrak{g}$ и имеет такой же коммутант, что и $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$ [1]. Структурная алгебра $\mathbb{C}[G^a(\mathbb{C})]$ группы $G^a(\mathbb{C})$

путем ограничения функций изоморфна алгебре $\mathbb{C}[G]$. Условимся отождествлять эти алгебры. Пусть, далее, $K(\mathbb{C})$ – замыкание по Зарисскому группы K в $\mathrm{GL}(U(\mathbb{C}))$. Это редуктивная алгебраическая подгруппа группы $G^a(\mathbb{C})$. Так как группа K алгебраична [1], то касательная алгебра группы $K(\mathbb{C})$ совпадает с комплексификацией $\mathfrak{k}(\mathbb{C})$ алгебры $\mathfrak{k}$.

Рассмотрим (аффинное) алгебраическое многообразие $X^a(\mathbb{C}) = G^a(\mathbb{C})/K(\mathbb{C})$. Его структурная алгебра $\mathbb{C}[X^a(\mathbb{C})] = \mathbb{C}[G^a(\mathbb{C})]^{K(\mathbb{C})}$ совпадает с алгеброй $\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[G]^K$, и представления групп G и $G^a(\mathbb{C})$ в этой алгебре имеют одни и те же инвариантные подпространства. Кроме того, если многообразие X связно, то алгебраическое многообразие $X^a(\mathbb{C})$ неприводимо. Следовательно, однородное пространство $X = G/K$ является сферическим в смысле определения 5 тогда и только тогда, когда однородное пространство $X^a(\mathbb{C}) = G^a(\mathbb{C})/K(\mathbb{C})$ является сферическим в смысле теории алгебраических групп.

3. В оставшейся части этого параграфа мы будем говорить в основном о сферических однородных пространствах в смысле теории алгебраических групп.

Имеется следующий геометрический критерий сферичности.

ТЕОРЕМА 2 [20]. *Действие редуктивной алгебраической группы G на неприводимом аффинном многообразии X является сферическим тогда и только тогда, когда борелевская подгруппа B группы G имеет в X открытую орбиту.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть многообразие X не сферично, и пусть W_1 и W_2 – два минимальных инвариантных подпространства алгебры $\mathbb{C}[X]$, изоморфных как G -модули. Тогда W_1 и W_2 изоморфны и как G^0 -модули и, следовательно, содержат непропорциональные функции, являющиеся весовыми векторами для борелевской подгруппы B с одним и тем же весом. Отношение этих функций является B -инвариантной рациональной функцией, которая не позволяет группе B иметь открытую орбиту в X .

Обратно, пусть группа B не имеет открытой орбиты в X . Тогда по теореме Розенлихта [2] существует не постоянная B -инвариантная рациональная функция φ на X . Представим ее в виде отношения полиномиальных функций: $\varphi = \varphi_1/\varphi_2$, $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{C}[X]$. Наименьшее B -инвариантное подпространство, содержащее φ_1 , конечномерно, и в нем должен быть весовой вектор для B . Пусть это будет $\sum_i c_i b_i \varphi_1$ ($c_i \in \mathbb{C}$, $b_i \in B$). Так как $\varphi_1/\varphi_2 = b_i \varphi_1/b_i \varphi_2$ при всех i , то

$$\varphi = \frac{\sum_i c_i b_i \varphi_1}{\sum_i c_i b_i \varphi_2}.$$

Знаменатель этой дроби автоматически является весовым вектором для B , имеющим тот же вес, что и числитель. Таким образом, можно считать, что φ_1 и φ_2 – весовые векторы одного веса для подгруппы B ; но тогда порождаемые ими G^0 -инвариантные подпространства изоморфны как G^0 -модули. Это уже доказывает, что многообразие X не сферично относительно группы G^0 .

Для того чтобы доказать, что многообразие X не сферично относительно всей группы G (если последняя не связна), заметим, что для любого n функции

$$\varphi_1^n, \varphi_1^{n-1}\varphi_2, \dots, \varphi_1\varphi_2^{n-1}, \varphi_2^n$$

также являются весовыми векторами одного веса для борелевской подгруппы B . Покажем, что они линейно независимы. В самом деле, пусть

$$a_0\varphi_1^n + a_1\varphi_1^{n-1}\varphi_2 + \dots + a_{n-1}\varphi_1\varphi_2^{n-1} + a_n\varphi_2^n = 0$$

– нетривиальная линейная зависимость. Можно считать, что $a_0 \neq 0$. Пусть λ – какой-нибудь корень многочлена $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$. Тогда из отсутствия делителей нуля в $\mathbb{C}[X]$ следует, что $\varphi_1 - \lambda\varphi_2 = 0$, но это противоречит тому, что функция φ не постоянна.

Из этого следует, что кратности неприводимых представлений группы G^0 в представлении $G^0 : \mathbb{C}[X]$ не ограничены. С другой стороны, число неприводимых представлений группы G , содержащих данное неприводимое представление R_0 группы G^0 , не превосходит индекса $[G : G^0]$, так как все они являются неприводимыми компонентами представления группы G , индуцированного представлением R_0 . Следовательно, среди неприводимых компонент представления $G : \mathbb{C}[X]$ должны быть изоморфные.

Наличие открытой орбиты борелевской подгруппы в X равносильно тому, что сама группа G имеет в X открытую орбиту и если H – стабилизатор подходящей точки этой орбиты, то

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{b}. \quad (16)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Свойство однородного пространства G/H быть сферическим является локальным, т.е. зависит только от алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и ее подалгебры $\mathfrak{h}$.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Однородное пространство G/H связной редуктивной группы G является сферическим тогда и только тогда, когда таковым является однородное пространство $(G/Z)/H$, где Z – центр группы G .*

Таким образом, описание сферических однородных пространств сводится к случаю, когда группа G связна и полупроста.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Если однородное пространство G/H является сферическим и $F \subset G$ – редуктивная подгруппа, содержащая H , то однородное пространство F/H также является сферическим.*

4. Пусть $N(H)$ (соответственно $Z(H)$) обозначает нормализатор (соответственно централизатор) подгруппы H в группе G . Известно, что если группа H редуктивна, то группы $N(H)$ и $Z(H)$ также редуктивны, причем $N(H)$ является конечным расширением подгруппы $HZ(H)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. *Если $X = G/H$ – сферическое однородное пространство, то группа $N(H)/H$ абелева (и, значит, является прямым произведением (алгебраического) тора и конечной абелевой группы).*

(Ср. предложение 2.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группа $N(H)/H$ действует на $G/H = X$ правыми умножениями. Это действие перестановочно с действием группы G . Рассмотрим возникающее при этом линейное представление группы $N(H)/H$ в $\mathbb{C}[X]$. Так как представление $G : \mathbb{C}[X]$ имеет простой спектр, то группа $N(H)/H$ обязана переводить каждую его неприводимую компоненту в себя и действовать на ней скалярно. Следовательно, эта группа абелева.

Предположим, что группы G и H связны. При этом условии назовем сферическое пространство G/H *насыщенным*, а сферическую подгруппу $H \subset G$ – *насыщенной*

подгруппой, если группа $N(H)/H$ конечна. Легко видеть, что если G/H – любое сферическое пространство, то $G/N(H)^0$ – насыщенное сферическое пространство; назовем его *насыщением* пространства G/H . Из предложения 10 следует, что подгруппа H является (почти прямым) произведением коммутанта группы $N(H)^0$ и некоторого подтора ее центра.

Далее, если группа G проста, то ее присоединенное представление неприводимо и, значит, для любой сферической подгруппы H имеет место неравенство $\dim \mathfrak{g}^H \leq 1$; в частности, центр подгруппы H не более чем одномерен.

5. К числу сферических однородных пространств относятся все комплексные симметрические однородные пространства редуктивных групп.

Пусть G – комплексная алгебраическая группа и H – ее редуктивная алгебраическая подгруппа. Тогда однородное пространство $X = G/H$ является аффинным алгебраическим многообразием [2]. Предположим, что оно неприводимо; тогда оно называется (*комплексным*) *симметрическим пространством*, а подгруппа H – *симметрической подгруппой* группы G , если существует такой инволютивный автоморфизм σ группы G , что $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^\sigma$. Комплексные симметрические пространства могут быть также определены и любым из способов, описанных в § 1.

Комплексные симметрические однородные пространства редуктивных групп – это в точности комплексификации компактных римановых симметрических пространств. В частности, отсюда следует, что они являются сферическими.

6. Все сферические однородные пространства простых алгебраических групп были найдены М. Кремером [21], а сферические однородные пространства непростых полупростых алгебраических групп – И. В. Микитюком [22] и М. Брионом [23]. Приведем здесь результаты этой классификации.

В таблице 1 перечислены все, с точностью до локального изоморфизма, сферические однородные пространства простых комплексных алгебраических групп, не являющиеся локально симметрическими. Во всех случаях, когда подгруппа H указана в виде $H_1 \times H_2$, пространство тавтологического линейного представления (классической) группы G разлагается в прямую сумму двух подпространств, на одном из которых действует H_1 , а на другом – H_2 .

Сферические пространства с номерами 1, 3, 6, 11 таблицы 1 не являются насыщенными. Насыщениями пространств с номерами 1, 6, 11 являются симметрические пространства; насыщением пространства № 3 является пространство № 2.

Очевидно, что прямое произведение

$$(G_1/H_1) \times (G_2/H_2) = (G_1 \times G_2)/(H_1 \times H_2)$$

сферических пространств G_1/H_1 и G_2/H_2 также является сферическим. Такие сферические пространства, а также локально изоморфные им назовем *приводимыми*. Сферическое пространство, насыщение которого неприводимо, назовем *строго неприводимым*.

В таблице 2 перечислены все, с точностью до локального изоморфизма, строго неприводимые сферические однородные пространства непростых полупростых комплексных алгебраических групп, не являющиеся локально симметрическими. В последнем столбце изображена схема, описывающая вложение группы H в G . Ее белые

ТАБЛИЦА 1
(Все группы – комплексные.)

	G	H
1	SL_n	$SL_m \times SL_{n-m} \ (m \neq n/2)$
2	SL_{2n+1}	$\mathbb{C}^* Sp_{2n}$
3	SL_{2n+1}	Sp_{2n}
4	Sp_n	$Sp_{n-2} \times SO_2$
5	SO_{2n+1}	GL_n
6	SO_{4n+2}	SL_{2n+1}
7	SO_{10}	$Spin_7 \times SO_2$
8	SO_9	$Spin_7$
9	SO_8	G_2
10	SO_7	G_2
11	E_6	$Spin_{10}$
12	G_2	SL_3

ТАБЛИЦА 2
(Все группы – комплексные.)

	G	H	Схема вложения
1	$SL_n \times SL_{n+1}$	$SL_n \times \mathbb{C}^*$	
2	$SL_n \times Sp_m$	$GL_{n-2} \times SL_2 \times Sp_{m-2}$	
3	$SL_n \times Sp_m \ (n \geq 5)$	$SL_{n-2} \times SL_2 \times Sp_{m-2}$	
4	$Sp_n \times Sp_m$	$Sp_{n-2} \times Sp_2 \times Sp_{m-2}$	
5	$Sp_n \times Sp_4$	$Sp_{n-4} \times Sp_4$	
6	$SO_n \times SO_{n+1}$	SO_n	
7	$Sp_n \times Sp_m \times Sp_l$	$Sp_{n-2} \times Sp_{m-2} \times Sp_{l-2} \times Sp_2$	
8	$Sp_n \times Sp_4 \times Sp_m$	$Sp_{n-2} \times Sp_2 \times Sp_2 \times Sp_{m-2}$	

вершины отвечают множителям группы G , а черные – множителям группы H . Порядок вершин такой же, как порядок соответствующих им множителей, за исключением строки 8, где верхняя черная вершина отвечает последнему множителю группы H . Множитель группы H , соответствующий черной вершине v , вкладывается диагональным образом в произведение тех множителей группы G , которые соответствуют белым вершинам, соединенным с v . (Множитель вида Sp_{n-2} группы H при $n = 2$ исчезает вместе с отвечающей ему черной вершиной.)

Все сферические пространства таблицы 2, кроме пространства № 3, являются насыщенными. Насыщением пространства № 3 является пространство № 2.

Заметим, что пример 3 § 1 есть первый член серии сферических однородных пространств $(\mathrm{SO}_n \times \mathrm{SO}_{n+1})/\mathrm{SO}_n$, получаемый при $n = 3$.

7. По аналогии с определением риманова слабо симметрического пространства можно дать определение комплексного слабо симметрического пространства. Возьмем, например, за основу свойство (WS1) из предложения 1.

Пусть G – комплексная алгебраическая группа и H – ее редуктивная алгебраическая подгруппа. Предположим, что (аффинное) однородное пространство $X = G/H$ неприводимо. Назовем его (*комплексным*) *слабо симметрическим пространством*, если существует такой автоморфизм s многообразия X , что $sGs^{-1} = G$ и условие (7) выполнено для всех пар (x, y) “общего положения”, т.е. для всех пар открытого по Зарисскому подмножества в $X \times X$. Нетрудно доказать, что всякое комплексное симметрическое пространство является слабо симметрическим. (Однако это было бы неверно, если бы мы потребовали, чтобы условие (7) было выполнено для всех x, y .)

Аналогично лемме 1 можно доказать, что эквивалентность относительно группы G в условии (7) может быть заменена эквивалентностью относительно G^0 . Отсюда, в частности, следует, что всякое слабо симметрическое однородное пространство группы G является слабо симметрическим и относительно G^0 .

Кроме того, очевидно, что если $X = G/H$ – слабо симметрическое пространство и Z – центр группы G , то $X/Z = (G/Z)/H$ – также слабо симметрическое пространство.

Так же, как в доказательстве предложения 1, устанавливается, что однородное пространство $X = G/H$ является слабо симметрическим тогда и только тогда, когда существует такой автоморфизм σ группы G , что $\sigma(H) = H$ и

$$\sigma(g) \in Hg^{-1}H \quad (17)$$

для всех g из некоторого плотного открытого подмножества группы G .

8. Следующее предложение является вариацией на тему предложений 4, 6 и 9.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. *Всякое комплексное слабо симметрическое однородное пространство редуктивной алгебраической группы является сферическим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменяя группу G на ее связную компоненту и профакторизовав по центру, можно свести доказательство к случаю, когда группа G связна и полупроста.

При этих предположениях пусть σ – автоморфизм группы G , удовлетворяющий условию (17). Докажем, что для любого неприводимого представления $R: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ алгебра $A(R)^{H \times H}$ коммутативна, откуда и будет следовать, что пространство $X = G/H$ является сферическим (ср. доказательство предложения 9).

Существует конечное расширение $\widehat{G}$ группы G , в котором автоморфизм σ является внутренним, и существует ортогональное представление $\widehat{S}: \widehat{G} \rightarrow \mathrm{GL}(W)$ группы $\widehat{G}$, ограничение которого на G содержит представление R . Обозначим это ограничение через S , и пусть $A(S)$ – линейная оболочка операторов из $S(G)$. Автоморфизм σ индуцирует автоморфизм алгебры $A(S)^{H \times H}$, который ввиду (17) совпадает с транспонированием (относительно инвариантной симметрической билинейной формы). Следовательно, алгебра $A(S)^{H \times H}$ и, тем более, ее подалгебра $A(R)^{H \times H}$ коммутативны.

9. Имеет место обращение предложения 11, причем даже в более точной форме. Для того чтобы его сформулировать, введем некоторые понятия.

Пусть G – связная редуктивная комплексная алгебраическая группа. Инволютивный автоморфизм группы G называется *инволюцией Вейля*, если он действует как инверсия на некотором максимальном торе группы G . Известно, что инволюции Вейля существуют, и все они сопряжены при помощи внутренних автоморфизмов.

Если θ – инволюция Вейля, то для любого линейного представления R группы G представление $R^\theta = R \circ \theta$ (в том же пространстве) изоморфно представлению R^* , сопряженному (= дуальному) R .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. *Если инволюция Вейля θ группы G сохраняет сферическую подгруппу H , то она действует на $N(H)/H$ как инверсия.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X = G/H$ и $\mathfrak{R}$ – множество неприводимых представлений группы G , входящих в разложение представления $G: \mathbb{C}[X]$. Для всякого $R \in \mathfrak{R}$ обозначим через $V(R)$ то единственное подпространство в $\mathbb{C}[X]$, на котором реализуется представление R . Тогда

$$\mathbb{C}[X] = \bigoplus_{R \in \mathfrak{R}} V(R). \quad (18)$$

Группа $N(H)/H$ действует на каждом из подпространств $V(R)$ умножением на некоторый характер χ_R (см. доказательство предложения 10).

Известно [24], что если $R \in \mathfrak{R}$, то и $R^* \in \mathfrak{R}$, причем G -инвариантное спаривание между $V(R)$ и $V(R^*)$ может быть определено как проекция произведения функций на компоненту разложения (18), отвечающую тривиальному представлению (т.е. на пространство констант). Отсюда следует, что это спаривание инвариантно также относительно $N(H)/H$ и, значит,

$$\chi_{R^*} = \chi_R^{-1}. \quad (19)$$

Автоморфизм многообразия X , определяемый инволюцией θ , переставляет подпространства $V(R)$ и $V(R^*)$. Поэтому из (19) следует, что θ действует на $N(H)/H$ как инверсия.

