Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Жибер, В. В. Соколов, Точно интегрируемые гиперболические уравнения
лиувиллевого типа, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 1, 63–106

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm357>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 13:08:46

УДК 517.957+514.85

ТОЧНО ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЛИУВИЛЛЕВСКОГО ТИПА

А. В. ЖИБЕР, В. В. СОКОЛОВ

Статья является обзором результатов авторов, посвященных нелинейным гиперболическим уравнениям лиувиллевого типа. В качестве определения выбирается условие двустороннего обрыва цепочки инвариантов Лапласа для линеаризованного уравнения. В числе новых результатов приводится процедура нахождения общего решения и формулируется ответ в задаче классификации уравнений лиувиллевого типа.

Библиография: 46 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение	64
§ 2. Преобразование и инварианты Лапласа	66
2.1. Преобразование Лапласа для линейных уравнений	66
2.2. Инварианты Лапласа для линеаризованного уравнения	68
2.3. Уравнения с цепочкой инвариантов Лапласа длины два	72
2.4. Интегралы	74
§ 3. Построение точных решений.	76
3.1. Общая схема	76
3.2. Новые примеры	81
§ 4. Высшие симметрии уравнений лиувиллевого типа	86
§ 5. Уравнения лиувиллевого типа и преобразования Миуры для эволюционных уравнений	88
§ 6. Список уравнений лиувиллевого типа	92
6.1. Список	92
6.2. Комментарии	95
§ 7. Заключительные замечания	96
7.1. Об одном свойстве оператора $\mathcal{L}$	96
7.2. Системы лиувиллевого типа	99
7.3. Уравнения типа sin-Gordon	102
Список литературы	104

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № № 99-01-00431 и 99-01-00294). Второй автор также был поддержан проектом INTAS (грант № 1782).

§ 1. Введение

На ранних этапах своего развития теория уравнений в частных производных в качестве одной из основных выдвигала проблему нахождения и исследования уравнений, допускающих явное интегрирование. Такие классики математики 18–19 веков, как Эйлер, Лагранж, Лиувиль, Лаплас, Дарбу, Ли, Якоби, Гурса и другие, разработали много приемов для нахождения точных решений дифференциальных уравнений в частных производных (см. [1]–[7]).

В начале 20-го века сильнейшее влияние математической физики привело к переоценке ценностей в теории уравнений в частных производных. В результате ряд классических результатов, касающихся точного интегрирования, оказался основательно забыт даже специалистами. В настоящее время интерес к этим результатам значительно возрос в связи с открытием нового фундаментального метода точного интегрирования нелинейных уравнений в частных производных: метода обратной задачи рассеяния (см. [8], [9]).

Общеизвестным примером точно интегрируемого нелинейного уравнения в частных производных является уравнение Лиувилля

$$u_{xy} = \exp u. \quad (1.1)$$

Изучение формальных свойств этого уравнения привело (см. [1], [6], [10]–[16]) к различным, вообще говоря неэквивалентным, определениям класса точно интегрируемых гиперболических уравнений лиувиллевого типа. В частности, в работах [17]–[20] в качестве определения было выбрано свойство конечности цепочки инвариантов Лапласа линеаризованного уравнения. В статье [21] этот подход был обобщен на случай произвольных уравнений второго порядка вида $F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0$.

Определение оказалось удачным, поскольку позволило использовать несколько красивых классических тождеств (см. [3]), связанных с инвариантами Лапласа. В результате были найдены общие формулы (см. § 4), позволяющие для таких уравнений в терминах инвариантов Лапласа описать высшие симметрии [19] и законы сохранения [17], [18]. Кроме того, была предложена единая процедура нахождения общего решения уравнения лиувиллевого типа. Соответствующие результаты впервые публикуются в § 3 настоящей работы.

Для конкретного уравнения при проверке конечности цепочки используются только алгебраические операции и операция дифференцирования. Поэтому выкладки легко могут быть проделаны на компьютере с помощью любой из систем аналитических вычислений.

Свойство обрыва цепочки инвариантов Лапласа может быть положено в основу классификации уравнений лиувиллевого типа. В результате попыток авторов полностью перечислить уравнения

$$u_{xy} = F(x, y, u, u_x, u_y) \quad (1.2)$$

лиувиллевого типа были найдены два новых примера таких уравнений. В § 3 для этих примеров найдена явная формула для общего решения.

Общий классификационный результат впервые сформулирован в §6 настоящей работы. Однако, поскольку вычисления оказались чрезвычайно трудоемкими и полное доказательство классификационной теоремы занимает около 200 страниц, имеется маленькая, но ненулевая вероятность ошибки в выкладках.

Отметим, что общая задача классификации интегрируемых уравнений (1.2), включающая в себя описание не только уравнений лиувиллевого типа, но и интегрируемых методом обратной задачи уравнений типа уравнения sin-Gordon $u_{xy} = \sin u$, является чрезвычайно сложной. Несмотря на частные результаты, полученные в рамках симметричного подхода [22], [23], исследования далеки от своего завершения. Относительно недавно появился новый пример такого уравнения [24], [25]. Это уравнение имеет вид

$$u_{xy} = S(u) \sqrt{1 - u_x^2} \sqrt{1 - u_y^2}. \quad (1.3)$$

Здесь S – любое решение обыкновенного дифференциального уравнения вида

$$S'' - 2S^3 + \lambda S = 0,$$

где λ – произвольная постоянная. В случае общего положения $S(u)$ – эллиптический синус Якоби. Уравнение (1.3) связано с уравнением

$$v_{xy} = c \sin v$$

дифференциальной подстановкой

$$v = \arcsin u_x + \arcsin u_y + P(u),$$

где $P'^2 = 2S' - 2S^2 + \lambda$. Константа c определяется значением первого интеграла $I = S'^2 - S^4 + \lambda S^2$ с помощью формулы $I = c^2$.