10. Будем называть инволюцию Вейля группы G *согласованной* с редуктивной подгруппой H , если она сохраняет H и индуцирует на H^0 инволюцию Вейля.

ТЕОРЕМА 3 [25]. *Пусть $X = G/H$ – сферическое однородное пространство связной редуктивной комплексной алгебраической группы G . Тогда*

- 1) *существует инволюция Вейля группы G , согласованная с H ;*
- 2) *пространство X является слабо симметрическим относительно любой инволюции Вейля группы G , сохраняющей H .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Благодаря предложению 12 доказательство первой части теоремы сводится к случаю, когда группа H связна. Кроме того, путем несложных рассуждений, которые мы опустим, оно сводится к случаю, когда группа G проста.

Рассмотрим случай, когда H – связная симметрическая подгруппа, определяемая какой-то инволюцией σ группы G . Существует σ -инвариантный максимальный тор T группы G , содержащий максимальный тор подгруппы H , и σ -инвариантная борелевская подгруппа B , содержащая T [26] (см. также [27]). Более того, можно выбрать канонические образующие h_i, e_i, f_i ($i = 1, \dots, n$) алгебры Ли $\mathfrak{g}$, согласованные с T и B , таким образом, что автоморфизм σ будет действовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma(e_i) &= e_j, \quad \sigma(f_i) = f_j, \quad \text{если } \sigma(h_i) = h_j, \quad i \neq j, \\ \sigma(e_k) &= \varepsilon_k e_k, \quad \sigma(f_k) = \varepsilon_k f_k \quad (\varepsilon_k = \pm 1), \quad \text{если } \sigma(h_k) = h_k. \end{aligned} \quad (20)$$

Тогда инволюция Вейля группы G , действующая как инверсия на T и переводящая e_i в $-f_i$ (и f_i в $-e_i$), коммутирует с σ и, следовательно, сохраняет подгруппу H (и индуцирует на ней инволюцию Вейля).

Остается рассмотреть несимметрические сферические подгруппы простых групп. К сожалению, доказательство существования требуемой инволюции Вейля в этом случае, приведенное в [25], хотя и несложно, но использует классификацию этих подгрупп (содержащуюся в таблице 1). Было бы интересно придумать более концептуальное доказательство.

Пусть теперь θ – любая инволюция Вейля группы G , сохраняющая H , и f – определяемый ею автоморфизм многообразия X . Рассмотрим отображение

$$F: X \times X \rightarrow X \times X, \quad (x, y) \mapsto (fy, fx). \quad (21)$$

Это автоморфизм многообразия $X \times X$, нормализующий диагональное действие группы G . Слабая симметричность пространства X относительно θ означает, что F переводит в себя G -орбиты общего положения. Мы покажем, что F действует тривиально на алгебре $\mathbb{C}[X \times X]^G$ G -инвариантных полиномиальных функций на $X \times X$ и, тем самым, на категорном факторе $(X \times X) // G$, который по определению есть спектр этой алгебры. Так как категорный фактор разделяет замкнутые орбиты [2], а орбиты общего положения для действия G на $X \times X$ замкнуты [24], то отсюда будет следовать, что пространство X слабо симметрично относительно θ .

В обозначениях доказательства предложения 12 имеем:

$$\mathbb{C}[X \times X] = \mathbb{C}[X] \otimes \mathbb{C}[X] = \bigoplus_{R, S \in \mathfrak{R}} (V(R) \otimes V(S)),$$

откуда

$$\mathbb{C}[X \times X]^G = \bigoplus_{R \in \mathfrak{R}} \mathbb{C} \varepsilon_R,$$

где инвариант $\varepsilon_R \in V(R) \otimes V(R^*)$ строится по любым сопряженным базисам $\{e_i\}$ и $\{e_i^*\}$ пространств $V(R)$ и $V(R^*)$ по формуле

$$\varepsilon_R = \sum_i e_i \otimes e_i^*.$$

Из данного в доказательстве предложения 12 описания спаривания между $V(R)$ и $V(R^*)$ ясно, что оно инвариантно относительно f и, значит, $\{fe_i^*\}$ и $\{fe_i\}$ – также сопряженные базисы пространств $V(R)$ и $V(R^*)$. Следовательно,

$$F\varepsilon_R = \sum_i fe_i^* \otimes fe_i = \varepsilon_R.$$

11. Выведем из доказанной теоремы ее вещественный аналог, что даст нам обращение следствия предложения 9.

ТЕОРЕМА 4 [25]. *Всякое сферическое однородное пространство $X = G/K$ связанной редуktивной вещественной группы Ли G слабо симметрично.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать группу G связанной компонентой алгебраической группы. Рассмотрим комплексификацию $X(\mathbb{C}) = G(\mathbb{C})/K(\mathbb{C})$ пространства X . Согласно теореме 3 пространство $X(\mathbb{C})$ является слабо симметрическим относительно любой инволюции Вейля группы $G(\mathbb{C})$, сохраняющей $K(\mathbb{C})$. Покажем, что эту инволюцию можно выбрать так, чтобы она сохраняла G .

Пусть L – максимальная компактная подгруппа группы G , содержащая K , и σ – инволюция Картана относительно L , т.е. такой инволютивный автоморфизм группы G , что $L = G^\sigma$. Продолжим σ до инволютивного автоморфизма группы $G(\mathbb{C})$. Существуют канонические образующие h_i, e_i, f_i ($i = 1, \dots, n$) алгебры Ли $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$, на которые σ действует по формулам (20). Пусть θ – инволюция Вейля группы $G(\mathbb{C})$, действующая по формулам

$$\theta(h_i) = -h_i, \quad \theta(e_i) = -f_i, \quad \theta(f_i) = -e_i.$$

Тогда θ и σ перестановочны и

$$\mathfrak{g} = \{\xi \in \mathfrak{g}(\mathbb{C}) : \theta\sigma(\xi) = \bar{\xi}\},$$

где черта обозначает комплексное сопряжение относительно образующих h_i, e_i, f_i . Отсюда следует, что θ сохраняет G и L . Более того, так как картановская подалгебра $\langle h_1, \dots, h_n \rangle$ алгебры $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$ содержит картановскую подалгебру алгебры $\mathfrak{l}$, то θ индуцирует на L инволюцию Вейля. (Инволюции Вейля связных компактных групп Ли определяются аналогично инволюциям Вейля связных редуktивных комплексных алгебраических групп.) Заметим, что все указанные свойства инволюции θ сохраняются при ее сопряжении любым элементом из L .

Применим теперь теорему 3 к сферическому однородному пространству $L(\mathbb{C})/K(\mathbb{C})$. Мы получим, в частности, что существует инволюция Вейля θ_0 группы $L(\mathbb{C})$, сохраняющая $K(\mathbb{C})$. Ее ограничение на $K(\mathbb{C})$ сохраняет некоторую компактную вещественную форму группы $K(\mathbb{C})$; можно считать, что ею является K . Далее, инволюция θ_0 должна сохранять некоторую компактную вещественную форму группы $L(\mathbb{C})$, содержащую K ; можно считать, что ею является L .

Так как все инволюции Вейля группы L сопряжены, то можно считать, что $\theta|_L = \theta_0|_L$; тогда θ сохраняет G и K .

По теореме 3 пространство $X(\mathbb{C})$ слабо симметрично относительно θ . Это означает, что автоморфизм F многообразия $X(\mathbb{C})$, определенный по формуле (21), действует на $(X(\mathbb{C}) \times X(\mathbb{C}))/G(\mathbb{C})$ тривиально. Рассматривая $X(\mathbb{C}) \times X(\mathbb{C})$ как однородное

расслоение над $X(\mathbb{C}) = G(\mathbb{C})/K(\mathbb{C})$ со слоем $X(\mathbb{C})$, мы получаем естественный изоморфизм категорных факторов $(X(\mathbb{C}) \times X(\mathbb{C}))//G(\mathbb{C})$ и $X(\mathbb{C})//K(\mathbb{C})$. Аналогично, имеется естественный изоморфизм факторов $(X \times X)/G$ и X/K . Эти изоморфизмы включаются в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} (X \times X)/G & \xrightarrow{\sim} & X/K \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ (X(\mathbb{C}) \times X(\mathbb{C}))//G & \xrightarrow{\sim} & X(\mathbb{C})//K(\mathbb{C}) \end{array},$$

где φ и ψ индуцированы вложением $X \hookrightarrow X(\mathbb{C})$. При этом отображение φ перестановочно с действием F .

Так как группа K компактна, то ее орбиты в X разделяются полиномиальными инвариантами. Следовательно, отображение ψ , а значит, и отображение φ , инъективно. Но тогда F действует тривиально и на $(X \times X)/G$, а это и означает, что пространство X слабо симметрично относительно θ .

§ 4. Слабо коммутативные однородные пространства

1. Векторное пространство P с двумя билинейными операциями – умножением $(a, b) \mapsto ab$ и скобкой Пуассона $(a, b) \mapsto \{a, b\}$ называется *алгеброй Пуассона*, если выполнены следующие условия:

- 1) умножение коммутативно и ассоциативно;
- 2) скобка Пуассона антикоммутативна и удовлетворяет тождеству Якоби;
- 3) умножение и скобка Пуассона связаны тождеством Лейбница

$$\{a, bc\} = \{a, b\}c + b\{a, c\}.$$

Обычно алгебры Пуассона возникают следующим образом. Пусть $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A^{(n)}$ – фильтрованная ассоциативная алгебра, т.е. $A^{(m)}A^{(n)} \subset A^{(m+n)}$. Рассмотрим ассоциированную с ней (ассоциативную) градуированную алгебру

$$\text{gr } A = P = \bigoplus_{n=0}^{\infty} P_n, \quad P_n = A^{(n)}/A^{(n-1)}.$$

Предположим, что она коммутативна. Тогда в P можно определить еще одну операцию, называемую скобкой Пуассона, по правилу

$$\{a + A^{(m-1)}, b + A^{(n-1)}\} = ab - ba + A^{(m+n-2)}.$$

При этом $\{P_m, P_n\} \subset P_{m+n-1}$ и алгебра P с этими двумя операциями является алгеброй Пуассона.

Имея в виду эту конструкцию, можно сказать, что алгебра Пуассона – это “классический” объект, “квантовым” аналогом которого является некоммутативная ассоциативная алгебра.

В частности, алгебра Пуассона, ассоциированная с алгеброй $\mathcal{D}(X)$ дифференциальных операторов на многообразии X , – это алгебра $\mathcal{P}(T^*X)$ функций на кокасательном расслоении T^*X многообразия X , полиномиальных на слоях (см. § 2), с обычной операцией умножения и некоторой скобкой Пуассона. (См. об этом более подробно в п. 1.4 главы II.)

Алгебра Пуассона называется *коммутативной*, если скобка Пуассона любых двух ее элементов равна нулю. Очевидно, что алгебра Пуассона, ассоциированная с фильтрованной коммутативной ассоциативной алгеброй, коммутативна. (Обратное, конечно, неверно.)

2. Пусть G – вещественная группа Ли и K – ее компактная подгруппа. Как и выше, мы будем предполагать, что многообразие X связно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Однородное пространство $X = G/K$ называется *слабо коммутативным*, если алгебра Пуассона $\mathcal{P}(T^*X)^G$ коммутативна.

Напомним, что в силу предложения 7 алгебра $\mathcal{P}(T^*X)^G$ – это алгебра Пуассона, ассоциированная с алгеброй $\mathcal{D}(X)^G$ инвариантных дифференциальных операторов на X . Поэтому всякое коммутативное однородное пространство слабо коммутативно.

ТЕОРЕМА 5 [28], [22]. *Всякое слабо коммутативное однородное пространство редуктивной группы Ли коммутативно.*

Мы приведем доказательство этой теоремы в §3 следующей главы, а в §4 мы докажем аналогичную теорему для однородных пространств вида $(N \rtimes K)/K$, где N – (связная) нильпотентная группа Ли. По-видимому, вообще любое слабо коммутативное однородное пространство коммутативно. По крайней мере, автору не известно контрпримеров к этому утверждению.

3. Резюмируя эту главу, приведем схему включений рассмотренных классов однородных пространств.

Для однородных пространств редуктивных групп последние три класса совпадают между собой (и совпадают с классом сферических пространств).

Глава II. Коизотропные симплектические действия

Имея в виду, что нас в основном интересуют однородные пространства групп Ли (и их кокасательные расслоения), мы будем предполагать все рассматриваемые многообразия аналитическими, хотя многие из приведенных в этой главе определений и фактов имеют смысл и верны для дифференцируемых многообразий.

Все рассматриваемые функции и отображения предполагаются аналитическими или являются таковыми.

Если не будет оговорено противное, мы будем рассматривать одновременно вещественные и комплексные многообразия. В случае необходимости основное поле будет обозначаться через $\mathbb{F}$.

Допуская вольность речи, мы будем ради простоты выражений говорить о функциях на многообразии, имея в виду, как правило, функции, определенные на открытом подмножестве. Соответственно этому выражение “алгебра функций на многообразии M ” будет означать “пучок алгебр функций на M ”. То же относится и к тензорным полям.

§ 1. Симплектические и пуассоновы многообразия

Имеется много современных обзоров и монографий по симплектической геометрии и симплектическим действиям групп Ли. Из наиболее доступных русскому читателю упомянем обзоры [29] и [30] и книгу [31]. Нашей целью в этом и следующем параграфах будет лишь дать основные определения и сформулировать основные факты в удобной для нас форме и, в частности, фиксировать определения в случаях неоднозначности типа выбора знака.

1. Выпишем, прежде всего, некоторые основные формулы дифференциального исчисления на многообразиях.

Производная Li тензорного поля τ по направлению векторного поля ξ обозначается через $\xi \cdot \tau$. По определению

$$\xi \cdot \tau = \frac{d}{dt} g_t \tau \Big|_{t=0},$$

где g_t – (локальная) однопараметрическая группа преобразований с полем скоростей ξ . В частности, если φ – функция, то

$$\xi \cdot \varphi = -\partial_\xi \varphi,$$

где $\partial_\xi \varphi$ – обычная производная функции φ по направлению ξ ; если η – векторное поле, то

$$\xi \cdot \eta = [\xi, \eta],$$

где $[\xi, \eta]$ – коммутатор векторных полей ξ и η . Для любых векторных полей ξ, η и тензорного поля τ справедливо равенство

$$\xi \cdot (\eta \cdot \tau) - \eta \cdot (\xi \cdot \tau) = [\xi, \eta] \cdot \tau.$$

Однопараметрическая группа g_t с полем скоростей ξ сохраняет тензорное поле τ тогда и только тогда, когда $\xi \cdot \tau = 0$. В этом случае мы будем говорить, что векторное поле ξ аннулирует τ .

Если α – дифференциальная 1-форма, то

$$(d\alpha)(\xi, \eta) = \partial_\xi \alpha(\eta) - \partial_\eta \alpha(\xi) + \alpha([\xi, \eta]) \quad (22)$$

для любых векторных полей ξ, η ; если ω – дифференциальная 2-форма, то

$$\begin{aligned} (d\omega)(\xi, \eta, \zeta) = & \partial_\xi \omega(\eta, \zeta) + \partial_\eta \omega(\zeta, \xi) + \partial_\zeta \omega(\xi, \eta) \\ & + \omega([\xi, \eta], \zeta) + \omega([\eta, \zeta], \xi) + \omega([\zeta, \xi], \eta) \end{aligned} \quad (23)$$

для любых векторных полей ξ, η, ζ .

2. Пусть M – связное многообразие. Обозначим через $\mathcal{F}(M)$ алгебру функций на M и через $\mathcal{V}(M)$ – алгебру Ли векторных полей на M .

Всякое поле бивекторов B на M определяет скобку $\{\cdot, \cdot\}$ в $\mathcal{F}(M)$ по формуле

$$\{\varphi, \psi\} = B(d\varphi, d\psi). \quad (24)$$

Это антикоммутативная билинейная операция, удовлетворяющая тождеству Лейбница. Легко видеть, что и, наоборот, всякая операция с этими свойствами получается указанным способом.

Рассмотрим отображение

$$v: \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{V}(M), \quad \varphi \mapsto B(\cdot, d\varphi). \quad (25)$$

Оно может быть иначе определено свойством

$$v(\varphi) \cdot \psi = \{\varphi, \psi\}, \quad (26)$$

из чего ясно, что следующие условия эквивалентны:

- (P1) скобка $\{\cdot, \cdot\}$ удовлетворяет тождеству Якоби;
- (P2) отображение v является гомоморфизмом относительно скобки $\{\cdot, \cdot\}$ в $\mathcal{F}(M)$;
- (P3) для любой функции φ векторное поле $v(\varphi)$ является дифференцированием скобки $\{\cdot, \cdot\}$ или, что эквивалентно, аннулирует поле бивекторов B .