Вырождение

$$u_{xy} = \frac{1}{u} \sqrt{1 - u_x^2} \sqrt{1 - u_y^2} \quad (1.4)$$

уравнения (1.3) является уравнением лиувиллевого типа и используется в качестве иллюстративного примера в §3.

В §7 настоящей работы содержится новое интегрируемое уравнение вида (1.2), связанное дифференциальной подстановкой с уравнением Цицейки. Там же приведен список известных в настоящий момент уравнений типа sin-Gordon и сформулирована гипотеза о его полноте.

В теории интегрируемых эволюционных уравнений хорошо известно преобразование Миуры $w = u_x - \frac{1}{2}u^2$, связывающее модифицированное уравнение Кортевега–де Фриза

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3}{2}u^2 u_x$$

с уравнением Кортевега–де Фриза

$$w_t = w_{xxx} + 3ww_x.$$

Оказывается, что такие преобразования тесно связаны с гиперболическими уравнениями лиувилевского типа. В частности, преобразование Миуры порождается уравнением $u_{xy} = uu_y$. Соответствующая теория изложена в § 5.

В § 7 определение уравнений лиувилевского типа обобщено на случай нелинейных гиперболических систем вида

$$\vec{u}_{xy} = \vec{F}(x, y, \vec{u}, \vec{u}_x, \vec{u}_y). \quad (1.5)$$

Статья представляет собой обзор результатов авторов, полученных за последние шесть лет и частично опубликованных в [19], [20], [25].

Авторы благодарны Н. Камрану, М. В. Павлову, С. Я. Старцеву, Е. В. Ферапонтову, С. П. Цареву и А. Б. Шабату за внимание к работе и многочисленные полезные обсуждения.

§ 2. Преобразование и инварианты Лапласа

2.1. Преобразование Лапласа для линейных уравнений. В классических работах (см. [3], [26], [27]) преобразования и инварианты Лапласа определялись для линейного гиперболического уравнения вида

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + a(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + c(x, y) \right) V = 0. \quad (2.1)$$

Нетрудно проверить, что функции

$$h_0 = \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c, \quad k_0 = \frac{\partial b}{\partial y} + ab - c \quad (2.2)$$

являются инвариантами при преобразованиях вида $V \rightarrow \alpha(x, y)V$. Они называются главными инвариантами Лапласа уравнения (2.1).

Легко видеть, что уравнение (2.1) может быть переписано в виде системы

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + a \right) V = V_1, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} + b \right) V_1 = h_0 V. \quad (2.3)$$

Если $h_0 \neq 0$, то функция V_1 , определенная первой из формул (2.3), удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + a_1(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b_1(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + c_1(x, y) \right) V_1 = 0, \quad (2.4)$$

где

$$a_1 = a - (\ln h_0)_y, \quad b_1 = b, \quad c_1 = a_1 b_1 + b_y - h_0.$$

Уравнение (2.4) называется Y -преобразованием Лапласа уравнения (2.1). Главные инварианты Лапласа уравнения (2.4) задаются формулами

$$h_1 = 2h_0 - k_0 - (\ln h_0)_{xy}, \quad k_1 = h_0.$$

Если $h_1 \neq 0$, можно найти Y -преобразование Лапласа уравнения (2.4) и т. д. В результате получится цепочка уравнений

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + a_i(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b_i(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + c_i(x, y) \right) V_i = 0, \quad i \in \mathbb{N}, \quad (2.5)$$

коэффициенты и инварианты которых связаны между собой соотношениями:

$$\begin{aligned} a_i &= a_{i-1} - (\ln h_{i-1})_y, & b_i &= b_{i-1}, & c_i &= a_i b_i + b_y - h_{i-1}, \\ h_i &= 2h_{i-1} - h_{i-2} - (\ln h_{i-1})_{xy}, & k_i &= h_{i-1}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь $a_0 = a$, $b_0 = b$, $c_0 = c$.

Выясним, как связаны между собой решения уравнений (2.1) и (2.5). Запишем каждое из уравнений (2.5) в виде системы

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + a_i \right) V_i = V_{i+1}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} + b \right) V_{i+1} = h_i V_i, \quad (2.7)$$

где

$$a_i = a - \frac{\partial}{\partial y} \ln(h_0 h_1 \cdots h_{i-1}). \quad (2.8)$$

Положим

$$\psi = \exp \left(- \int a \, dy \right), \quad \bar{\psi} = \exp \left(- \int b \, dx \right). \quad (2.9)$$

Тогда формулы (2.7) могут быть переписаны в виде

$$V_1 = \psi \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\psi} (V), \quad V_{i+1} = \psi h_0 \cdot h_{i-1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\psi h_0 \cdot h_{i-1}} (V_i), \quad i \in \mathbb{N},$$

и

$$V_i = \frac{\bar{\psi}}{h_i} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\bar{\psi}} (V_{i+1}).$$

Отсюда для любого $k \in \mathbb{N}$

$$V_{k+1} = \psi h_0 \cdot h_{k-1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{h_{k-1}} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{h_{k-2}} \cdots \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{h_0} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\psi} (V), \quad (2.10)$$

$$V = \frac{\bar{\psi}}{h_0} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x} \cdots \frac{1}{h_{k-2}} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{h_{k-1}} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\bar{\psi}} (V_k). \quad (2.11)$$

Таким образом, если мы умеем решать уравнение (2.1), то можем решить и любое из уравнений (2.5), и наоборот.

X -преобразование Лапласа определяется аналогично. А именно, уравнение (2.1) эквивалентно системе

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + b \right) V = V_{-1}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial y} + a \right) V_{-1} = k_0 V. \quad (2.12)$$

Если для (2.1) инвариант $h_{-1} \stackrel{\text{def}}{=} k_0$ не равен нулю, то V_{-1} удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + a_{-1}(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b_{-1}(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + c_{-1}(x, y) \right) V_{-1} = 0, \quad (2.13)$$

которое называется X -преобразованием Лапласа уравнения (2.1). Продолжая этот процесс, получаем цепочку уравнений

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + a_{-i}(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b_{-i}(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + c_{-i}(x, y) \right) V_{-i} = 0, \quad i \in \mathbb{N}, \quad (2.14)$$

коэффициенты и инварианты которых связаны между собой соотношениями:

$$\begin{aligned} a_{-i-1} &= a_{-i}, & b_{-i-1} &= b_{-i} - (\ln h_{-i-1})_x, \\ c_{-i-1} &= a_{-i-1} b_{-i-1} + a_x - h_{-i-1}, \\ h_{-i} &= 2h_{-i-1} - h_{-i-2} - (\ln h_{-i-1})_{xy}, & k_{-i} &= h_{-i-1}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Формулы, аналогичные (2.10), (2.11), имеют вид

$$V_{-s-1} = \bar{\psi} h_{-1} \cdot h_{-s} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{h_{-s}} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{h_{-s+1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{h_{-1}} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\bar{\psi}} (V), \quad (2.16)$$

$$V = \frac{\psi}{h_{-1}} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{h_{-2}} \frac{\partial}{\partial y} \cdots \frac{1}{h_{-s+1}} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{h_{-s}} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\psi} (V_{-s}). \quad (2.17)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Множество главных инвариантов h_i , $i \in \mathbb{Z}$, уравнений (2.5) и (2.14) называется последовательностью инвариантов Лапласа для уравнения (2.1).

Согласно формулам (2.6), (2.15) имеем $k_i = h_{i-1}$, $i \in \mathbb{Z}$, и поэтому все инварианты k_i также содержатся в этой последовательности.

Последовательность инвариантов Лапласа однозначно определяется рекуррентной формулой

$$h_i = 2h_{i-1} - h_{i-2} - (\ln h_{i-1})_{xy}, \quad i \in \mathbb{Z},$$

и начальными данными

$$h_0 = \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c, \quad h_{-1} = \frac{\partial b}{\partial y} + ab - c.$$

2.2. Инварианты Лапласа для линейаризованного уравнения. Для заданного решения $u_0(x, y)$ уравнения (1.2) формула $u = u_0 + \varepsilon V + \cdots$ приводит к линейному уравнению для V , коэффициенты которого зависят от u_0 . Поскольку это линейаризованное уравнение имеет вид (2.1), мы можем определить для него последовательность инвариантов Лапласа.

В дальнейшем мы намерены изучать свойства этих инвариантов, общие для *всех* решений уравнения (1.2). Для этого рассмотрим более формальную разновидность

$$\left(D_x \circ D_y - \frac{\partial F}{\partial u_x} D_x - \frac{\partial F}{\partial u_y} D_y - \frac{\partial F}{\partial u} \right) V = 0 \quad (2.18)$$

линеаризованного уравнения (1.2). Здесь $D_x = D$ и $D_y = \overline{D}$ – операторы полного дифференцирования по x и y в силу уравнения (1.2).

Операторы D и $\overline{D}$ являются более сложными объектами, чем операторы частных производных. В частности, для некоторых уравнений (1.2) они имеют нетривиальные ядра, при этом не всегда верно, что решение уравнения $\overline{D}D(Z) = 0$ имеет вид $Z = W + \overline{W}$, где $\overline{D}(W) = D(\overline{W}) = 0$, и т. д. Поэтому при работе с этими операторами требуется соблюдать определенную аккуратность и мы начнем со строгих определений.

Большая часть различных понятий в локальной теории нелинейных дифференциальных уравнений, таких как симметрия, первый интеграл, закон сохранения, представление Лакса и т. д., определяется в терминах некоторых тождеств, которые должны быть выполнены на любом решении u . Для этого необходимо исключать из всех выражений те частные производные от u , которые можно выразить из уравнения и его дифференциальных следствий.

Например, когда речь идет о решениях уравнения (1.2), u_{xy} всегда заменяется на правую часть $F(x, y, u, u_x, u_y)$, u_{xyy} – на выражение

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u} u_y + \frac{\partial F}{\partial u_x} F + \frac{\partial F}{\partial u_y} u_{yy}$$

и т. д. Легко видеть, что таким образом всякая смешанная производная от u может быть выражена через

$$\begin{aligned} x, y, u, u_1 = u_x, u_2 = u_{xx}, u_3 = u_{xxx}, \dots, \\ \overline{u}_1 = u_y, \overline{u}_2 = u_{yy}, \overline{u}_3 = u_{yyy}, \dots \end{aligned} \quad (2.19)$$

Функции (2.19) нельзя связать между собой, пользуясь уравнением (1.2) и его дифференциальными следствиями. Поэтому во всех определениях и выкладках они считаются независимыми переменными.

Операторы D и $\overline{D}$ являются дифференцированиями в пространстве $\mathcal{F}$ локально аналитических функций, зависящих от конечного числа переменных (2.19). Эти дифференцирования однозначно задаются соотношениями

$$\begin{aligned} D(u_k) = u_{k+1}, \quad \overline{D}(\overline{u}_k) = \overline{u}_{k+1}, \quad u_0 = \overline{u}_0 = u, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ [D, \overline{D}] = 0, \quad D\overline{D}(u) = F(x, y, u, u_1, \overline{u}_1). \end{aligned}$$

Записанные как векторные поля, они имеют вид

$$\begin{aligned} D &= \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{i=0}^{\infty} u_{i+1} \frac{\partial}{\partial u_i} + \sum_{i=1}^{\infty} \overline{D}^{i-1}(F) \frac{\partial}{\partial \overline{u}_i}, \\ \overline{D} &= \frac{\partial}{\partial y} + \sum_{i=0}^{\infty} \overline{u}_{i+1} \frac{\partial}{\partial \overline{u}_i} + \sum_{i=1}^{\infty} D^{i-1}(F) \frac{\partial}{\partial u_i}. \end{aligned}$$

Хотя с первого взгляда кажется, что в определении D участвует $\overline{D}$ и наоборот, векторные поля корректно определены этими формулами.