Многообразие M с полем бивекторов B , удовлетворяющим этим эквивалентным условиям, называется *пуассоновым многообразием*. Скобка $\{\cdot, \cdot\}$ в этом случае называется *скобкой Пуассона*. Алгебра $\mathcal{F}(M)$ со скобкой Пуассона в качестве второй операции является алгеброй Пуассона (см. определение в §4 главы I) и обозначается через $\mathcal{P}(M)$.

Векторные поля вида $v(\varphi)$ на пуассоновом многообразии M называются *гамильтоновыми*. Они образуют алгебру Ли, определяющую некоторую (псевдо)группу Ли автоморфизмов пуассоновой структуры на M . Орбиты этой группы называются *симплектическими слоями*. Касательное пространство симплектического слоя в точке $p \in M$ образовано значениями всех гамильтоновых векторных полей и совпадает с носителем бивектора B в этой точке.

Функции, постоянные на симплектических слоях, называются *функциями Казимира*. Они образуют ядро гомоморфизма v или, что то же, центр алгебры $\mathcal{P}(M)$ (относительно скобки Пуассона).

3. Если бивектор B невырожден в каждой точке, то можно вместо него рассматривать 2-форму $\omega = (B^\top)^{-1}$. Из (24) и (25) следует, что тогда

$$\{\varphi, \psi\} = \omega(v(\varphi), v(\psi)). \quad (27)$$

Подставляя в формулу (23) $\xi = v(\varphi)$, $\eta = v(\psi)$, $\zeta = v(\chi)$, получаем:

$$-d\omega(\xi, \eta, \zeta) = \{\{\varphi, \psi\}, \chi\} + \{\{\psi, \chi\}, \varphi\} + \{\{\chi, \varphi\}, \psi\},$$

так что тождество Якоби для скобки $\{\cdot, \cdot\}$ равносильно замкнутости формы ω .

Связное многообразие M с заданной на нем невырожденной замкнутой 2-формой ω называется *симплектическим многообразием*. В силу предыдущего симплектические многообразия – это частный случай пуассоновых многообразий.

Если M – симплектическое многообразие, то векторное поле $v(\varphi)$ ($\varphi \in \mathcal{F}(M)$) может быть определено равенством

$$\omega(v(\varphi), \eta) = \partial_\eta \varphi \quad (\eta \in \mathcal{V}(M)) \quad (28)$$

и по этой причине называется *косым градиентом* функции φ . Оно обычно обозначается через $\text{sgrad } \varphi$.

Каждому векторному полю ξ на симплектическом многообразии M поставим в соответствие 1-форму $\alpha = \omega(\xi, \cdot)$. С помощью формул (22) и (23) нетрудно доказать, что $\xi \cdot \omega = -d\alpha$. В частности, $\xi \cdot \omega = 0$ тогда и только тогда, когда форма α замкнута. В этом случае α локально представляется в виде $\alpha = d\varphi$, $\varphi \in \mathcal{F}(M)$, причем из (28) следует, что $\xi = v(\varphi)$. Таким образом, всякое векторное поле, аннулирующее форму ω , локально гамильтоново.

Так как на симплектическом многообразии значения гамильтоновых векторных полей в любой точке составляют все касательное пространство, то ядро гомоморфизма v состоит только из констант. Это означает, что функция φ , для которой $v(\varphi) = \xi$, определяется векторным полем ξ однозначно с точностью до аддитивной константы. Всякая такая функция φ называется *гамильтонианом* поля ξ .

Простейшим примером симплектического многообразия является симплектическое векторное пространство (с постоянной 2-формой). По теореме Дарбу всякое симплектическое многообразие локально изоморфно симплектическому векторному пространству.

Симплектические слои произвольного пуассонова многообразия M имеют естественную симплектическую структуру. При этом скобка Пуассона любых двух функций на M может вычисляться “послойно”, т.е. ее ограничение на любой симплектический слой совпадает со скобкой Пуассона ограничений этих функций на данный слой.

4. В §4 главы I была определена пуассонова структура на кокасательном расслоении T^*X произвольного многообразия X . Опишем ее более явно.

Сделаем, прежде всего, замечание, касающееся выбора знака. А именно, будем считать, что изоморфизм между алгебрами $\text{gr } \mathcal{D}(X)$ и $\mathcal{P}(T^*X)$ установлен таким образом, что векторное поле ξ на X , рассматриваемое как линейная функция на T^*X , отвечает в алгебре $\text{gr } \mathcal{D}(X)$ дифференцированию Ли по направлению ξ , т.е. обычному дифференцированию по направлению ξ , взятому со знаком минус.

Ввиду тождества Лейбница достаточно знать скобку Пуассона функций, постоянных на слоях канонического отображения $p: T^*X \rightarrow X$, и функций, линейных на слоях. Функции, постоянные на слоях, – это функции вида $p^*\varphi$, где $\varphi \in \mathcal{F}(X)$. Им соответствуют операторы умножения на функцию. Функции, линейные на слоях, – это векторные поля на X . Им соответствуют дифференциальные операторы первого порядка, описанные выше. Рассматривая коммутаторы этих дифференциальных операторов, получаем следующие формулы:

$$\{p^*\varphi, p^*\psi\} = 0 \quad (\varphi, \psi \in \mathcal{F}(X)), \quad (29)$$

$$\{p^*\varphi, \eta\} = p^*(\partial_\eta \varphi) \quad (\varphi \in \mathcal{F}(X), \eta \in \mathcal{V}(X)), \quad (30)$$

$$\{\xi, \eta\} = [\xi, \eta] \quad (\xi, \eta \in \mathcal{V}(X)). \quad (31)$$

Найдем теперь гамильтоновы векторные поля на T^*X , отвечающие функциям рассматриваемого вида.

Можно выделить два класса векторных полей на T^*X . Во-первых, это *вертикальные* векторные поля, касающиеся слоев отображения p . Во-вторых, всякое преобразование многообразия X каноническим образом поднимается до преобразования многообразия T^*X и в соответствии с этим каждое векторное поле $\xi \in \mathcal{V}(X)$ каноническим образом поднимается до векторного поля $\widehat{\xi} \in \mathcal{V}(T^*X)$; при этом $[\widehat{\xi}, \widehat{\eta}] = \widehat{[\xi, \eta]}$. Получаемые таким образом векторные поля на T^*X будем называть *структурными*.

Согласно определению (26) из формул (29)–(31) вытекает, что

$$v(p^*\varphi) = -d\varphi, \quad (32)$$

$$v(\xi) = \widehat{\xi}. \quad (33)$$

(Здесь $d\varphi$ – вертикальное векторное поле, равное $d_x\varphi$ во всех точках слоя $T_x(X)$.)

Мы видим, в частности, что гамильтоновы векторные поля порождают касательное пространство в каждой точке многообразия T^*X . Следовательно, рассматриваемая пуассонова структура на самом деле является симплектической. Пользуясь формулой (27), из формул (29)–(33) получаем следующее описание соответствующей 2-формы ω :

$$\omega(\gamma, \delta) = 0, \quad (34)$$

$$\omega(\widehat{\xi}, \delta) = \delta(\xi), \quad (35)$$

$$\omega(\widehat{\xi}, \widehat{\eta}) = [\xi, \eta] \quad (36)$$

для любых вертикальных векторных полей γ, δ и структурных векторных полей $\widehat{\xi}, \widehat{\eta}$.

5. Другая важная конструкция пуассоновых многообразий связана с рассмотрением естественной фильтрации

$$U(\mathfrak{g}) = \bigcup_{n=0}^{\infty} U^{(n)}(\mathfrak{g})$$

в обертывающей алгебре $U(\mathfrak{g})$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (см. п. 2.5 главы I).

Градуированная алгебра, ассоциированная с этой фильтрацией алгебры $U(\mathfrak{g})$, есть симметрическая алгебра $S(\mathfrak{g})$ с естественной градуировкой

$$S(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S^n(\mathfrak{g}).$$

Так как она коммутативна, то операция коммутирования в $U(\mathfrak{g})$ порождает в ней скобку Пуассона, превращающую ее в градуированную алгебру Пуассона

$$P(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} P_n(\mathfrak{g}).$$

Мы будем называть эту алгебру Пуассона *алгеброй Пуассона–Ли–Березина*.

Так как $P(\mathfrak{g})$ порождается (в смысле операции умножения) подпространством $P_1(\mathfrak{g}) = S^1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$, то для описания скобки Пуассона в ней достаточно указать скобку Пуассона любых элементов $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$. Из определения очевидно, что

$$\{\xi, \eta\} = [\xi, \eta]. \quad (37)$$

Отождествим алгебру $S(\mathfrak{g})$ с алгеброй $\mathbb{F}[\mathfrak{g}^*]$ полиномиальных функций на сопряженном пространстве $\mathfrak{g}^*$ алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда определенная выше скобка Пуассона превращает $\mathfrak{g}^*$ в пуассоново многообразие. Из (37) следует, что

$$\{\varphi, \psi\} = [d\varphi, d\psi] \quad (38)$$

для любых функций φ, ψ на $\mathfrak{g}^*$.

Из формул (26) и (37) следует, что гамильтоново векторное поле $v(\xi)$ на $\mathfrak{g}^*$, отвечающее элементу $\xi \in \mathfrak{g}$ как линейной функции на $\mathfrak{g}^*$, имеет вид

$$v(\xi)(\alpha) = \text{ad}^*(\xi)\alpha \quad (\alpha \in \mathfrak{g}^*), \quad (39)$$

где ad^* обозначает коприсоединенное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Иначе говоря, $v(\xi)$ – это поле скоростей коприсоединенного представления. Любое гамильтоново векторное поле является линейной комбинацией полей $v(\xi)$, $\xi \in \mathfrak{g}$, с функциональными коэффициентами. Отсюда следует, что симплектические слои пуассонова многообразия $\mathfrak{g}^*$ – это орбиты коприсоединенной группы.

В силу (27), (37) и (39) симплектическая структура на коприсоединенной орбите задается формой ω , определяемой в точке $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ по формуле

$$\omega(\text{ad}^*(\xi)\alpha, \text{ad}^*(\eta)\alpha) = \alpha([\xi, \eta]). \quad (40)$$

Эта форма называется *формой Костанта–Кириллова*.

6. Пуассонову структуру (в отличие от симплектической) можно факторизовать по действию группы.

Пусть M – пуассоново многообразие, и пусть задано действие группы Ли H на M , сохраняющее пуассонову структуру. Предположим, что существуют многообразие $N = M/H$ и отображение $\pi = \pi_H: M \rightarrow N$ (которое мы будем называть *факторизацией*) со следующими свойствами:

- 1) слои π – это в точности орбиты группы H ;
- 2) подмножество $U \subset N$ открыто тогда и только тогда, когда подмножество $\pi^{-1}(U) \subset M$ открыто;
- 3) функция φ на N аналитична тогда и только тогда, когда функция $\pi^*\varphi$ на M аналитична.

Тогда π^* осуществляет изоморфизм алгебры $\mathcal{F}(N)$ аналитических функций на N и алгебры $\mathcal{F}(M)^H$ H -инвариантных аналитических функций на M . (Напомним, что согласно нашей договоренности выражение “алгебра функций” – это эвфемизм, заменяющий выражение “пучок алгебр функций”.) Поскольку алгебра $\mathcal{F}(M)^H = \mathcal{P}(M)^H$ есть подалгебра алгебры $\mathcal{P}(M)$, это наделяет алгебру $\mathcal{F}(N)$ структурой алгебры Пуассона и, тем самым, определяет пуассонову структуру на многообразии N . Соответствующее поле бивекторов есть просто (корректно определенный) образ поля бивекторов, определяющего пуассонову структуру на M .

Невырожденность пуассоновой структуры, вообще говоря, не сохраняется при факторизации. Это, в частности, будет хорошо видно на приводимом ниже примере.

Пусть G – связная группа Ли. Будем считать, что она действует на себе правыми сдвигами. Это действие индуцирует действие $G : T^*G$, сохраняющее каноническую симплектическую структуру кокасательного расслоения. Отображение

$$\pi : T^*G \rightarrow \mathfrak{g}^*,$$

ставящее в соответствие каждой линейной форме $\alpha \in T_g^*(G)$ ее сдвиг в единицу группы G , является факторизацией в определенном выше смысле. Тем самым, на $\mathfrak{g}^*$ индуцируется пуассонова структура.

Докажем, что эта структура совпадает с пуассоновой структурой на $\mathfrak{g}^*$, определенной в п. 5. Для этого достаточно проверить совпадение скобок Пуассона линейных функций, т.е. элементов алгебры $\mathfrak{g}$.

Для любой функции φ на $\mathfrak{g}^*$ обозначим через $\varphi^{(r)}$ правоинвариантную функцию на T^*G , ограничение которой на $T_e^*(G) = \mathfrak{g}^*$ совпадает с φ . При $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ в силу (31) получаем:

$$\{\xi, \eta\} = \{\xi^{(r)}, \eta^{(r)}\}(e) = [\xi^{(r)}, \eta^{(r)}](e) = [\xi, \eta],$$

что согласуется с (37).

Теперь мы в состоянии вычислить скобку Пуассона любых правоинвариантных функций на T^*G . А именно, согласно (38) имеем

$$\{\varphi^{(r)}, \psi^{(r)}\} = [d\varphi, d\psi]^{(r)}. \quad (41)$$

Более подробно,

$$\{\varphi^{(r)}, \psi^{(r)}\}(\alpha) = \alpha([d_\alpha \varphi, d_\alpha \psi]) \quad (42)$$

для любого $\alpha \in \mathfrak{g}^*$.

Такая же формула, но со знаком минус имеет место для скобки Пуассона левоинвариантных функций на T^*G .

7. Подмногообразие симплектического многообразия не является, вообще говоря, симплектическим многообразием, так как ограничение структурной 2-формы на нем может быть вырожденным. Тем не менее, для некоторых функций на подмногообразии все же можно определить скобку Пуассона.

Пусть, вообще, N – многообразие с заданной на нем замкнутой (но не обязательно невырожденной) 2-формой ω . Предположим, что форма ω имеет постоянный ранг. Из формулы (23) следует, что векторные поля, значения которых в каждой точке принадлежат ядру формы ω , аннулируют ω и образуют алгебру Ли. Они порождают некоторую (псевдо)группу Ли преобразований H многообразия N . Орбиты этой группы будем называть *слоями вырождения*.

Пусть $\mathcal{F}(N)^0$ – алгебра функций на N , постоянных на слоях вырождения. Для любых функций $\varphi, \psi \in \mathcal{F}(N)^0$ можно корректно определить их скобку Пуассона, руководствуясь формулами (27) и (28). Тем самым, алгебра $\mathcal{F}(N)^0$ превращается в алгебру Пуассона, которую мы обозначим через $\mathcal{P}(N)^0$.

Предположим теперь, что существует факторизация

$$\pi_H : N \rightarrow N^0 = N/H$$

в смысле п. 6. Тогда алгебра $\mathcal{F}(N^0)$ канонически отождествляется с алгеброй $\mathcal{F}(N)^0$ и, тем самым, многообразие N^0 наделяется пуассоновой структурой. Легко понять, что эта структура невырождена. Симплектическое многообразие N^0 будем называть *редукцией* многообразия N .

Применим вышеизложенное к некоторым “большим” подмногообразиям симплектических многообразий.

Подпространство симплектического векторного пространства называется *изотропным*, если ограничение структурной 2-формы на нем тождественно равно нулю, и *коизотропным*, если его ортогональное дополнение (в смысле структурной 2-формы) изотропно. Изотропное подпространство может быть также определено как подпространство, содержащееся в своем ортогональном дополнении, а коизотропное – как подпространство, содержащее свое ортогональное дополнение.

Подмногообразие N симплектического многообразия M называется *коизотропным*, если подпространство $T_p(N)$ коизотропно в $T_p(M)$ для каждой точки $p \in N$.

Ограничение структурной 2-формы многообразия M на коизотропное подмногообразие N имеет постоянный ранг (равный $2 \dim N - \dim M$). Если $\varphi, \psi \in \mathcal{P}(M)$ – такие функции, что их ограничения на N принадлежат $\mathcal{P}(N)^0$, то векторные поля $v(\varphi), v(\psi)$ ортогональны слоям вырождения подмногообразия N и в силу коизотропности последнего касаются его. Отсюда следует, что

$$\{\varphi, \psi\}|_N = \{\varphi|_N, \psi|_N\}. \quad (43)$$

8. Рассмотрим важный частный случай описанной выше ситуации.

Пусть H – подгруппа Ли группы Ли G . Будем считать, что H действует на G правыми сдвигами, и рассмотрим подрасслоение $T_H^*G \subset T^*G$, образованное аннуляторами касательных пространств H -орбит. Его касательное пространство в любой точке порождается касательным пространством слоя и скоростями действия $G : T^*G$ левыми сдвигами. Оно также содержит скорости действия $H : T^*G$ правыми сдвигами, причем, как следует из формул (35) и (36), последние ортогональны ему. По соображениям размерности мы можем заключить, что T_H^*G – коизотропное подмногообразие в T^*G , причем его слоями вырождения являются H -орбиты. Легко понять, что редукция многообразия T_H^*G – это $T^*(G/H)$.

Это позволяет получить удобную формулу для скобки Пуассона любых G -инвариантных функций на $T^*(G/H)$, обобщающую формулу (42).

Условимся отождествлять каноническим образом касательное пространство $T_o(G/H)$ многообразия G/H в точке $o = eH$ с пространством $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, а кокасательное пространство $T_o^*(G/H)$ – с пространством $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*$, канонически вложенным в $\mathfrak{g}^*$ (в виде аннулятора $\mathfrak{h}^\circ$ подалгебры $\mathfrak{h}$).

Для любой H -инвариантной функции φ на $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*$ обозначим через $\tilde{\varphi}$ G -инвариантную функцию на $T^*(G/H)$, ограничение которой на $T_o^*(G/H) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*$ совпадает с φ . Прообраз функции $\tilde{\varphi}$ на T_H^*G является G -левоинвариантной функцией, постоянной на слоях вырождения. В силу этого из формулы (43) и левоинвариантного варианта формулы (42) следует, что

$$\{\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\}(\alpha) = -\alpha([d_\alpha \varphi, d_\alpha \psi]) \quad (\alpha \in (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*) \quad (44)$$

для любых H -инвариантных функций φ, ψ на $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*$. Коммутатор в правой части этой формулы следует понимать как коммутатор в $\mathfrak{g}$ любых представителей смежных классов $d_\alpha \varphi, d_\alpha \psi \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ (от выбора которых результат не зависит).

§ 2. Пуассоновы действия и отображение моментов

1. Действие связной группы Ли G на пуассоновом многообразии M называется *пуассоновым*, если задан гомоморфизм алгебр Ли (называемый *гамильтонианом* действия)

$$\mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{P}(M), \quad \xi \mapsto H_\xi,$$

удовлетворяющий условию

$$v(H_\xi) = \xi_*, \quad (45)$$

где ξ_* – поле скоростей действия, отвечающее элементу $\xi \in \mathfrak{g}$. При этом автоматически данное действие сохраняет пуассонову структуру и

$$H_{\text{Ad}(g)\xi} = gH_\xi \quad (46)$$

для любого $g \in G$. В случае несвязной группы G выполнение последних двух свойств естественно потребовать дополнительно.

ПРИМЕР 1. Пусть группа Ли G действует на многообразии X . Тогда в силу (31) и (33) индуцированное действие $G : T^*X$ является пуассоновым с гамильтонианом

$$H_\xi = \xi_*, \quad (47)$$

где ξ_* – поле скоростей действия $G : X$, рассматриваемое как функция на T^*X , линейная на слоях.

ПРИМЕР 2. Симплектическое линейное представление группы Ли G в векторном пространстве V является пуассоновым действием с квадратичным гамильтонианом

$$H_\xi(x) = \frac{1}{2} \omega(\xi x, x) \quad (x \in V). \quad (48)$$

ПРИМЕР 3. Пусть задано произвольное линейное представление группы Ли G в векторном пространстве U . Определим в пространстве $V = U \oplus U^*$ невырожденную кососимметрическую билинейную форму ω следующим каноническим образом:

$$\begin{aligned} \omega(U, U) &= \omega(U^*, U^*) = 0, \\ \omega(x, \alpha) &= \alpha(x) \quad (x \in U, \alpha \in U^*). \end{aligned} \quad (49)$$

Естественное действие $G : V$ сохраняет эту форму и согласно примеру 2 является пуассоновым. С другой стороны, пространство V можно рассматривать как T^*U , и поэтому то же действие является пуассоновым согласно примеру 1. Нетрудно видеть, что гамильтонианы (47) и (48) в данном случае совпадают.

ПРИМЕР 4. В силу формул (37) и (39) коприсоединенное представление группы Ли G является пуассоновым действием с гамильтонианом

$$H_\xi = \xi \quad (50)$$

относительно пуассоновой структуры в $\mathfrak{g}^*$, описанной в п. 1.5.

2. Действие группы Ли G на симплектическом многообразии M называется *симплектическим*, если оно сохраняет структурную форму ω .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если группа Ли G полупроста или, более общо, если $H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{F}) = H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{F}) = 0$, то всякое симплектическое действие группы G является пуассоновым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всякой точки $p \in M$ рассмотрим G -эквивариантное отображение

$$G \rightarrow M, \quad g \mapsto gp.$$

Прообраз формы ω при этом отображении является замкнутой левоинвариантной 2-формой на группе G , которая в силу условия $H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{F}) = 0$ должна быть дифференциалом левоинвариантной 1-формы. Это означает, что существует такая (однозначно определенная) 1-форма α_p на $\mathfrak{g}$, что

$$\omega(\xi_*(p), \eta_*(p)) = \alpha_p([\xi, \eta])$$

для любых $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$. Положим $H_\xi(p) = \alpha_p(\xi)$; тогда

$$H_{[\xi, \eta]} = \omega(\xi_*, \eta_*).$$

Для любых $\xi, \eta, \zeta \in \mathfrak{g}$ имеем в силу (28) и (23):

$$\omega(v(H_{[\xi, \eta]}), \zeta_*) = -\zeta_* \cdot \omega(\xi_*, \eta_*) = -\omega([\zeta, \xi]_*, \eta_*) - \omega(\xi_*, [\zeta, \eta]_*) = \omega([\xi, \eta]_*, \zeta_*),$$

откуда $v(H_{[\xi, \eta]}) = [\xi, \eta]_*$. Так как $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, то $v(H_\xi) = \xi_*$ для любого $\xi \in \mathfrak{g}$. Наконец, так как отображение $\eta \mapsto H_\eta$ G -эквивариантно, то

$$\{H_\xi, H_\eta\} = \xi_* \cdot H_\eta = H_{[\xi, \eta]}.$$

3. Для всякого пуассонова действия $G : M$ определено так называемое *отображение моментов*

$$\Phi : M \rightarrow \mathfrak{g}^*, \quad \Phi(p)(\xi) = H_\xi(p) \quad (p \in M, \xi \in \mathfrak{g}). \quad (51)$$

Более наглядно его можно представлять себе следующим образом. Пусть $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ – базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $H_1, \dots, H_n$ – гамильтонианы базисных векторов. Тогда $\Phi(p)$ есть точка пространства $\mathfrak{g}^*$ с координатами $H_1(p), \dots, H_n(p)$.

Отображение $\varphi : M \rightarrow N$ пуассоновых многообразий будем называть *морфизмом*, если соответствующий обратный гомоморфизм φ^* алгебр функций сохраняет скобку Пуассона, т.е. является гомоморфизмом алгебр Пуассона.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Отображение моментов $\Phi : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ является эквивариантным морфизмом пуассоновых многообразий.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивариантность отображения Φ очевидна. Для доказательства того, что оно является морфизмом пуассоновых многообразий, достаточно проверить, что Φ^* сохраняет скобку Пуассона линейных функций на $\mathfrak{g}^*$. Из определения (49) следует, что $\Phi^*(\xi) = H_\xi$ при $\xi \in \mathfrak{g}$. Для любых $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ имеем в силу (37):

$$\Phi^*(\{\xi, \eta\}) = \Phi^*([\xi, \eta]) = H_{[\xi, \eta]} = \{H_\xi, H_\eta\} = \{\Phi^*(\xi), \Phi^*(\eta)\}.$$

ПРИМЕР 5. Для пуассонова действия $G : T^*X$ из примера 1 отображение моментов выглядит следующим образом:

$$\Phi(\alpha)(\xi) = \alpha(\xi_*(x)) \quad (\alpha \in T_x^*(X)). \quad (52)$$

В частности, пусть $X = G/H$. Положим $o = eH$ и условимся каноническим образом отождествлять пространство $T_o^*(X)$ с пространством $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*$, вложенным в $\mathfrak{g}^*$ в виде аннулятора $\mathfrak{h}^\circ$ подалгебры $\mathfrak{h}$. Тогда

$$\Phi(\alpha) = \alpha \quad (\alpha \in (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^* \subset \mathfrak{g}^*). \quad (53)$$

ПРИМЕР 6. Рассмотрим пуассоново действие $G : V$ из примера 2. Его дифференциал есть гомоморфизм $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{sp}(V)$. Отождествим алгебру Ли $\mathfrak{sp}(V)$ с ее сопряженным пространством при помощи скалярного умножения $(A, B) = \text{tr } AB$ и рассмотрим линейное отображение

$$\rho^* : \mathfrak{sp}(V) \rightarrow \mathfrak{g}^*,$$

сопряженное отображению ρ . Далее, любым двум векторам $u, v \in V$ поставим в соответствие линейный оператор

$$x \mapsto \frac{1}{2}(\omega(x, u)v + \omega(x, v)u).$$

Тем самым будет определен изоморфизм

$$\sigma : S^2V \xrightarrow{\sim} \mathfrak{sp}(V).$$

Нетрудно проверить, что

$$\Phi(v) = \frac{1}{2}\rho^*(\sigma(v^2)). \quad (54)$$

ПРИМЕР 7. В условиях предложения 1 $\Phi(p) = \alpha_p$, где α_p — линейная форма на $\mathfrak{g}$, определенная в доказательстве этого предложения.

4. Вычислим дифференциал отображения моментов для пуассонова действия группы Ли G на симплектическом многообразии M . В силу (28) имеем:

$$d\Phi(p, dp)(\xi) = \omega(\xi_*(p), dp). \quad (55)$$

Отсюда следует, что

$$\text{Ker } d_p\Phi = \mathfrak{g}_*(p)^\perp, \quad (56)$$

где знак $\perp$ обозначает ортогональное дополнение в смысле формы ω .

В частности, если действие $G : M$ транзитивно, то $\mathfrak{g}_*(p) = T_p(M)$ и $\text{Ker } d_p\Phi = 0$ для любой точки $p \in M$. Отсюда получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. При сделанных выше предположениях, если действие $G : M$ транзитивно, то отображение моментов является эквивариантным симплектическим накрытием над некоторой орбитой коприсоединенного представления группы G .

В общем случае из формулы (56) следует, что размерность образа отображения моментов равна размерности орбиты общего положения действия $G : M$.

5. Пусть задано пуассоново действие группы Ли G на симплектическом многообразии M . Рассмотрим алгебру функций

$$\mathcal{A}(M) = \Phi^*(\mathcal{P}(\mathfrak{g}^*)^G) \subset \mathcal{P}(M). \quad (57)$$

Так как $\mathcal{P}(\mathfrak{g}^*)^G$ – это центр алгебры Пуассона $\mathcal{P}(\mathfrak{g}^*)$ (см. п. 1.2), то алгебра $\mathcal{A}(M)$ коммутативна относительно скобки Пуассона. Соответствующие гамильтоновы векторные поля обладают следующими свойствами:

- 1) они коммутируют друг с другом;
- 2) они G -инвариантны;
- 3) они ортогональны орбитам, так как происходят из функций, постоянных на орбитах;
- 4) они касательны орбитам, так как происходят из функций, постоянных на слоях отображения моментов.

Более точно, значения этих векторных полей в точке $p \in M$ общего положения образуют подпространство

$$\text{Ker } d\Phi|_{\mathfrak{g}_*(p)} = \text{Ker } \omega|_{\mathfrak{g}_*(p)} \subset T_p(M). \quad (58)$$

Указанные векторные поля порождают некоторую абелеву (псевдо)группу G -эквивариантных автоморфизмов многообразия M , сохраняющих орбиты и называемых *инвариантными коллективными движениями*. Ее ограничение на орбиту $Gp = G/G_p$ есть некоторая абелева подгруппа группы $N(G_p)/G_p$, действующей на G/G_p правыми сдвигами. Из (58) следует, что для точки p общего положения эта подгруппа совпадает со связной компонентой группы $G_{\Phi(p)}/G_p$ и, значит,

$$\mathfrak{g}_{\Phi(p)} \supset \mathfrak{g}_p \supset [\mathfrak{g}_{\Phi(p)}, \mathfrak{g}_{\Phi(p)}]. \quad (59)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Назовем *дефектом* симплектического действия $G : M$ дефект ограничения формы ω на касательное пространство орбиты общего положения.

Дефект действия $G : M$ будем обозначать через $\text{def}(M, G)$ или $\text{def } M$.

Из (58) следует, что дефект пуассонова действия равен $\dim G_{\Phi(p)}/G_p$ для точки p общего положения. С другой стороны, так как $\dim \Phi(M) = \dim G/G_p$, то дефект действия $G : M$ равен коразмерности орбиты общего положения для действия $G : \Phi(M)$.

6. Рассмотрим случай редуктивной группы Ли G (см. определение в п. 3.1 главы I). В этом случае имеется возможность отождествить пространства $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$ при помощи какого-нибудь инвариантного скалярного умножения. Имея это в виду, будем считать, что отображение моментов Φ есть отображение из M в $\mathfrak{g}$. Подгруппа $G_{\Phi(p)}$ будет тогда централизатором элемента $\Phi(p) \in \mathfrak{g}$ в G .

Пусть $\pi_G : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} // G$ – морфизм факторизации. Известно, что каждый его слой есть объединение конечного числа орбит группы G .

Отсюда следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Дефект пуассонова действия редуктивной группы Ли G на симплектическом многообразии M равен $\dim \pi_G(\Phi(M))$.

ЛЕММА 1. Для любого неприводимого по Зарисскому подмножества $S \subset \mathfrak{g}$ имеет место ровно одна из следующих двух возможностей:

- 1) некоторое непустое открытое по Зарисскому подмножество в S состоит из полупростых элементов;
- 2) все полупростые элементы в S содержатся в собственном замкнутом по Зарисскому подмножестве.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Алгебра $\mathfrak{g}$ покрывается конечным числом *пластов* – неприводимых компонент алгебраических подмногообразий, образованных всеми G -орбитами (классами сопряженности) данной размерности. Существует пласт, содержащий непустое открытое по Зарисскому подмножество множества S . Однако известно, что если в пласте присутствуют полупростые элементы, то они составляют в нем открытое по Зарисскому подмножество [32]. Отсюда и следует утверждение леммы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пуассоново действие редуктивной группы Ли G на симплектическом многообразии M назовем *симплектически стабильным*, если некоторое непустое открытое по Зарисскому подмножество в $\Phi(M)$ состоит из полупростых элементов.

Централизатор полупростого элемента в алгебре $\mathfrak{g}$ является редуктивной подалгеброй максимального ранга, система корней которой есть пересечение системы корней алгебры $\mathfrak{g}$ с некоторым подпространством. Такие подалгебры иногда называют *подалгебрами Леви*.

В случае симплектически стабильного действия $G : M$ для точки $p \in M$ общего положения подалгебра $\mathfrak{g}_{\Phi(p)}$ является подалгеброй Леви, а подалгебра $\mathfrak{g}_p$ есть сумма ее коммутанта и некоторой подалгебры ее центра. Поэтому

$$\text{def } M = \text{rk } \mathfrak{g} - \text{rk } \mathfrak{g}_p. \quad (60)$$

В частности, дефект симплектически стабильного действия определяется стабилизатором точки общего положения.

Для действий на кокасательных расслоениях симплектическая стабильность может быть установлена при помощи следующего результата Ф. Кнопа.

Алгебраическое многообразие называется *квазиаффинным*, если оно изоморфно открытому подмногообразию аффинного многообразия.

ТЕОРЕМА 1 [33]. Пусть редуктивная алгебраическая группа G действует на неприводимом гладком квазиаффинном алгебраическом многообразии X . Тогда действие $G : T^*X$ симплектически стабильно.

Эта теорема была доказана в [33] для комплексных алгебраических групп и многообразий, но она верна и в вещественном случае, поскольку из леммы 1 следует, что симплектическая стабильность (или ее отсутствие) сохраняется при комплексификации. Ее доказательство будет приведено в п. 3.9.

§ 3. Коранг симплектического действия

1. Пусть (V, ω) – симплектическое векторное пространство.

Подпространство $U \subset V$ назовем *невыврожденным*, если ограничение формы ω на нем невырожденно. Это равносильно тому, что $V = U \oplus U^\perp$, где знак $\perp$ обозначает ортогональное дополнение в смысле формы ω .

В общем случае ранг ограничения формы ω на U назовем *рангом* подпространства U и обозначим через $\text{rk } U$. В частности, подпространства ранга 0 – это изотропные подпространства (см. п. 1.7). Число $\text{rk } U^\perp$ назовем *корангом* подпространства U и обозначим через $\text{cork } U$. В частности, подпространства коранга 0 – это коизотропные подпространства (см. п. 1.7).

Дефект (размерность ядра) ограничения формы ω на U назовем *дефектом* подпространства U и обозначим через $\text{def } U$. Справедливы следующие соотношения:

$$\text{def } U = \text{def } U^\perp = \dim(U \cap U^\perp) = \text{codim}(U + U^\perp), \quad (61)$$

$$\text{rk } U + \text{def } U = \dim U, \quad (62)$$

$$\text{cork } U + \text{def } U = \text{codim } U. \quad (63)$$

Пусть задано симплектическое действие группы Ли G на симплектическом многообразии M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Назовем *корангом* действия $G : M$ коранг касательного пространства орбиты общего положения. Действия коранга 0 будем называть *коизотропными*.