Поскольку определения преобразований и инвариантов Лапласа из раздела 2.1 являются чисто алгебраическими и используют только тот факт, что операторы частных производных являются коммутирующими дифференцированиями, они непосредственно обобщаются на случай линеаризованного уравнения (2.18). Для этого мы просто должны заменить во всех формулах операторы частных производных на полные производные D и $\overline{D}$ в силу уравнения (1.2).

Согласно формулам (2.2) главные инварианты (2.18) имеют вид

$$H_1 \stackrel{\text{def}}{=} h_0 = -D \left(\frac{\partial F}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial F}{\partial u_1} \frac{\partial F}{\partial \overline{u}_1} + \frac{\partial F}{\partial u}, \quad (2.20)$$

$$H_0 \stackrel{\text{def}}{=} k_0 = -\overline{D} \left(\frac{\partial F}{\partial \overline{u}_1} \right) + \frac{\partial F}{\partial u_1} \frac{\partial F}{\partial \overline{u}_1} + \frac{\partial F}{\partial u}. \quad (2.21)$$

Отметим, что функции H_1 и H_0 остаются инвариантными при преобразованиях вида $u \rightarrow \psi(x, y, u)$ в уравнении (1.2).

Остальные инварианты Лапласа рекуррентно определяются (ср. с (2.6), (2.15)) формулами

$$D\overline{D}(\ln H_i) = -H_{i+1} - H_{i-1} + 2H_i, \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (2.22)$$

Легко видеть, что все инварианты являются рациональными функциями от производных порядка выше чем 1. Например,

$$H_1 = \alpha u_2 + \beta, \quad \alpha = -\frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2}, \quad H_0 = \overline{\alpha} \overline{u}_2 + \overline{\beta}, \quad \overline{\alpha} = -\frac{\partial^2 F}{\partial \overline{u}_1^2}, \quad (2.23)$$

$$H_2 = \frac{\overline{u}_2(p_1 u_3 + p_2 u_2^3 + p_3 u_2^2 + p_4 u_2 + p_5) + p_6 u_3 + p_7 u_2^3 + p_8 u_2^2 + p_9 u_2 + p_{10}}{(\alpha u_2 + \beta)^2}, \quad (2.24)$$

где все коэффициенты $\alpha, \overline{\alpha}, \beta, \overline{\beta}$ и p_i – некоторые конкретные функции от правой части F уравнения (1.2) и ее частных производных по переменным $x, y, u, u_1, \overline{u}_1$.

В частности,

$$p_2 = \frac{\partial^3 F}{\partial u_1^3} \frac{\partial^3 F}{\partial u_1^2 \partial \overline{u}_1} - \frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2} \frac{\partial^4 F}{\partial u_1^3 \partial \overline{u}_1}. \quad (2.25)$$

Структура инварианта H_{-1} аналогична структуре H_2 , но с заменой производных u_i на $\overline{u}_i$ и наоборот.

Рост порядков производных в инвариантах Лапласа обусловлен тем, что оператор $\Delta = D\overline{D}$, фигурирующий в цепочке (2.22), вообще говоря, повышает порядок старших производных на единицу. Легко видеть, что при $i > 0$ максимально возможный порядок H_i по переменным $u_2, u_3, \dots$ равен $i + 1$, а по переменным $\overline{u}_2, \overline{u}_3, \dots$ – равен i .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Назовем (1.2) уравнением лиувилевского типа, если существуют $r \geq 1$ и $s \geq 0$ такие, что $H_r = H_{-s} \equiv 0$.

В случае *линейных* уравнений (2.1) это определение приводит к детально изученному классиками классу уравнений с конечной цепочкой инвариантов Лапласа. Формулы для общего решения таких уравнений и другую полезную информацию можно

найти в [3]. В [28] было показано, что свойство конечности цепочки преобразований Лапласа эквивалентно факторизуемости соответствующего линейного оператора в некотором обобщенном смысле (разложимости на операторные идеалы “порядка 1”).

Простейшим нелинейным уравнением лиувилевского типа является уравнение (1.1). Для этого уравнения формулы (2.21) и (2.20) дают $H_0 = H_1 = \exp u$. Нетрудно проверить, что

$$H_2 = H_{-1} = 0. \quad (2.26)$$

Другие примеры уравнений, удовлетворяющих условию (2.26), доставляют уравнения 4–7 из § 6.

Докажем следующее важное утверждение (ср. с [29], [23]).

ТЕОРЕМА 1. *Для всякого уравнения лиувилевского типа (1.2) существуют функции $\psi(x, y, u, u_1, \dots, u_p)$, $\bar{\psi}(x, y, u, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_p)$ такие, что*

$$\frac{\partial F}{\partial u_1} = \bar{D} \ln \psi(x, y, u, u_1, \dots, u_p), \quad \frac{\partial F}{\partial \bar{u}_1} = D \ln \bar{\psi}(x, y, u, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_p). \quad (2.27)$$

ЛЕММА 1. *Пусть функция $g(x, y, u, u_1, \dots, u_p, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_q)$, где $p > 0$, удовлетворяет соотношению*

$$D\bar{D}(g) = f(x, y, u, u_1, \dots, u_n, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m), \quad n \leq p. \quad (2.28)$$

Тогда

$$\bar{D}\left(\frac{\partial g}{\partial u_p}\right) = -\frac{\partial F}{\partial u_1} \frac{\partial g}{\partial u_p}. \quad (2.29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко проверить, что

$$D\bar{D}(g) = u_{p+1} \left(\bar{D} \frac{\partial g}{\partial u_p} + \frac{\partial F}{\partial u_1} \frac{\partial g}{\partial u_p} \right) + \dots$$