Коранг действия $G : M$ будем обозначать через $\text{cork}(G, M)$ или $\text{cork } M$.

В силу (63) число $\text{cork } M + \text{def } M$ равно коразмерности орбиты общего положения.

2. Коизотропные симплектические действия $G : M$ могут быть охарактеризованы в терминах алгебры Пуассона $\mathcal{P}(M)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Симплектическое действие $G : M$ коизотропно тогда и только тогда, когда алгебра $\mathcal{P}(M)^G$ коммутативна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для точки $p \in M$ общего положения дифференциалы G -инвариантных функций образуют в $T_p^*(M)$ аннулятор подпространства $\mathfrak{g}_*(p) \subset T_p(M)$. Соответственно этому их косые градиенты образуют в $T_p(M)$ ортогональное дополнение $\mathfrak{g}_*(p)^\perp$ подпространства $\mathfrak{g}_*(p)$. Поэтому коммутативность алгебры $\mathcal{P}(M)^G$ равносильна изотропности подпространств $\mathfrak{g}_*(p)^\perp$ для точек p общего положения, а это как раз и означает коизотропность действия.

3. Рассмотрим частный случай, когда $M = T^*X$ и действие $G : M$ индуцировано действием $G : X$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Действие $G : X$ назовем *слабо коммутативным*, если действие $G : T^*X$ коизотропно.

В силу предложения 5 это определение согласуется с определением 6 главы I.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Всякое слабо коммутативное действие $G : X$ с редуktивным стабилизатором точки общего положения локально транзитивно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно доказать, что на X нет непостоянных G -инвариантных функций. Предположим, что φ – такая функция. Тогда по формуле (32) $v(p^*\varphi) = -d\varphi$. Это инвариантное вертикальное поле, ортогональное орбитам действия $G : T^*X$. Ввиду коизотропности последнего оно должно касаться орбит общего положения. Следовательно, для точки $x \in X$ общего положения орбиты общего положения действия $G_x : T_x^*X$ являются цилиндрическими с образующими, параллельными инвариантному вектору $d_x\varphi$. Очевидно, что если группа G_x редуктивна, то это невозможно.

4. Предположим теперь, что G – редуктивная комплексная алгебраическая группа, действующая на неприводимом гладком комплексном алгебраическом многообразии X . В этой ситуации оказывается возможным выразить коранг и дефект действия $G : T^*X$ через известные инварианты действия $G : X$.

Пусть B – борелевская подгруппа и U – содержащаяся в ней максимальная унипотентная подгруппа группы G .

Коразмерность орбит общего положения действия $B : X$ называется *сложностью* действия $G : X$ и обозначается через $c(X, G)$ или $c(X)$. Действия сложности нуль называются *сферическими*. В случае, когда X – аффинное многообразие, это согласуется с определением, данным в п. 3.2 главы I.

Характеры λ группы B , для которых существует такая рациональная функция $\varphi \in \mathbb{C}(X)$, что $b\varphi = \lambda(b)\varphi$ при $b \in B$, образуют группу, называемую *ранговой группой* действия $G : X$ и обозначаемую через $\Gamma(X, G)$ или $\Gamma(X)$. Это свободная конечнопорожденная абелева группа. Ее ранг называется *рангом* действия $G : X$ и обозначается через $r(X, G)$ или $r(X)$.

Эквивалентное определение ранговой группы состоит в том, что это группа характеров тора $A = (Bx)/U$ для точки общего положения $x \in X$. Соответственно этому ранг действия $G : X$ есть разность между сложностью и коразмерностью орбит общего положения действия $U : X$.

Понятие ранга действия является обобщением классического понятия ранга симметрического пространства. А именно, классический ранг симметрического пространства полупростой группы Ли равен рангу его комплексификации в смысле данного выше определения.

ТЕОРЕМА 2. $\text{cork } T^*X = 2c(X)$, $\text{def } T^*X = r(X)$.

Эта теорема была фактически доказана в [33]. Ее доказательство в случае, когда многообразие X квазиаффинно, (несколько иное, чем в цитированной статье) будет дано в п. 9. Оно будет опираться на результаты пп. 5–8.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Однородное пространство редуктивной группы Ли слабо коммутативно тогда и только тогда, когда оно сферично.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Всякое слабо коммутативное однородное пространство редуктивной группы Ли коммутативно.*

5. Действие борелевской подгруппы на некотором открытом подмножестве многообразия X описывается так называемой теоремой о локальной структуре, доказанной М. Брионом, Д. Луной и Т. Вюстом [34]. (Несколько раньше сходная конструкция рассматривалась Ф. Гроссхансом [35].)

ТЕОРЕМА 3 [34]. Для произвольного действия редуктивной алгебраической группы G на неприводимом алгебраическом многообразии X существует такая параболическая подгруппа $P \subset G$, что некоторое открытое подмножество многообразия X P -эквивариантно изоморфно однородному расслоению $P *_L Y$, где $L \subset P$ – максимальная редуктивная подгруппа, Y – неприводимое алгебраическое многообразие и коммутант группы L действует на Y тривиально.

Приводимое ниже доказательство принадлежит Ф. Кнопу [36], [37].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [38] многообразие X может быть покрыто G -инвариантными квазипроективными открытыми подмножествами. Поэтому можно считать, что X – гладкое квазипроективное многообразие. Известно [39], что в этом случае существует такое вложение $X \hookrightarrow PV$, что действие $G : X$ индуцируется линейным действием $G : V$.

Пусть $\widehat{X} \subset V$ – конус над X . Для любого однородного многочлена $\varphi \in \mathbb{C}[\widehat{X}]$ определим отображение

$$F_\varphi : X_\varphi \doteq \{x \in X : \varphi(x) \neq 0\} \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

по формуле

$$F_\varphi(x)(\xi) = \frac{\xi \cdot \varphi}{\varphi}(x).$$

Пусть φ – собственный вектор параболической подгруппы $P \subset G$ с весом λ . Тогда отображение F_φ P -эквивариантно и

$$F_\varphi(x)(\xi) = \lambda(\xi) \quad \text{при} \quad \xi \in \mathfrak{p},$$

откуда $F_\varphi(x) \in \lambda + \mathfrak{p}^\circ$, где $\mathfrak{p}^\circ$ – аннулятор $\mathfrak{p}$ в $\mathfrak{g}^*$.

Выбрав инвариантное скалярное умножение в $\mathfrak{g}$, условимся отождествлять $\mathfrak{g}^*$ с $\mathfrak{g}$. Пусть U_P – унитарный радикал группы P . Тогда $\mathfrak{p}^\circ = \mathfrak{p}^\perp = \mathfrak{u}_P$. Таким образом, мы получим P -эквивариантное отображение

$$F_\varphi : X_\varphi \rightarrow \lambda + \mathfrak{u}_P.$$

Будем считать, что

$$P = \{g \in G : g\varphi \in \langle \varphi \rangle\}.$$

Тогда оператор $\text{ad}(\lambda)$ невырожден (и, более того, имеет только положительные собственные значения) на $\mathfrak{u}_P$, откуда следует, что $\lambda + \mathfrak{u}_P$ есть одна P -орбита, причем стабилизаторы ее точек – это максимальные редуктивные подгруппы группы P .

Пусть $L \subset P$ – стабилизатор точки λ и $Y = F_\varphi^{-1}(\lambda)$. Тогда отображение

$$P \times Y \rightarrow X_\varphi, \quad (p, y) \mapsto py,$$

индуцирует P -эквивариантный биективный морфизм

$$P *_L Y \rightarrow X_\varphi,$$

который ввиду гладкости многообразия X_φ является изоморфизмом. Так как база расслоения $P *_L Y$ односвязна, то многообразие Y неприводимо.

Отметим, что если коммутант группы G действует на X нетривиально, то функция φ может быть выбрана так, что $P \neq G$. Поэтому если коммутант группы L действует на Y нетривиально, то, применив доказанное выше к действию $L : Y$, мы можем уменьшить подгруппу P . Продолжая так дальше, мы в конце концов добьемся нужного результата.

Пусть $P \subset G$ – параболическая подгруппа, удовлетворяющая требованиям теоремы, и U_P – ее унитарный радикал. Обозначим через L_0 ядро неэффективности действия $L : Y$ и положим

$$S = U_P \rtimes L_0 \subset P.$$

Следующее предложение показывает, в частности, что подгруппы P и S с точностью до сопряженности однозначно определяются действием $G : X$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7 [40], [36]. *Подгруппа P (соответственно подгруппа S) совпадает со стабилизатором B -орбиты (соответственно U -орбиты) любой точки x (соответственно точки x общего положения) из открытого подмножества, удовлетворяющего требованиям теоремы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $Px = Bx$, $Sx = Ux$ и $G_x \cap U_P = \{e\}$.

Пусть $\tilde{S} \supset S$ – стабилизатор орбиты Ux и $\tilde{U}_P \subset U_P$ – его унитарный радикал. Из разложения $\tilde{S} = \tilde{S}_x \cdot U_P$ следует, что многообразие $(\tilde{S}/\tilde{U}_P)/(\tilde{U}/\tilde{U}_P) = \tilde{S}/U_P \simeq \tilde{S}_x$ аффинно и, значит, подгруппа $U_P/\tilde{U}_P \subset \tilde{S}/\tilde{U}_P$ редуктивна. Это возможно, только если $U_P = \tilde{U}_P$; но тогда $\tilde{S} \subset N(U_P) = P$ и, следовательно, для точки x общего положения $\tilde{S} = S$.

Стабилизатор орбиты Bx есть произведение подгруппы B и стабилизатора орбиты Ux и, следовательно, совпадает с P .

Факторгруппа $A = L/L_0$ есть тор, совпадающий с тором A , определенным в п. 4. В силу теоремы 90 Гильберта действие $A : Y$ допускает рациональное сечение. Это означает, что некоторое инвариантное открытое подмножество в Y можно представить как $A \times C$, где C – алгебраическое многообразие, на котором группа A действует тривиально, а действие $A : A$ определяется как групповое умножение. Уменьшив, если нужно, многообразие Y , будем в дальнейшем считать, что оно само представляется в указанном виде.

Очевидно, что

$$c(X) = \dim C, \quad r(X) = \dim A. \quad (64)$$

Более того, ранговая группа $\Gamma(X)$ есть группа характеров тора A (вложенная естественным образом в группу характеров группы P).

Учитывая, что группа U_P действует просто транзитивно на P/L , получаем, что некоторое P -инвариантное открытое подмножество $X_0 \subset X$ представляется в виде

$$X_0 = U_P \times Y = U_P \times A \times C, \quad (65)$$

причем действие группы $P = U_P \rtimes L$ на X_0 описывается формулами

$$v(u, a, c) = (vu, a, c) \quad (v \in U_P), \quad (66)$$

$$l(u, a, c) = (lul^{-1}, \pi(l)a, c) \quad (l \in L), \quad (67)$$

где $\pi : L \rightarrow L/L_0 = A$ – канонический гомоморфизм.

6. В случае, когда многообразие X квазиаффинно, теорема 3 допускает важные уточнения.

Обозначим через $\mathfrak{a}$ ортогональное дополнение к идеалу I_0 в алгебре I . Это диагонализированная подалгебра, которая естественным образом отождествляется с касательной алгеброй тора A . Ясно, что $I \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Если многообразие X квазиаффинно, то*

- 1) *подгруппа P (соответственно S) совпадает с подгруппой P' (соответственно S') всех элементов группы G , для которых всякий старший вектор представления $G : \mathbb{C}[X]$ является собственным (соответственно неподвижным) вектором;*
- 2) *подпространство $\mathfrak{a}$ совпадает с линейной оболочкой всех старших весов представления $G : \mathbb{C}[X]$;*
- 3) $I = \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как U -орбиты общего положения совпадают с S -орбитами, то всякий U -инвариант является S -инвариантом и, следовательно, $S \subset S'$.

По теореме Розенлихта U -орбиты общего положения разделяются рациональными U -инвариантами. Если многообразие U квазиаффинно, то всякий рациональный U -инвариант является отношением регулярных U -инвариантов и, следовательно, U -орбиты общего положения разделяются регулярными U -инвариантами. Кроме того, в этом случае все U -орбиты замкнуты. Отсюда следует, что U -орбиты общего положения совпадают с S' -орбитами и, значит, $S = S'$.

Так как подгруппа S (соответственно S') содержит максимальную полупростую подгруппу подгруппы P (соответственно P'), то из равенства $S = S'$ следует, что $P = P'$.

Остальные утверждения легко выводятся из доказанного.

7. Следуя И. М. Гельфанду и М. И. Граеву [41], назовем *орисферами* для действия $G : X$ орбиты максимальных унитарных подгрупп группы G или, что эквивалентно, образы при действии группы G орбит фиксированной максимальной унитарной подгруппы U . Группа G естественным образом действует на множестве всех орисфер.

Обозначим через $\text{Ног } X$ множество орисфер, G -эквивалентных U -орбитам точек построенного выше открытого подмножества $X_0 \subset X$. Множество U -орбит в X_0 параметризуется многообразием $Y = A \times C$ и инвариантно относительно группы P ; при этом действие группы P на этом множестве сводится к действию тора $P/S = A$.

ЛЕММА 2. *Если $gUx = Uy$ ($x, y \in X_0$), то $g \in P$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 7 следует, что $g \in N(S)$; но так как P — наименьшая параболическая подгруппа, содержащая S , то $N(S) \subset N(P) = P$ (и, значит, $N(S) = P$).

Отсюда следует, что множество $\text{Ног } X$ представляется в виде

$$\text{Ног } X = G *_P Y = G/S \times C \quad (68)$$

и, тем самым, наделяется структурой алгебраического многообразия, относительно которой действие $G : \text{Ног } X$ является алгебраическим. Построенное таким образом алгебраическое многообразие будем называть *многообразием орисфер* для действия $G : X$.

Так как $\dim G/P = \dim U_P$, то

$$\dim \text{Ног } X = \dim G/P + \dim Y = \dim U_P + \dim Y = \dim X. \quad (69)$$

Следует заметить, что в определении подмножества X_0 , а значит, и многообразия $\text{Ног } X$ имеется некоторый произвол. Однако он не будет играть роли в последующем изложении.

8. Займемся теперь многообразием T^*X .

Напомним некоторые определения. Подмногообразие N симплектического многообразия M называется *изотропным*, если его касательное пространство в каждой точке изотропно. Изотропное подмногообразие максимальной возможной размерности (равной $\frac{1}{2} \dim M$) называется *лагранжевым*.

Для любого подмногообразия $Z \subset X$ определим его *конормальное расслоение*

$$N^*Z = \{\alpha \in T_x^*(X) : z \in Z, \alpha = 0 \text{ на } T_z(Z)\} \subset T^*X.$$

Из формул (34)–(36) следует, что N^*Z – изотропное подмногообразие в T^*X . Так как

$$\dim N^*Z = \dim X = \frac{1}{2} \dim T^*X,$$

то N^*Z – лагранжево подмногообразие.

Рассмотрим, в частности, конормальные расслоения орисфер. Заметим, что многообразие T^*X ими покрывается. В самом деле, для любой линейной формы $\alpha \in T_x^*(X)$ ее образ при отображении моментов $\Phi: T^*X \rightarrow \mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$, как и любой элемент алгебры $\mathfrak{g}$, содержится в некоторой борелевской подалгебре $\mathfrak{b}_1$. Ортогональное дополнение к подалгебре $\mathfrak{b}_1$ есть ее унитарный радикал $\mathfrak{u}_1$, и из формулы (52) для отображения моментов следует, что $\alpha \in N^*U_1x$.

Если, однако, ограничиться орисферами из определенного выше множества $\text{Ног } X$, то может случиться, что их конормальные расслоения будут покрывать лишь незначительную часть многообразия T^*X . Так, например, в случае проективной прямой их объединение есть нулевое сечение расслоения T^*X . Мы покажем, что для аффинных многообразий такой неприятности случиться не может. В общем случае указанную трудность, вероятно, можно обойти, надлежащим образом изменив определение множества $\text{Ног } X$. Так, в случае проективной прямой “правильными” орисферами следует считать не дополнения к точкам, а точки (которые также являются орбитами максимальных унитарных подгрупп).

Построим вспомогательное многообразие, являющееся дизъюнктивным объединением конормальных расслоений орисфер из множества $\text{Ног } X$.

В соответствии с (65) получаем следующее представление для конормального расслоения U -орбиты точки $y \in Y \subset X_0$:

$$N^*(Uy) = U_P \times T_y^*(Y) \subset T^*X_0. \quad (70)$$

Рассмотрим многообразие

$$HT^*X = G *_P (U_P \times T^*Y) = G *_S (U_P \times \mathfrak{a}) \times T^*C \quad (= G/L_0 \times \mathfrak{a} \times T^*C). \quad (71)$$

Оно является расслоением над многообразием орисфер $\text{Nor } X$, слоями которого служат конормальные расслоения соответствующих орисфер. Назовем это многообразие *орисферическим кокасательным расслоением* многообразия X .

Заметим, что

$$\dim HT^*X = \dim \text{Nor } X + \dim X = \dim T^*X.$$

Имеется G -эквивариантный морфизм

$$p: HT^*X \rightarrow T^*X,$$

индуцированный вложением

$$U_P \times T^*Y \hookrightarrow T^*X.$$

ТЕОРЕМА 4 [36]. *Если многообразие X квазиаффинно, то морфизм p доминантен и, значит, является рациональным накрытием.*

(Доминантное рациональное отображение $p: M \rightarrow N$ называется рациональным накрытием, если поле $\mathbb{C}(M)$ является конечным расширением поля $p^*(\mathbb{C}(N))$ или, что равносильно, если $\dim M = \dim N$. Всякое рациональное накрытие является накрытием в обычном смысле слова над некоторым открытым подмножеством многообразия N .)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$M = T^*X_0, \quad N = U_P \times T^*Y \subset M.$$

Пусть U_P^- – унитарный радикал параболической подгруппы, противоположной P , так что

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{u}_P^- \oplus \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}_P.$$

Так как $PN = N$ и

$$\dim M - \dim N = \dim U_P = \dim U_P^-,$$

то доминантность морфизма p равносильна существованию такой точки $\alpha \in T_y^*(Y) \subset N$ ($y \in Y$), что

$$T_\alpha(M) = T_\alpha(N) \oplus \mathfrak{u}_P^-\alpha. \quad (72)$$

Заметим, что подмногообразие N коизотропно, причем его слоями вырождения служат U_P -орбиты (они же U -орбиты). Поэтому условие (72) равносильно невырожденности спаривания

$$\mathfrak{u}_P \times \mathfrak{u}_P^- \rightarrow \mathbb{C}, \quad (\xi, \eta) \mapsto \omega(\xi\alpha, \eta\alpha) = \alpha([\xi, \eta]y), \quad (73)$$

где ω – каноническая 2-форма на $M = T^*X$ (см. формулу (36)).

Пусть $\varphi \in \mathbb{C}[X]$ – старший вектор представления $G : \mathbb{C}[X]$, вес которого ортогонален минимальному возможному числу корней, т.е. только корням подгруппы L . Возьмем в качестве α дифференциал функции φ в любой точке $y \in Y$, в которой φ не обращается в нуль. Тогда

$$\alpha([\xi, \eta]y) = -([\xi, \eta] \cdot \varphi)(y).$$

Заметим, что если $\zeta \in \mathfrak{s}$, то $\zeta \cdot \varphi = 0$. Поэтому если $\xi = e_\alpha \in \mathfrak{u}_P$, $\eta = e_{-\beta} \in \mathfrak{u}_P^-$ – корневые векторы, то $[\xi, \eta] \cdot \varphi = 0$ при $\alpha > \beta$ (в смысле лексикографического упорядочения) и $[\xi, \eta] \cdot \varphi = c\varphi$ ($c \in \mathbb{C}^*$) при $\alpha = \beta$. Таким образом, в базисах пространств $\mathfrak{u}_P$ и $\mathfrak{u}_P^-$, составленных из корневых векторов, матрица спаривания (73) треугольная с ненулевыми диагональными элементами, и, значит, это спаривание невырожденно.

СЛЕДСТВИЕ. Если X квазиаффинно, то стабилизаторы точек общего положения для действия $G : T^*X$ сопряжены конечному расширению подгруппы L_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы и определения многообразия HT^*X следует, что искомые стабилизаторы сопряжены конечному расширению стабилизатора точки общего положения для действия $L : T^*Y$, который, очевидно, равен L_0 .

9. В предположении теоремы 4 найдем замыкание образа отображения моментов для действия $G : T^*X$. Из теоремы следует, что

$$\overline{\Phi(T^*X)} = \overline{\text{Ad}(G)\Phi(T^*Y)}. \quad (74)$$

Так как подгруппа S сохраняет U -орбиты, то (при отождествлении $\mathfrak{g}^*$ с $\mathfrak{g}$)

$$\Phi(T^*Y) \subset \mathfrak{s}^\perp = \mathfrak{u}_P \oplus \mathfrak{a}.$$

Рассматривая действие группы A , находим, что множество $\Phi(T^*Y)$ проектируется на всю подалгебру $\mathfrak{a}$.

Из утверждения 3) предложения 8 следует, что алгебра $\mathfrak{a}$ не имеет нулевых весов в $\mathfrak{u}_P$ и, значит,

$$\mathfrak{a}^{\text{reg}} \doteq \{\xi \in \mathfrak{a} : [\xi, \mathfrak{u}_P] = \mathfrak{u}_P\}$$

есть непустое открытое подмножество в $\mathfrak{a}$. Для каждого элемента $\xi \in \mathfrak{a}^{\text{reg}}$ его U_P -орбита есть плоскость $\xi + \mathfrak{u}_P$. Следовательно,

$$\overline{\text{Ad}(U_P)\Phi(T^*Y)} = \mathfrak{u}_P \oplus \mathfrak{a} = \overline{\text{Ad}(U_P)\mathfrak{a}}. \quad (75)$$

Из (74) и (75) получаем окончательно, что

$$\overline{\Phi(T^*X)} = \overline{\text{Ad}(G)\mathfrak{a}}. \quad (76)$$

В частности, элементы общего положения в $\Phi(T^*X)$ полупросты, т.е. действие $G : T^*X$ симплектически стабильно. Тем самым доказана теорема 1.

Докажем теперь теорему 2 для квазиаффинного многообразия X .

Из (76) следует, что $\dim \pi_G(\Phi(T^*X)) = \dim \mathfrak{a}$. Это означает, что $\text{def } T^*X = r(X)$. Далее, в силу следствия теоремы 4 коразмерность орбиты общего положения для действия $G : T^*X$ равна

$$\dim T^*X - \dim G/L_0 = 2(\dim X - \dim U_P) - \dim \mathfrak{a},$$

откуда

$$\text{cork } T^*X = 2(\dim X - \dim U_P - \dim A) = 2 \dim C = 2c(X),$$

что и требовалось доказать.

10. Для квазиаффинного многообразия X построенное выше рациональное накрытие $p: HT^*X \rightarrow T^*X$ позволяет перенести каноническую симплектическую структуру многообразия T^*X на некоторое открытое подмножество многообразия HT^*X . Пересечения конормальных расслоений орисфер с этим подмножеством образуют лагранжево расслоение с базой $\text{Ног } X$. Согласно общей теории (см., например, [29]) гамильтоновы векторные поля, определяемые функциями на базе лагранжева расслоения, т.е. в данном случае на $\text{Ног } X$, касаются слоев и в каждом слое определяют

каноническую локально аффинную структуру, относительно которой они являются постоянными; при этом ассоциированное векторное пространство есть кокасательное пространство базы. В этом смысле многообразие HT^*X похоже на кокасательное расслоение $T^*\text{Ног } X$ многообразия орисфер.

С другой стороны, имеется G -эквивариантный бирациональный морфизм

$$f: HT^*X \rightarrow T^*\text{Ног } X, \quad (77)$$

определяемый следующим образом.

Из представления многообразия $\text{Ног } X$ в виде (68) получаем:

$$T^*\text{Ног } X = T^*(G/S) \times T^*C = G *_S (\mathfrak{g}/\mathfrak{s})^* \times T^*C.$$

При отождествлении $\mathfrak{g}^*$ с $\mathfrak{g}$ пространство $(\mathfrak{g}/\mathfrak{s})^*$ отождествляется с подпространством

$$\mathfrak{s}^\perp = \mathfrak{u}_P \oplus \mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}.$$

Таким образом, многообразие $T^*\text{Ног } X$ представляется в виде

$$T^*\text{Ног } X = G *_S (\mathfrak{u}_P \oplus \mathfrak{a}) \times T^*C. \quad (78)$$

Рассмотрим S -эквивариантный морфизм

$$f_0: U_P \times \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{u}_P \oplus \mathfrak{a}, \quad (u, \xi) \mapsto \text{Ad}(u)\xi.$$

Из того, что $\mathfrak{a}$ не имеет нулевых весов в $\mathfrak{u}_P$ (утверждение 3) предложения 8), следует, что морфизм f_0 бирационален. Используя представления (71) и (78) многообразий HT^*X и $T^*\text{Ног } X$, мы можем теперь определить искомый морфизм f по формуле

$$f((gz, \gamma)) = (gf_0(z), \gamma) \quad (g \in G, z \in U_P \times \mathfrak{a}, \gamma \in T^*C). \quad (79)$$

Нетрудно видеть, что морфизм f переводит конормальные расслоения орбит в соответствующие кокасательные пространства многообразия $\text{Ног } X$, т.е. имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} HT^*X & \xrightarrow{f} & T^*\text{Ног } X \\ \searrow & & \swarrow \\ & \text{Ног } X & \end{array}.$$

Вообще говоря, морфизм f не является симплектическим (ни при каком выборе A -сечения C в Y). Однако можно показать, что для (комплексных) симметрических пространств он является симплектическим. Таким образом, для всякого симметрического пространства X имеется G -эквивариантное симплектическое рациональное накрытие

$$T^*\text{Ног } X \rightarrow T^*X.$$

§ 4. Структура слабо коммутативных однородных пространств

1. Напомним, что однородное пространство $X = G/K$ мы называем слабо коммутативным, если действие $G : T^*X$ коизотропно. Очевидно, что свойство слабой коммутативности является локальным, т.е. зависит только от пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$.

Пространство $T_o(X)$ канонически отождествляется с $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$. Соответственно этому пространство $T_o^*(X)$ отождествляется с $(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^* = \mathfrak{k}^\circ \subset \mathfrak{g}^*$. Действие $K : T_o^*(X)$ индуцируется коприсоединенным представлением Ad^* группы G .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Орбита точки $\alpha \in T_o^*(X)$ в T^*X коизотропна тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих эквивалентных условий:*

- (K1) $\dim \text{Ad}^*(G)\alpha = 2 \dim \text{Ad}^*(K)\alpha$;
- (K2) $\text{ad}^*(\mathfrak{g})\alpha \cap \mathfrak{k}^\circ = \text{ad}^*(\mathfrak{k})\alpha$;
- (K3) $\alpha([(\text{ad}^*(\mathfrak{k})\alpha)^\circ, (\text{ad}^*(\mathfrak{k})\alpha)^\circ]) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Коразмерность орбиты точки α в T^*X равна $\dim G/K - \dim \text{Ad}^*(K)\alpha$. С другой стороны, ее дефект равен $\dim G_\alpha - \dim K_\alpha$. Следовательно, ее коранг равен

$$(\dim G - \dim G_\alpha) - 2(\dim K - \dim K_\alpha) = \dim \text{Ad}^*(G)\alpha - 2 \dim \text{Ad}^*(K)\alpha.$$

В частности, орбита точки α коизотропна тогда и только тогда, когда выполнено условие (K1) или эквивалентное ему условие

$$\dim \text{ad}^*(\mathfrak{g})\alpha = 2 \dim \text{ad}^*(\mathfrak{k})\alpha. \quad (80)$$

Так как $\alpha \in \mathfrak{k}^\circ$, то подпространство $\text{ad}^*(\mathfrak{k})\alpha$ изотропно в $\text{ad}^*(\mathfrak{g})\alpha$ в смысле формы Костанта–Кириллова (40). Поэтому условие (80) равносильно тому, что оно является максимальным изотропным подпространством в $\text{ad}^*(\mathfrak{g})\alpha$, т.е. совпадает со своим ортогональным дополнением. Но его ортогональное дополнение – это подпространство $\text{ad}^*(\mathfrak{g})\alpha \cap \mathfrak{k}^\circ$. Таким образом, условие (80) равносильно условию (K2).

Легко видеть, что $\text{ad}^*(\xi)\alpha \in \mathfrak{k}^\circ$ тогда и только тогда, когда $\xi \in (\text{ad}^*(\mathfrak{k})\alpha)^\circ$. Поэтому условие (K3) означает, что подпространство $\text{ad}^*(\mathfrak{g})\alpha \cap \mathfrak{k}^\circ$ изотропно в смысле формы Костанта–Кириллова, что также равносильно (80).

СЛЕДСТВИЕ. *Однородное пространство $X = G/K$ слабо коммутативно тогда и только тогда, когда для точки α общего положения в $T_o^*(X)$ выполнено любое из эквивалентных условий (K1)–(K3).*

Интересно отметить, что условие (K2) для точки общего положения есть не что иное, как известное в теории инвариантов (в более общей ситуации) условие Ричардсона [2]. Из него следует, что каждая орбита общего положения группы $\text{Ad}^*(G)$ пересекает подпространство $\mathfrak{k}^\circ \subset \mathfrak{g}^*$ не более чем по конечному числу орбит группы $\text{Ad}^*(K)$, каждая из которых замкнута (и открыта) в этом пересечении.

2. Начиная с этого момента, будем предполагать, что подгруппа K компактна. В этом случае орбиты действия $K : (\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^*$ (как и орбиты любой компактной линейной группы) разделяются полиномиальными инвариантами. Алгебру полиномиальных инвариантов этого действия обозначим через $\mathbb{R}[(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^*]^K$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. *Однородное пространство $X = G/K$ слабо коммутативно тогда и только тогда, когда*

$$\alpha([d_\alpha \varphi, d_\alpha \psi]) = 0 \quad (81)$$

для любых инвариантов $\varphi, \psi \in \mathbb{R}[(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^*]^K$ и любой точки $\alpha \in T_o^*(X) = \mathfrak{k}^\circ$.

(Здесь предполагается, что элементы $d_\alpha \varphi, d_\alpha \psi \in \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ каким-то образом подняты в $\mathfrak{g}$; выполнение равенства (81) не зависит от способа этого поднятия, так как дифференциалы инвариантов обращаются в нуль на касательных пространствах орбит.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В точке α общего положения дифференциалы инвариантов образуют конормальное пространство орбиты $\text{Ad}^*(K)\alpha$, т.е. пространство $(\text{ad}^*(\mathfrak{k})\alpha)^\circ$. Поэтому условие (81) для точек общего положения совпадает с условием (K3). Но по соображениям непрерывности из его выполнения в точках общего положения следует его выполнение всюду.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если пространство G/K слабо коммутативно, то для любой нормальной подгруппы Ли N группы G пространство*

$$G/NK = (G/N)/(K/(N \cap K))$$

также слабо коммутативно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из того, что пространство $T_o^*(G/NK)$ есть K -инвариантное подпространство в $T_o^*(G/K)$ и алгебра $\mathbb{R}[T_o^*(G/NK)]^{NK} = \mathbb{R}[T_o^*(G/NK)]^K$ есть ограничение алгебры $\mathbb{R}[T_o^*(G/K)]^K$ на это подпространство.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если пространство G/K слабо коммутативно, то для любой компактной подгруппы $L \subset G$, содержащей K , пространство G/L также слабо коммутативно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству следствия 1.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Если пространство G/K слабо коммутативно, то для любой подгруппы Ли $L \subset G$, содержащей K , пространство L/K также слабо коммутативно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из того, что пространство $T_o^*(L/K)$ есть факторпространство пространства $T_o^*(G/K)$ по K -инвариантному подпространству и алгебра $\mathbb{R}[T_o^*(L/K)]^K$ есть подалгебра алгебры $\mathbb{R}[T_o^*(G/K)]^K$.

3. Пусть $X = G/K$ – слабо коммутативное пространство. Выберем в $\mathfrak{g}$ какое-нибудь K -инвариантное скалярное умножение и обозначим через $\mathfrak{m}$ ортогональное дополнение в $\mathfrak{k}$. Тогда пространства $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ и $(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^*$ можно будет естественным образом отождествить с $\mathfrak{m}$. Условие (81) при этом переписывается в виде

$$(a, [\text{grad}_a \varphi, \text{grad}_a \psi]) = 0 \quad (a \in \mathfrak{m}, \varphi, \psi \in \mathbb{R}[\mathfrak{m}]^K). \quad (82)$$

Следующие две леммы будут играть ключевую роль в нашем описании структуры слабо коммутативных однородных пространств.

ЛЕММА 3. Пусть $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ – такие K -инвариантные подпространства, что подпространства $\mathfrak{k}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ линейно независимы. Тогда

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \subset \mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \mathfrak{b}.$$

Кроме того, если K -инвариантное скалярное умножение в $\mathfrak{g}$ выбрано так, что подпространства $\mathfrak{k}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ортогональны, то

$$([a, b], a) = 0$$

для любых $a \in \mathfrak{a}, b \in \mathfrak{b}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать подпространства $\mathfrak{k}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ортогональными (что всегда можно сделать) и обозначим через $\mathfrak{c}$ ортогональное дополнение к $\mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$. Пусть P и Q – ортогональные проекторы на $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ соответственно. Записывая условие (82) для дифференциалов инвариантов $\varphi(x) = (Px, x)$ и $\psi(x) = (Qx, x)$ в точке $\lambda a + \mu b + c$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}, a \in \mathfrak{a}, b \in \mathfrak{b}, c \in \mathfrak{c}$), получаем, что

$$([a, b], \lambda a + \mu b + c) = 0,$$

откуда все следует.