Здесь многоточием обозначены слагаемые, не зависящие от u_{p+1} . Таким образом, если $p + 1 > n$, то выполнено условие (2.26).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Если цепочка инвариантов H_i обрывается, то существует инвариант H_n максимального по переменным u_i порядка k . Если $k > 0$, то, применяя лемму 1 к соотношению

$$D\bar{D}(\ln H_n) = 2H_n - H_{n+1} - H_{n-1}$$

и пользуясь формулой (2.29), приходим к первой из требуемых формул, где

$$\psi = \left(\frac{\partial H_n}{\partial u_k} \right)^{-1}.$$

Если же все инварианты не зависят от $u_1, u_2, \dots$, то из (2.20) следует, что $\frac{\partial F}{\partial u_1} = 0$ и можно положить $\psi = 1$. Вторая из формул (2.27) выводится аналогично.

Функции ψ и $\bar{\psi}$ в дальнейшем играют ту же роль, что и функции (2.9) в формулах (2.10), (2.11).

2.3. Уравнения с цепочкой инвариантов Лапласа длины два. Тожественное равенство нулю инварианта Лапласа эквивалентно тому, что функция F удовлетворяет некоторой переопределенной системе уравнений в частных производных. Простейшие из них дают важную информацию об уравнениях с нулевыми инвариантами Лапласа.

Рассмотрим класс уравнений, для которых выполнено условие обрыва (2.26). Формула (2.25) показывает, что если $H_2 = 0$, то

$$\frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial \bar{u}_1} \left(\ln \frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2} \right) = 0. \quad (2.30)$$

Аналогично, из условия $H_{-1} = 0$ следует, что

$$\frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial \bar{u}_1} \left(\ln \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{u}_1^2} \right) = 0. \quad (2.31)$$

Решая совместно уравнения (2.30) и (2.31), приходим к следующему утверждению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если уравнение (1.2) удовлетворяет условиям (2.26) и*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{u}_1^2} \neq 0, \quad (2.32)$$

то оно имеет следующую структуру:

$$u_{xy} = P(x, y, u, u_x) \bar{P}(x, y, u, u_y) + Q_1 u_x u_y + Q_2 u_x + Q_3 u_y + Q_4, \quad (2.33)$$

где Q_i – некоторые функции от переменных x, y, u .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Легко видеть, что с помощью преобразования вида $u \rightarrow \psi(x, y, u)$ можно сделать функцию Q_1 нулем.

К сожалению, попытки дальнейшего прямолинейного использования условия (2.26) для уточнения вида функций $P, \bar{P}$ и Q_i наталкиваются на серьезные вычислительные трудности. Однако систематическое исследование системы

$$D\bar{D} \ln H_1 = 2H_1 - H_0, \quad D\bar{D} \ln H_0 = 2H_0 - H_1, \quad (2.34)$$

эквивалентной условию (2.26), приводит к интересному результату. В этом разделе мы получим общую формулу для дифференциальной подстановки, связывающей удовлетворяющие условиям предложения 1 уравнения (1.2) с волновым уравнением $v_{xy} = 0$.

Правая часть первого из соотношений (2.34) не зависит от третьих производных и является линейной функцией по вторым производным, в то время как H_1 задается формулой (2.23).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть

$$D\overline{D} \ln (a_1 u_2 + a_2) = b_1 u_2 + b_2 \overline{u}_2 + b_3, \quad (2.35)$$

где a_i, b_i – некоторые функции переменных $x, y, u, u_1, \overline{u}_1$. Тогда

$$a_1 u_2 + a_2 = q(x, y, u, u_1) \overline{q}(x, y, u, \overline{u}_1) (u_2 + P(x, y, u, u_1))$$

для некоторых $q, \overline{q}$ и P . При этом

$$\frac{\partial F}{\partial u_1} = \overline{D} \ln (u_2 + P), \quad (2.36)$$

$$b_1 = \frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2} + \left(\overline{D} + \frac{\partial F}{\partial u_1} \right) \left(\frac{\partial \ln q}{\partial u_1} \right), \quad b_2 = \left(D + \frac{\partial F}{\partial \overline{u}_1} \right) \left(\frac{\partial \ln \overline{q}}{\partial \overline{u}_1} \right). \quad (2.37)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вообще говоря, левая часть (2.35) имеет вид (2.24). Приравняв в этом выражении к нулю коэффициент p_1 , находим, что $a_2 = a_1 P(x, y, u, u_x)$ для некоторого P . Равенство нулю коэффициента p_6 можно записать (это требует некоторой наблюдательности!) в виде (2.36). Наконец, условие $p_2 = 0$ эквивалентно тому, что

$$a_1 \frac{\partial^2 a_1}{\partial u_1 \partial \overline{u}_1} = \frac{\partial a_1}{\partial u_1} \frac{\partial a_1}{\partial \overline{u}_1},$$

что дает $a_1 = q(x, y, u, u_1) \overline{q}(x, y, u, \overline{u}_1)$. Формулы для коэффициентов b_1 и b_2 находятся прямой выкладкой.

Применяя предложение 2 к первому из соотношений (2.34), получаем, что

$$-\frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2} = q(x, y, u, u_1) \overline{q}(x, y, u, \overline{u}_1).$$

Учитывая “симметричное” соотношение

$$-\frac{\partial^2 F}{\partial \overline{u}_1^2} = r(x, y, u, u_1) \overline{r}(x, y, u, \overline{u}_1),$$

приходим к формуле (2.33), где

$$q = \frac{\partial^2 P}{\partial u_1^2}, \quad \overline{q} = -\overline{P}, \quad \overline{r} = \frac{\partial^2 \overline{P}}{\partial \overline{u}_1^2}, \quad r = -P.$$

Соотношение (2.36) дает нам

$$\frac{\partial F}{\partial u_1} = \overline{D} \left[\ln (H_1) - \ln \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2} \right) \right]. \quad (2.38)$$

Это и симметричное к нему соотношение

$$\frac{\partial F}{\partial \overline{u}_1} = D \left[\ln (H_0) - \ln \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \overline{u}_1^2} \right) \right] \quad (2.39)$$

(ср. с (2.27)) чрезвычайно важны для полной классификации уравнений (1.2), (2.32) с обрывом (2.26).