ЛЕММА 4. Пусть $L \subset G$ – связная подгруппа Ли, содержащая K , и $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ – L -инвариантное подпространство, дополнительное к $\mathfrak{l}$. Тогда

$$\mathbb{R}[\mathfrak{p}]^L = \mathbb{R}[\mathfrak{p}]^K.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $\mathfrak{p} \perp \mathfrak{l}$. Пусть $\mathfrak{q}$ – ортогональное дополнение к $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{g}$. Применяя второе утверждение леммы 3 к подпространствам $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$, получаем, что $\mathfrak{l}$ действует на $\mathfrak{p}$ кососимметрическими операторами.

Далее, пусть Q – ортогональный проектор на $\mathfrak{q}$. Записывая условие (82) для дифференциалов инвариантов $\varphi \in \mathbb{R}[\mathfrak{p}]^K \subset \mathbb{R}[\mathfrak{m}]^K$ и $\psi(x) = (Qx, x)$ в точке $a + b$ ($a \in \mathfrak{p}, b \in \mathfrak{q}$), получаем:

$$([\text{grad}_a \varphi, b], a + b) = 0.$$

Учитывая, что $\text{grad}_a \varphi \in \mathfrak{p}$ и $\text{ad}(b)$ по доказанному выше действует на $\mathfrak{p}$ как кососимметрический оператор, это равенство можно переписать в виде

$$(\partial_{[a, b]} \varphi)(a) = 0.$$

Это означает, что полином $\varphi \in \mathbb{R}[\mathfrak{p}]$ постоянен на орбитах группы L , т.е. $\varphi \in \mathbb{R}[\mathfrak{p}]^L$.

4. Следующая теорема описывает структуру слабо коммутативных однородных пространств нередуктивных групп Ли.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $X = G/K$ – односвязное слабо коммутативное риманово однородное пространство связной группы Ли G . Тогда $G = N \ltimes L$, где

- 1) N – не более чем 2-ступенно нильпотентная односвязная группа Ли;
- 2) L – связная редуктивная подгруппа Ли, содержащая K ;
- 3) $\mathbb{R}[\mathfrak{n}]^L = \mathbb{R}[\mathfrak{n}]^K$.

В частности, из 3) следует, что группа $\text{Ad}_n(L)$ содержится в ортогональной группе $O(\mathfrak{n})$ пространства $\mathfrak{n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{n}$ – наибольший нильпотентный идеал алгебры $\mathfrak{g}$. Легко видеть, что $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{k} = 0$. Пусть $\mathfrak{a}$ – ортогональное дополнение к $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ в $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{b}$ – ортогональное дополнение к $[[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}], \mathfrak{n}]$ в $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$. Очевидно, что это K -инвариантные подпространства. Применяя к ним лемму 3, получаем, что $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = 0$. Это означает, что $[[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}], \mathfrak{n}] = 0$.

Пусть, далее, $\mathfrak{r}$ – радикал и $\mathfrak{s}$ – максимальная полупростая подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$. Подалгебру $\mathfrak{s}$ можно выбрать K -инвариантной. Тогда $\mathfrak{k} + \mathfrak{s}$ будет редуктивной подалгеброй. Легко видеть, что $\mathfrak{n} \cap (\mathfrak{k} + \mathfrak{s}) = 0$. Поэтому существует такое $(\mathfrak{k} + \mathfrak{s})$ -инвариантное подпространство $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{r}$, что $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{c} = 0$ и $\mathfrak{n} + \mathfrak{c}$ – подпространство, дополнительное к $\mathfrak{k} + \mathfrak{s}$. Так как $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{n}$ [19], то $[\mathfrak{k} + \mathfrak{s}, \mathfrak{c}] = 0$. Применяя лемму 3 к одномерным подпространствам пространства $\mathfrak{c}$, получаем, что $\mathfrak{c}$ – коммутативная подалгебра. Положим теперь $\mathfrak{l} = \mathfrak{c} + \mathfrak{k} + \mathfrak{s}$; тогда

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{l}.$$

Из односвязности пространства X следует, что $G = N \rtimes L$, где N и L – связные подгруппы Ли с касательными алгебрами $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{l}$ соответственно, причем подгруппа N односвязна и $L \supset K$. Применяя лемму 4 к подгруппе L и подпространству $\mathfrak{n}$, получаем свойство 3).

В силу следствия 3 предложения 10 однородные пространства L/K и $(N \rtimes K)/K$ слабо коммутативны. Принимая во внимание, что описание слабо коммутативных однородных пространств редуктивных групп Ли нами уже дано, следующим шагом должно быть описание слабо коммутативных однородных пространств вида $(N \rtimes K)/K$. Этой проблеме и будет посвящена оставшаяся часть параграфа.

5. Риманово однородное пространство вида $X = (N \rtimes K)/K$, где N – не более чем 2-ступенно нильпотентная односвязная группа Ли, будем называть пространством *гейзенбергова типа*.

Если группа N абелева, то X есть просто евклидово пространство с некоторой выделенной группой движений, содержащей все параллельные переносы. Очевидно, что такое однородное пространство слабо коммутативно и даже коммутативно, так как инвариантные дифференциальные операторы на нем – это K -инвариантные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами.

Дадим критерий слабой коммутативности произвольного однородного пространства гейзенбергова типа.

Пусть $\mathfrak{z}$ – коммутант алгебры Ли $\mathfrak{n}$ (содержащийся в ее центре) и $\mathfrak{v}$ – какое-либо K -инвариантное дополнительное подпространство. Для любой линейной функции $\alpha \in \mathfrak{z}^*$ обозначим через $\hat{\alpha}$ кососимметрическую билинейную функцию на $\mathfrak{v}$, определяемую по формуле

$$\hat{\alpha}(\xi, \eta) = \alpha([\xi, \eta]). \quad (83)$$

Пусть K_α – стабилизатор функции α в группе K . Естественное линейное представление группы K_α в симплектическом векторном пространстве $\mathfrak{v}_\alpha = \mathfrak{v} / \text{Ker } \hat{\alpha}$ является симплектическим.

Для любой линейной функции $\beta \in (\text{Ker } \hat{\alpha})^*$ обозначим через $K_{\alpha, \beta}$ ее стабилизатор в группе K_α .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. *Однородное пространство $X = (N \rtimes K)/K$ гейзенбергова типа слабо коммутативно тогда и только тогда, когда для любой линейной функции $\alpha \in \mathfrak{z}^*$ общего положения и любой линейной функции $\beta \in (\text{Ker } \hat{\alpha})^*$ общего*

положения естественное линейное действие группы $K_{\alpha,\beta}$ в симплектическом векторном пространстве $\mathfrak{v}_\alpha$ является коизотропным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно следствию предложения 9 пространство X слабо коммутативно тогда и только тогда, когда для любой линейной функции $\delta \in \mathfrak{n}^*$ общего положения выполнено условие

$$\delta([(ad^*(\mathfrak{k})\delta)^\circ, (ad^*(\mathfrak{k})\delta)^\circ]) = 0. \quad (84)$$

Пусть α – ограничение δ на $\mathfrak{z}$. Выберем какое-нибудь K -инвариантное подпространство $\mathfrak{w}_\alpha$, дополнительное к $\text{Ker } \hat{\alpha}$ в $\mathfrak{v}$. Тогда $\mathfrak{n}^* = \mathfrak{z}^* \oplus (\text{Ker } \hat{\alpha})^* \oplus \mathfrak{w}_\alpha^*$ и в соответствии с этим

$$\delta = \alpha + \beta + \gamma,$$

где β – ограничение δ на $\text{Ker } \hat{\alpha}$, а γ – ограничение δ на $\mathfrak{w}_\alpha$.

Проекция подпространства $(ad^*(\mathfrak{k})\delta)^\circ \subset \mathfrak{n}$ на $\mathfrak{w}_\alpha$ равна $(ad^*(\mathfrak{k}_{\alpha,\beta})\gamma)^\circ$, где аннулятор берется в $\mathfrak{w}_\alpha$. Поэтому условие (84) переписывается в следующем виде:

$$\hat{\alpha}((ad^*(\mathfrak{k}_{\alpha,\beta})\gamma)^\circ, (ad^*(\mathfrak{k}_{\alpha,\beta})\gamma)^\circ) = 0;$$

но это и есть условие коизотропности действия группы $K_{\alpha,\beta}$ в $\mathfrak{w}_\alpha$ (или в $\mathfrak{v}_\alpha$, что все равно).

Выясним теперь, когда симплектическое линейное действие компактной группы Ли является коизотропным.

Пусть задано линейное представление компактной группы Ли L в вещественном векторном пространстве V , сохраняющее невырожденную 2-форму ω . Продолжим его до линейного представления группы $L(\mathbb{C})$ в пространстве $V(\mathbb{C})$. Полученное представление группы $L(\mathbb{C})$, будучи одновременно симплектическим и ортогональным, разлагается в сумму двух сопряженных друг другу представлений.

Более точно, пространство $V(\mathbb{C})$ может быть разложено в прямую сумму двух $L(\mathbb{C})$ -инвариантных изотропных подпространств, двойственных относительно формы ω :

$$V(\mathbb{C}) = U \oplus U^*. \quad (85)$$

(Это разложение, вообще говоря, не единственно.)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. *Симплектическое линейное действие компактной группы Ли L в вещественном векторном пространстве V коизотропно тогда и только тогда, когда определенное выше действие $L(\mathbb{C}) : U$ является сферическим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что действие $L : V$ коизотропно тогда и только тогда, когда действие $L(\mathbb{C}) : V(\mathbb{C})$ коизотропно. Ввиду разложения (85) последнее действие можно рассматривать как действие $L(\mathbb{C}) : T^*U$, и доказываемое утверждение вытекает из теоремы 2.

Сферических линейных представлений редуктивных алгебраических групп немного, и они все известны [42]–[45], [37]. С учетом этого предложения 11 и 12 дают эффективный критерий слабой коммутативности однородного пространства гейзенбергова типа.

Точно такой же критерий, но для коммутативности однородного пространства гейзенбергова типа получен в [46] и [47] (см. также [48]). Отсюда вытекает

ТЕОРЕМА 6. *Всякое слабо коммутативное однородное пространство гейзенбергова типа коммутативно.*

Независимое доказательство этой теоремы будет дано в следующем пункте.

6. Напомним, что алгеброй Вейля $W(V)$ симплектического векторного пространства (V, ω) называется ассоциативная алгебра с единицей, порожденная пространством V , с определяющими соотношениями

$$xy - yx = \omega(x, y) \quad (x, y \in V).$$

Всякое симплектическое преобразование пространства V естественным образом порождает автоморфизм алгебры $W(V)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. *Симплектическое линейное действие компактной группы Ли L в вещественном пространстве V коизотропно тогда и только тогда, когда алгебра $W(V)^L$ коммутативна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Алгебра $W(V)$ имеет естественную фильтрацию по степени выражения ее элемента через образующие:

$$W(V) = \bigcup_{n=0}^{\infty} W^{(n)}(V).$$

Ассоциированная градуированная алгебра есть симметрическая алгебра $S(V)$. Нетрудно видеть, что

$$[W^{(m)}(V), W^{(n)}(V)] \subset W^{(m+n-2)}(V).$$

Поэтому, модифицируя конструкцию, изложенную в §4 главы I, можно превратить алгебру $S(V)$ в градуированную алгебру Пуассона

$$P(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} P_n(V)$$

так, что

$$\{P_m(V), P_n(V)\} \subset P_{m+n-2}(V).$$

Отождествляя пространство V с сопряженным пространством посредством структурной 2-формы ω , мы можем рассматривать алгебру $S(V)$ как алгебру полиномиальных функций на V . Определенная выше скобка Пуассона будет тогда совпадать с обычной скобкой Пуассона в смысле (постоянной) симплектической структуры пространства V . В самом деле, в силу тождества Лейбница, справедливого для обеих скобок, достаточно проверить это для линейных функций, т.е. для элементов пространства V ; но для любых $x, y \in V$ обе скобки равны (константе) $\omega(x, y)$.

Коизотропность действия $L : V$ означает коммутативность алгебры Пуассона $P(V)^L$. В соответствии со сказанным выше и в силу полной приводимости линейных представлений группы L эта алгебра есть не что иное, как градуированная алгебра Пуассона, ассоциированная с фильтрованной ассоциативной алгеброй $W(V)^L$. Поэтому если алгебра $W(V)^L$ коммутативна, то и алгебра $P(V)^L$ коммутативна.

Обратно, пусть действие $L : V$ коизотропно. Рассмотрим разложение (85). Согласно предложению 12 действие $L(\mathbb{C}) : U$ является сферическим, т.е. линейное

представление $L(\mathbb{C}) : \mathbb{C}[U]$ имеет простой спектр. Отсюда следует, что алгебра всех линейных операторов в $\mathbb{C}[U]$, перестановочных с операторами этого представления, коммутативна. В частности, алгебра $\mathcal{D}(U)^{L(\mathbb{C})}$ инвариантных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами на U коммутативна. Однако $\mathcal{D}(U) = W(U \oplus U^*) = W(V(\mathbb{C}))$ и, значит, $\mathcal{D}(U)^{L(\mathbb{C})} = W(V(\mathbb{C}))^{L(\mathbb{C})} = W(V)^L(\mathbb{C})$. Следовательно, алгебра $W(V)^L$ коммутативна.

Аналогичное утверждение, по-видимому, справедливо для любой редуктивной алгебраической подгруппы симплектической группы комплексного векторного пространства. По крайней мере, доказательство того, что коммутативность алгебры $W(V)^L$ влечет коизотропность действия $L : V$, проходит без изменений в этой ситуации. Доказательство обратной импликации проходит при наличии L -инвариантной симметрической билинейной функции в пространстве V , но в общем случае оно требует какой-то новой идеи.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Пусть $X = G/K$, где $G = N \rtimes K$, – слабо коммутативное однородное пространство гейзенбергова типа. Докажем, что алгебра $\mathcal{D}(X)^G$ инвариантных дифференциальных операторов на X коммутативна.

Пространство X можно отождествить с группой N так, что сама группа N будет действовать на нем левыми сдвигами, а группа K – сопряжениями. При этом алгебра $\mathcal{D}(X)^N$ будет естественно изоморфна обертывающей алгебре $U(\mathfrak{n})$ алгебры Ли $\mathfrak{n}$ (см. п. 2.5 главы I), а алгебра $\mathcal{D}(X)^G$ – подалгебре $U(\mathfrak{n})^K \subset U(\mathfrak{n})$. Таким образом, нам надо доказать коммутативность алгебры $U(\mathfrak{n})^K$.

В обозначениях п. 5 алгебру $U(\mathfrak{n})$ можно рассматривать как алгебру сечений расслоения над $\text{Spec } S(\mathfrak{z}) = \mathfrak{z}^*$, слой которого над точкой $\alpha \in \mathfrak{z}^*$ есть алгебра

$$W_\alpha(\mathfrak{v}) = U(\mathfrak{n})/(\xi - \alpha(\xi) : \xi \in \mathfrak{z}),$$

представляющая собой не что иное, как (может быть, вырожденную) алгебру Вейля, определяемую формой $\hat{\alpha}$ на пространстве $\mathfrak{v}$. Элементам подалгебры $U(\mathfrak{n})^K$ будут при этом отвечать K -инвариантные сечения. Так как значение K -инвариантного сечения в точке $\alpha \in \mathfrak{z}^*$ принадлежит подалгебре $W_\alpha(\mathfrak{v})^{K_\alpha}$, то для доказательства коммутативности алгебры $U(\mathfrak{n})^K$ достаточно доказать коммутативность алгебры $W_\alpha(\mathfrak{v})^{K_\alpha}$ для любой точки $\alpha \in \mathfrak{z}^*$ общего положения.

В свою очередь, если форма $\hat{\alpha}$ вырождена, алгебру $W_\alpha(\mathfrak{v})$ можно рассматривать как алгебру сечений расслоения над $\text{Spec } S(\text{Ker } \hat{\alpha}) = (\text{Ker } \hat{\alpha})^*$, слой которого над точкой $\beta \in (\text{Ker } \hat{\alpha})^*$ есть алгебра Вейля $W_{\alpha,\beta}(\mathfrak{w}_\alpha)$, определяемая формой $\hat{\alpha}$ на пространстве $\mathfrak{w}_\alpha$. Элементам подалгебры $W_\alpha(\mathfrak{v})^{K_\alpha}$ будут при этом отвечать $K_{\alpha,\beta}$ -инвариантные сечения. Поэтому для доказательства коммутативности алгебры $W_\alpha(\mathfrak{v})^{K_\alpha}$ достаточно доказать коммутативность алгебры $W_{\alpha,\beta}(\mathfrak{w}_\alpha)^{K_{\alpha,\beta}}$ для любой точки $\beta \in (\text{Ker } \hat{\alpha})^*$ общего положения.