ТЕОРЕМА 2. *Всякое уравнение (1.2), удовлетворяющее условиям (2.32), (2.26), связано с волновым уравнением $v_{xy} = 0$ дифференциальной подстановкой вида*

$$v = \Phi(x, y, u, u_1, \bar{u}_1, u_2, \bar{u}_2),$$

где

$$\Phi = \ln \frac{H_1^4 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{u}_1^2} \right)^3}{H_0^4 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2} \right)^3}. \quad (2.40)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычитая из первого уравнения (2.34) второе, получим

$$D\bar{D}\left(\ln \frac{H_1}{H_0}\right) = 3(H_1 - H_0) = 3\bar{D}\left(\frac{\partial F}{\partial \bar{u}_1}\right) - 3D\left(\frac{\partial F}{\partial u_1}\right).$$

Далее, воспользовавшись формулами (2.38) и (2.39), видим, что для функции Φ , заданной формулой (2.40), выполнено тождество $D\bar{D}(\Phi) = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Функции $\bar{W} = \bar{D}(\Phi)$ и $W = D(\Phi)$ удовлетворяют условиям $\bar{D}(W) = D(\bar{W}) = 0$.*

2.4. Интегралы. Существование функций W и $\bar{W}$ от переменных (2.19) таких, что $\bar{D}(W) = D(\bar{W}) = 0$ (см. следствие 1), является одной из замечательных особенностей уравнений лиувилевского типа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Функция $W(x, y, u, u_1, \dots, u_p)$ называется Y -интегралом для уравнения (1.2), если $\bar{D}(W) = 0$. При этом предполагается, что W зависит не только от переменной x .*

Соотношение $\bar{D}(W) = 0$ означает, что, подставив в W любое решение $u(x, y)$ уравнения (1.2), мы получим некоторую (вообще говоря, разную для разных решений) функцию, зависящую только от x .

Аналогично, X -интеграл – это функция $\bar{W}(x, y, u, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_p)$, удовлетворяющая соотношению $D(\bar{W}) = 0$.

Понятие Y -интеграла [16], [19], [20], [22], [23], [25], [30] в некотором смысле является обобщением понятия первого интеграла для обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако здесь имеется существенная разница. Всякое обыкновенное уравнение обладает первыми интегралами, но, вообще говоря, найти нетривиальный первый интеграл ничуть не легче, чем решать само уравнение. Для уравнений в частных производных ситуация принципиально иная. А именно, лишь исключительные уравнения имеют Y -интегралы, но уж если известно, что у уравнения есть Y -интеграл данного порядка, то найти его не составляет особого труда.

Очевидно, что Y - и X -интегралы могут быть определены как нетривиальные функции, зависящие от переменных (2.19), которые постоянны вдоль характеристик. Поэтому по смыслу они очень близки к хорошо известным в гидродинамике инвариантам Римана, которые, однако, зависят только от неизвестных функций (но не от их производных).

Очевидно, что для любого Y -интеграла w и функции Q выражение

$$W = Q(x, w, D(w), \dots, D^k(w)) \quad (2.41)$$

также является Y -интегралом. В работах [23], [29] доказано следующее обратное утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Всякий Y -интеграл имеет вид (2.41), где w – некоторый Y -интеграл минимального порядка.*

Интеграл w , фигурирующий в предложении 3, мы будем называть минимальным. Легко видеть, что минимальный Y -интеграл w определен с точностью до замены $w \rightarrow \varphi(x, w)$. Аналогичные утверждения, конечно, имеют место и для X -интегралов.

Для уравнения Лиувилля (1.1) минимальными интегралами являются

$$w = u_2 - \frac{1}{2}u_1^2, \quad \bar{w} = \bar{u}_2 - \frac{1}{2}\bar{u}_1^2. \quad (2.42)$$

Существование интегралов может быть положено в основу определения уравнений лиувиллевского типа [2], [16], [30], [31]. Эквивалентность этого определения и определения 2 была доказана в работах [17]–[19]:

ТЕОРЕМА 3. *Уравнение (1.2) обладает Y - и X -интегралами*

$$W(x, y, u, u_1, \dots, u_p), \quad \bar{W}(x, y, u, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{\bar{p}})$$

тогда и только тогда, когда $H_r = H_{-s} \equiv 0$ для некоторых r и s . При этом $r \leq p$, $s \leq \bar{p} - 1$.

Во многих вопросах, связанных с уравнениями лиувиллевского типа (см. определение 2), чрезвычайно важной оказывается следующая

ТЕОРЕМА 4. *Для любого уравнения (1.2) лиувиллевского типа коэффициенты линейного дифференциального оператора $\mathcal{L}$, заданного формулой*

$$\mathcal{L} = \frac{\bar{\psi}}{\psi} H_0 H_{-1} \cdots H_{1-s} D \frac{1}{H_{1-s}} D \cdots \frac{1}{H_0} D \frac{1}{H_1} \cdots D \frac{1}{H_{r-1}} D \frac{\psi H_1 \cdots H_{r-1}}{\bar{\psi}}, \quad (2.43)$$

являются Y -интегралами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $H_r = 0$, формулы (2.7) при $i = r - 1$ (с учетом сделанного сдвига индекса, из-за которого $h_i = H_{i+1}$) имеют вид

$$(\bar{D} - \bar{D}(\ln \psi H_1 \cdots H_{r-1})) V_{r-1} = V_r, \quad \left(D - \frac{\partial F}{\partial u_1} \right) V_r = 0. \quad (2.44)$$