Согласно предложению 13 коммутативность алгебры $W_{\alpha,\beta}(\mathfrak{w}_\alpha)^{K_{\alpha,\beta}}$ равносильна коизотропности действия $K_{\alpha,\beta} : \mathfrak{w}_\alpha$; но последняя имеет место в силу предложения 11.

7. Вернемся к проблеме классификации (слабо) коммутативных однородных пространств гейзенбергова типа.

Пусть $X = (N \rtimes K)/K$ – такое пространство. Будем использовать обозначения п. 5.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. Для любых инвариантов $\varphi, \psi \in \mathbb{R}[\mathfrak{v}]^K$ и любой точки $a \in \mathfrak{v}$ выполняется соотношение

$$[\mathrm{grad}_a \varphi, \mathrm{grad}_a \psi] = 0. \quad (86)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $\mathfrak{v} \perp \mathfrak{z}$. Рассматривая φ и ψ как инварианты на $\mathfrak{n}$ и записывая соотношение (82) для их дифференциалов в точке $a + b$ ($a \in \mathfrak{v}$, $b \in \mathfrak{z}$), получаем:

$$(b, [\mathrm{grad}_a \varphi, \mathrm{grad}_a \psi]) = 0.$$

Так как b может быть любым элементом из $\mathfrak{z}$, то отсюда следует (86).

Рассмотрим какое-либо разложение пространства $\mathfrak{v}$ в прямую сумму минимальных K -инвариантных подпространств:

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{v}_s.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15. 1) $[\mathfrak{v}_i, \mathfrak{v}_j] = 0$ при $i \neq j$.

2) Если K -модули $\mathfrak{v}_i$ и $\mathfrak{v}_j$ ($i \neq j$) изоморфны, то $[\mathfrak{v}_i, \mathfrak{v}_i] = [\mathfrak{v}_j, \mathfrak{v}_j] = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение получается применением леммы 3 к подпространствам $\mathfrak{v}_i$ и $\mathfrak{v}_j$. Второе утверждение получается с учетом первого применением той же леммы к другим минимальным инвариантным подпространствам суммы $\mathfrak{v}_i \oplus \mathfrak{v}_j$, например, к $\mathfrak{v}_i$ и диагонали этой суммы.

Пространство X назовем *неприводимым*, если представление $K : \mathfrak{v}$ неприводимо, т.е. $s = 1$.

В общем случае для любого $i = 1, \dots, s$ можно рассмотреть K -инвариантную подалгебру

$$\mathfrak{n}_i = \mathfrak{v}_i + [\mathfrak{v}_i, \mathfrak{v}_i] \subset \mathfrak{n}$$

и соответствующую ей связную подгруппу N_i группы N ; тогда в силу следствия 3 предложения 10 однородное пространство $X_i = (N_i \rtimes K)/K$ также коммутативно (но группа K может действовать на нем не эффективно). Назовем его *неприводимой компонентой* пространства X . Предложение 15 показывает, что пространство X достаточно просто (но все же, быть может, не тривиально) составляется из своих неприводимых компонент.

Далее, если $\mathfrak{z}_0 \subset \mathfrak{z}$ – какое-либо K -инвариантное подпространство и $Z_0 \subset Z$ – соответствующая связная подгруппа, то в силу следствия 1 предложения 10 однородное пространство $X/Z_0 = ((N/Z_0) \rtimes K)/K$ также коммутативно. Переход от X к X/Z_0 назовем *центральной редукцией*. Коммутативное однородное пространство X гейзенбергова типа назовем *максимальным*, если оно не может быть получено нетривиальной центральной редукцией из большего коммутативного однородного пространства гейзенбергова типа.

В таблице 3 перечислены все максимальные неприводимые коммутативные однородные пространства гейзенбергова типа с неабелевой группой N (т.е. с $\mathfrak{z} \neq 0$) с точностью до возможной замены группы SU_n на U_n во всех случаях, где эта группа встречается. При этом используются следующие обозначения:

$\mathbb{H}$ – алгебра кватернионов;

$\mathbb{H}_0$ – пространство чисто мнимых кватернионов;

$\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{H}^n$ (и $\mathbb{H}^n \otimes \mathbb{C}^m$) – тензорное произведение над $\mathbb{C}$;

$\mathbb{H}^m \otimes \mathbb{H}^n$ – тензорное произведение над $\mathbb{H}$;

HS^2 – эрмитов квадрат;

$H\Lambda^2$ – косоэрмитов квадрат;

$HS_0^2\mathbb{H}^n$ – пространство эрмитовых кватернионных матриц порядка n с нулевым следом.

ТАБЛИЦА 3
(Все группы – вещественные.)

	K	$\mathfrak{v}$	$\mathfrak{z}$	
1	SO_n	$\mathbb{R}^n$	$\Lambda^2\mathbb{R}^n$	
2	$U_1 \times SO_n$	$\mathbb{C}^n$	$\mathbb{R}$	
3	SU_n	$\mathbb{C}^n$	$\Lambda^2\mathbb{C}^n$	n нечетно
4	SU_n	$\mathbb{C}^n$	$\mathbb{R}$	n нечетно
5	SU_n	$\mathbb{C}^n$	$\Lambda^2\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{R}$	n четно
6	U_n	$\mathbb{C}^n$	$H\Lambda^2\mathbb{C}^n$	
7	$SU_2 \times SU_n$	$\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^n$	$H\Lambda^2\mathbb{C}^2$	
8	$Sp_2 \times SU_n$	$\mathbb{H}^2 \otimes \mathbb{C}^n$	$\mathbb{R}$	$n \geq 5$
9	$Sp_2 \times U_n$	$\mathbb{H}^2 \otimes \mathbb{C}^n$	$\mathbb{R}$	$n \geq 4$
10	$SU_m \times SU_n$	$\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$	$\mathbb{R}$	
11	Sp_n	$\mathbb{H}^n$	$HS_0^2\mathbb{H}^n \oplus \mathbb{H}_0$	
12	$U_1 \times Sp_n$	$\mathbb{H}^n$	$HS_0^2\mathbb{H}^n \oplus \mathbb{H}_0$	
13	$U_2 \times Sp_n$	$\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{H}^n$	$H\Lambda^2\mathbb{C}^2$	
14	$U_3 \times Sp_n$	$\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{H}^n$	$\mathbb{R}$	
15	$Sp_1 \times Sp_n$	$\mathbb{H}^n$	$\mathbb{H}_0$	
16	$Sp_2 \times Sp_n$	$\mathbb{H}^2 \otimes \mathbb{H}^n$	$H\Lambda^2\mathbb{H}^2$	
17	U_n	$S^2\mathbb{C}^n$	$\mathbb{R}$	
18	U_n	$\Lambda^2\mathbb{C}^n$	$\mathbb{R}$	
19	SU_n	$\Lambda^2\mathbb{C}^n$	$\mathbb{R}$	n нечетно
20	$Spin_7$	$\mathbb{R}^8$	$\mathbb{R}^7$	
21	$U_1 \times Spin_7$	$\mathbb{C}^8$	$\mathbb{R}$	
22	$U_1 \times Spin_9$	$\mathbb{C}^{16}$	$\mathbb{R}$	
23	$Spin_{10}$	$\mathbb{C}^{16}$	$\mathbb{R}$	
24	$U_1 \times Spin_{10}$	$\mathbb{C}^{16}$	$\mathbb{R}$	
25	$U_1 \times E_6$	$\mathbb{C}^{27}$	$\mathbb{R}$	
26	G_2	$\mathbb{R}^7$	$\mathbb{R}^7$	
27	$U_1 \times G_2$	$\mathbb{C}^7$	$\mathbb{R}$	

Операция коммутирования $\mathfrak{v} \times \mathfrak{v} \rightarrow \mathfrak{z}$ во всех случаях однозначно определяется условием K -эквивариантности. Например, в строках 11 и 12 коммутатор столбцов

$x, y \in \mathbb{H}^n = \mathfrak{v}$ задается формулой

$$[x, y] = \left((xy^* - yx^*) - \frac{1}{n} (\operatorname{Re} i(y^*x - x^*y))E, y^*x - x^*y \right),$$

где звездочка обозначает транспонирование, совмещенное с кватернионным сопряжением, а E – единичная матрица.

Метод получения этой таблицы состоит в общих чертах в следующем. Предложение 14 показывает, что если неприводимое представление $K : \mathfrak{v}$ настолько велико, что внешние произведения $\operatorname{grad}_a \varphi \wedge \operatorname{grad}_a \psi$ ($\varphi, \psi \in \mathbb{R}[\mathfrak{v}]^K$, $a \in \mathfrak{v}$) порождают пространство $\Lambda^2 \mathfrak{v}$, то $\mathfrak{z} = 0$. Это соображение оставляет сравнительно небольшое число представлений, которые исследуются индивидуально. Детали доказательства будут опубликованы в другом месте.

Отметим, что классификация коммутативных однородных пространств гейзенбергова типа с $\dim \mathfrak{z} = 1$ (сводящаяся ввиду вышеизложенного к классификации сферических представлений) была получена в [46] и [44]. Другой класс коммутативных однородных пространств гейзенбергова типа описан в [49].

Анализируя таблицу 3, можно показать, что почти все неприводимые коммутативные однородные пространства гейзенбергова типа являются слабо симметрическими. Исключение составляют лишь пространства из строк 11 и 12 и некоторые их центральные редукции. В числе последних серия пространств с

$$K = \operatorname{Sp}_n, \quad \mathfrak{v} = \mathbb{H}^n, \quad \mathfrak{z} = \mathbb{H}_0.$$

Это были первые примеры не слабо симметрических коммутативных однородных пространств, построенные в [18].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. М.: Наука, 1988.
- [2] Э. Б. Винберг, В. Л. Попов. Теория инвариантов // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фунд. напр. Т. 55. М.: ВИНТИ, 1989. С. 137–309.
- [3] S. Helgason. Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces. London: Academic Press, 1978.
- [4] A. Selberg. Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series // J. Indian Math. Soc. 1956. V. 20. P. 47–87.
- [5] J. Berndt, F. Prüfer, L. Vanhecke. Symmetric-like Riemannian manifolds and geodesic symmetries // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 1995. V. 125. P. 265–282.
- [6] S. Nagai. Weakly symmetric spaces in complex and quaternionic space forms // Arch. Math. 1995. V. 65. P. 342–351.
- [7] J. Berndt, L. Vanhecke. Geometry of weakly symmetric spaces // J. Math. Soc. Japan. 1996. V. 48. P. 745–760.
- [8] O. Kowalski, F. Prüfer, L. Vanhecke. D'Atri Spaces // Topics in Geometry: Honoring the Memory of Joseph D'Atri / ed. S. Gindikin. Boston: Birkhäuser, 1996. P. 241–284.
- [9] W. Ziller. Weakly symmetric spaces // Topics in Geometry: Honoring the Memory of Joseph D'Atri / ed. S. Gindikin. Boston: Birkhäuser, 1996. P. 355–368.
- [10] H. Nguyen. Weakly symmetric spaces and bounded symmetric domains // Transformation Groups. 1997. V. 2. P. 351–374.
- [11] А. А. Кириллов. Введение в теорию представлений и некоммутативный гармонический анализ // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фунд. напр. Т. 22. М.: ВИНТИ, 1988. С. 5–162.

- [12] Ф. А. Березин, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, М. А. Наймарк. Представление групп // УМН. 1956. Т. 11. № 6. С. 13–40.
- [13] И. М. Гельфанд. Сферические функции на симметрических римановых пространствах // Докл. АН СССР. 1950. Т. 70. С. 5–8.
- [14] Н. Бурбаки. Интегрирование. М.: Наука, 1967.
- [15] H. Grauert. On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds // Ann. Math. (2). 1958. V. 68. P. 460–472; // Математика 1960. Т. 4. № 3. С. 29–40.
- [16] С. Хелгасон. Группы и геометрический анализ. М.: Мир, 1987.
- [17] E. G. F. Thomas. An infinitesimal characterization of Gelfand pairs // Contemp. Math. 1984. V. 26. P. 379–385.
- [18] J. Lauret. Commutative spaces which are not weakly symmetric // Bull. London Math. Soc. 1998. V. 30. P. 29–36.
- [19] К. Шевалле. Теория групп Ли. Т. III. М.: ИЛ, 1958.
- [20] Э. Б. Винберг, Б. Н. Кимельфельд. Однородные области на флаговых многообразиях и сферические подгруппы простых групп Ли // Функц. анализ и его прил. 1978. Т. 12. № 1. С. 12–19.
- [21] M. Krämer. Sphärische Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen // Compositio Math. 1979. V. 38. P. 129–153.
- [22] И. В. Микитюк. Об интегрируемости инвариантных гамильтоновых систем с однородными конфигурационными пространствами // Матем. сб. 1986. Т. 129. С. 514–534.
- [23] M. Brion. Classification des espaces homogènes sphériques // Compositio Math. 1987. V. 63. P. 189–208.
- [24] E. Vinberg. On stability of actions of reductive algebraic groups // Lie Algebras, Rings and Related Topics / ed. Y. Fong, A. A. Mikhalev, E. Zelmanov. Berlin: Springer-Verlag, 2000. P. 188–202.
- [25] D. N. Akhiezer, E. B. Vinberg. Weakly symmetric spaces and spherical varieties // Transformation Groups. 1999. V. 4. P. 3–24.
- [26] R. Steinberg. Endomorphisms of Algebraic Groups. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1968. (Mem. Amer. Math. Soc. V. 80.)
- [27] Э. Б. Винберг, В. В. Горбачевич, А. Л. Онищик. Строение групп и алгебр Ли // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фунд. напр. Т. 41. М.: ВИНТИ, 1990. С. 5–253.
- [28] V. Guillemin, S. Sternberg. Multiplicity-free spaces // J. Differential Geom. 1984. V. 19. P. 31–56.
- [29] В. И. Арнольд, А. Б. Гивенталь. Симплектическая геометрия // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фунд. напр. Т. 4. М.: ВИНТИ, 1985. С. 5–139.
- [30] Б. А. Дубровин, И. М. Кричевер, С. П. Новиков. Интегрируемые системы. I // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фунд. напр. Т. 4. М.: ВИНТИ, 1985. С. 179–285.
- [31] В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. М.: МГУ, 1995.
- [32] W. Borho, H. Kraft. Über Bahnen und deren Deformationen bei linearen Aktionen reductiver Gruppen // Comment. Math. Helv. 1979. V. 54. P. 61–104.
- [33] F. Knop. Weylgruppe und Momentabbildung // Invent. Math. 1990. V. 99. P. 1–23.
- [34] M. Brion, D. Luna, T. Vust. Espaces homogènes sphériques // Invent. Math. 1986. V. 84. P. 617–632.
- [35] F. D. Grosshans. Constructing invariant polynomials via Tschirnhaus transformations // Lecture Notes in Math. 1985. V. 1278. P. 95–102.
- [36] F. Knop. The asymptotic behavior of invariant collective motion // Invent. Math. 1994. V. 116. P. 309–328.
- [37] F. Knop. Some remarks on multiplicity free spaces // Representation Theories and Algebraic Geometry / ed. A. Broer, A. Daigneault. Dordrecht: Kluwer, 1998. P. 301–317.
- [38] H. Sumihiro. Equivariant completion // J. Math. Kyoto Univ. 1974. V. 14. P. 1–28.
- [39] T. Kambayashi. Projective representation of algebraic linear groups of transformations // Amer. J. Math. 1966. V. 88. P. 199–205.

- [40] F. Кноп. Über Bewertungen, welche unter einer reductiven Gruppe invariant sind // Math. Ann. 1993. V. 295. P. 333–363.
- [41] И. М. Гельфанд, М. И. Граев. Геометрия однородных пространств, представления групп в однородных пространствах и связанные с ними вопросы интегральной геометрии. I // Труды ММО. 1959. Т. 8. С. 321–390.
- [42] V. Кас. Some remarks on nilpotent orbits // J. Algebra. 1980. V. 64. P. 190–213.
- [43] M. Brion. Représentations exceptionnelles des groupes semi-simples // Ann. Sci. École Norm. Sup. (4). 1985. V. 18. P. 345–387.
- [44] C. Benson, G. Ratkliff. A classification of multiplicity free actions // J. Algebra. 1996. V. 181. P. 152–186.
- [45] A. Leahy. A classification of multiplicity free representations // J. Lie Theory. 1998. V. 8. P. 367–391.
- [46] C. Benson, J. Jenkins, G. Ratkliff. On Gelfand pairs associated with solvable Lie groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1990. V. 321. P. 85–116.
- [47] K. Kikuchi. On Gelfand pairs associated with nilpotent Lie groups // J. Math. Kyoto Univ. 1994. V. 34. P. 741–754.
- [48] C. Benson, J. Jenkins, G. Ratkliff. The orbit method and Gelfand pairs associated with nilpotent Lie groups // J. Geom. Anal. 1999. V. 9. P. 569–582.
- [49] J. Lauret. Gelfand pairs attached to representations of compact Lie groups // Transformation Groups. 2000. V. 5. P. 307–324.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
12.10.2000