Положим $V_r = 0$. Тогда $V_{r-1} = \psi H_1 \cdots H_{r-1} Q(x)$ удовлетворяет (2.44) для любой функции $Q(x)$. Формула (2.11) дает

$$V = \bar{\psi} \frac{1}{H_1} D \frac{1}{H_2} \cdots D \frac{1}{H_{r-1}} D \left(\frac{\psi}{\bar{\psi}} H_1 \cdots H_{r-1} Q(x) \right).$$

В соответствии с формулой (2.16)

$$V_{-s-1} = \bar{\psi} H_0 H_{-1} \cdots H_{1-s} D \frac{1}{H_{1-s}} D \cdots \frac{1}{H_{-1}} D \frac{1}{H_0} D \frac{1}{\bar{\psi}} V. \quad (2.45)$$

Так как

$$\left(\bar{D} - \frac{\partial F}{\partial u_1} \right) V_{-s-1} = 0,$$

имеем $\bar{D}(\psi^{-1} V_{-s-1}) = 0$. Подставляя сюда полученные выше формулы для V_{-s-1} и V , получаем $\bar{D}\mathcal{L}(Q) = 0$. В силу произвольности функции $Q(x)$ отсюда вытекает, что $\bar{D}(\mathcal{L}) = 0$. Теорема 4 доказана.

Аналогично доказывается, что коэффициенты оператора $\bar{\mathcal{L}}$ вида

$$\bar{\mathcal{L}} = \frac{\psi}{\bar{\psi}} H_1 \cdots H_{r-1} \bar{D} \frac{1}{H_{r-1}} \bar{D} \cdots \frac{1}{H_0} \bar{D} \frac{1}{H_{-1}} \bar{D} \cdots \frac{1}{H_{-s+1}} \bar{D} \frac{\bar{\psi} H_0 \cdots H_{-s+1}}{\psi} \quad (2.46)$$

являются X -интегралами.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Функция ψ определена с точностью до умножения на Y -интегралы. Ее можно выбрать так, чтобы порядок ψ был меньше порядка минимального Y -интеграла. Такая функция ψ определена с точностью до умножения на функции от x . Из-за неоднозначности функции ψ оператор $\mathcal{L}$ определен с точностью до преобразования $\mathcal{L} \rightarrow W \mathcal{L} W^{-1}$, где W – произвольный Y -интеграл.

Коэффициенты операторов $\mathcal{L}$ и $\bar{\mathcal{L}}$ абсолютно алгоритмически вычисляются с помощью компьютера, что дает самый эффективный из известных авторам способов нахождения интегралов для заданного уравнения лиувилевского типа.

§ 3. Построение точных решений.

3.1. Общая схема. Известная формула для общего решения уравнения Лиувилля (1.1) имеет вид

$$u(x, y) = \ln \left[\frac{2Z'(x)\bar{Z}'(y)}{(Z(x) + \bar{Z}(y))^2} \right], \quad (3.1)$$

где $Z(x)$ и $\bar{Z}(y)$ – произвольные функции. Подставляя это решение в (2.42), находим, что

$$w = \frac{Z'''}{Z'} - \frac{3}{2} \frac{Z''^2}{Z'^2}. \quad (3.2)$$

Важным для нас является тот факт, что функция $Z(x)$ параметризует ядро оператора $\mathcal{L}$. Действительно, согласно формуле (2.43)

$$\mathcal{L} = \exp(u) D \exp(-u) D \exp(-u) D \exp(u) = D^3 + (2u_{xx} - u_x^2) D + u_{xxx} - u_x u_{xx}.$$

Таким образом,

$$\mathcal{L} = D^3 + 2wD + w'. \quad (3.3)$$

Хорошо известно, что базисом ядра этого оператора являются

$$\varphi_1 = \frac{1}{Z'}, \quad \varphi_2 = \frac{Z}{Z'}, \quad \varphi_3 = \frac{Z^2}{Z'}, \quad (3.4)$$

где функция Z связана с w соотношением (3.2).

Покажем, что для любого уравнения лиувилевского типа общее решение может быть записано в терминах ядер операторов $\mathcal{L}$ и $\overline{\mathcal{L}}$ и сопряженных к ним.

Рассмотрим функцию

$$A = \frac{\overline{\psi}}{\psi H_1 H_2 \cdots H_{r-1}}. \quad (3.5)$$

Из формул (2.43) и (2.46) следует, что $\mathcal{L}(A) = \overline{\mathcal{L}}^*(A) = 0$. Здесь через $\overline{\mathcal{L}}^*$ обозначен оператор, формально сопряженный к $\overline{\mathcal{L}}$. Таким образом,

$$A = \sum_{i,j=1}^{s+r} c_{ij} \varphi_i(x) \overline{\varphi}_j(y). \quad (3.6)$$

Здесь $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{s+r}$ – базис ядра $\mathcal{L}$, $\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \dots, \overline{\varphi}_{s+r}$ – базис ядра $\overline{\mathcal{L}}^*$, а c_{ij} – некоторые постоянные.

Аналогично, функция

$$\bar{A} = \frac{\psi}{\overline{\psi} H_0 H_{-1} \cdots H_{1-s}} \quad (3.7)$$

удовлетворяет уравнениям $\overline{\mathcal{L}}(\bar{A}) = \mathcal{L}^*(\bar{A}) = 0$.

Если мы знаем A как функцию от x и y , то с помощью алгебраических операций и взятия полных производных D и $\overline{D}$ можно найти значения некоторых других выражений от переменных (2.19). Например, согласно следующей лемме все инварианты Лапласа для уравнения (1.2) выражаются через функцию (3.5).

ЛЕММА 2. *Справедливы формулы*

$$H_i = D\overline{D}\mathcal{H}_i, \quad i = r-1, r-2, \dots, 1-s, \quad (3.8)$$

где величины $\mathcal{H}_i$ определяются рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_i &= 2\mathcal{H}_{i+1} - \mathcal{H}_{i+2} - \ln D\overline{D}\mathcal{H}_{i+1}, \quad i = r-2, r-3, \dots, 1-s, \\ \mathcal{H}_r &= 0, \quad \mathcal{H}_{r-1} = -\ln A. \end{aligned} \quad (3.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Складывая соотношения цепочки

$$H_{i+1} = 2H_i - H_{i-1} - D\overline{D} \ln H_i \quad (3.10)$$

с номерами $i = r-1, i = r-2, \dots, i = 0$ и учитывая, что $H_r = 0$, получаем

$$H_{r-1} + H_1 - H_0 - D\overline{D} \ln H_1 \cdots H_{r-1} = 0$$

или

$$H_{r-1} = D\bar{D} \ln H_1 \cdots H_{r-1} + DF_{u_1} - \bar{D}F_{\bar{u}_1}.$$

Так как согласно теореме 1 $F_{u_1} = \bar{D} \ln \psi$ и $F_{\bar{u}_1} = D \ln \bar{\psi}$, то имеем

$$H_{r-1} = D\bar{D} \ln \left(\frac{\psi}{\bar{\psi}} H_1 \cdots H_{r-1} \right) = D\bar{D} \mathcal{H}_{r-1},$$

где

$$\mathcal{H}_{r-1} = -\ln A.$$

Определим $\mathcal{H}_{r-2}$ формулой (3.9): $\mathcal{H}_{r-2} = 2\mathcal{H}_{r-1} - \ln D\bar{D}\mathcal{H}_{r-1}$, и применим к обеим частям этого равенства оператор $D\bar{D}$. Используя (3.10), получим

$$D\bar{D}\mathcal{H}_{r-2} = 2H_{r-1} - D\bar{D} \ln H_{r-1} = H_{r-2}.$$

Аналогично доказывается, что $D\bar{D}\mathcal{H}_{r-3} = H_{r-3}$ и т. д.

Отметим, что кроме рекуррентной формулы (3.9), существует следующее детерминантное представление для выражений $\mathcal{H}_i$ (см. [32]):

$$\mathcal{H}_{r-k} = -\ln((-1)^{k(k+1)/2} \Delta_{k+1}(A)), \quad k = 1, \dots, r+s-1, \quad (3.11)$$

где $\Delta_k(A)$ – главный минор размера k матрицы $A_{ij} = D^{i-1}\bar{D}^{j-1}A$.

В практическом плане эти формулы можно использовать следующим образом. С одной стороны, мы знаем $A, \bar{A}, \bar{D}(A), D(\bar{A})$ и инварианты Лапласа как функции переменных (2.19). С другой стороны, в силу формул (3.6), (3.8) они известны нам как функции от x и y . Поэтому с помощью теоремы о неявной функции можно найти u вместе с $u_1, \bar{u}_1, \dots$ как функции от x и y . Это и даст нам формулу для общего решения $u(x, y)$. При этом в ходе вычислений находятся связи между константами c_{ij} из формулы (3.6). Важно отметить, что эти константы, вообще говоря, не являются произвольными.

Конечно, в каждом конкретном случае эта схема допускает технические трюки, упрощающие вычисления. В частности, базис ядер операторов $\mathcal{L}, \bar{\mathcal{L}}, \mathcal{L}^*$ и $\bar{\mathcal{L}}^*$ гораздо проще описать, если эти операторы допускают факторизацию (см. примеры ниже). Кроме того, часто переменные $u, u_1, \bar{u}_1, \dots$ удобнее находить не из тождеств для $A, \bar{A}, \bar{D}(A), D(\bar{A})$ и H_i , а используя другой, эквивалентный, но более простой, набор тождеств.

ПРИМЕР 1. В качестве простейшего примера покажем, как регулярным образом найти общее решение (3.1) уравнения Лиувилля.

Как уже отмечалось, для уравнения Лиувилля

$$\mathcal{L} = -\mathcal{L}^* = D^3 + 2wD + w_x, \quad \bar{\mathcal{L}} = -\bar{\mathcal{L}}^* = \bar{D}^3 + 2\bar{w}\bar{D} + \bar{w}_y.$$

Обозначим через $Z(x)$ функцию, порождающую ядро оператора $\mathcal{L}$ с помощью формулы (3.4). Аналогично, базис ядра оператора $\bar{\mathcal{L}}^*$ образуют

$$\bar{\varphi}_1 = \frac{1}{\bar{Z}}, \quad \bar{\varphi}_2 = \frac{\bar{Z}}{\bar{Z}'}, \quad \bar{\varphi}_3 = \frac{\bar{Z}^2}{\bar{Z}'}.$$

Согласно (3.5) $A = e^{-u}$, и формула (3.6) дает

$$e^{-u} = \frac{c_1 + c_2 Z + c_3 \bar{Z} + c_4 Z^2 + c_5 Z \bar{Z} + c_6 \bar{Z}^2 + c_7 Z^2 \bar{Z} + c_8 Z \bar{Z}^2 + c_9 Z^2 \bar{Z}^2}{Z' \bar{Z}'}.$$

Для того чтобы определить постоянные c_i , заметим, что $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1 = u$ и, следовательно, соотношение (3.11) при $k = 1$ имеет вид:

$$A = \bar{D}(A) D(A) - A D \bar{D}(A).$$

Подставляя в эту формулу явное выражение для A , получаем соотношения на коэффициенты c_i :

$$\begin{aligned} c_1 &= c_2 c_3 - c_1 c_5, & c_2 &= 2c_3 c_4 - 2c_1 c_7, & c_3 &= 2c_2 c_6 - 2c_1 c_8, \\ c_4 &= c_4 c_5 - c_2 c_7, & c_5 &= 4c_4 c_6 - 4c_1 c_9, & c_6 &= c_5 c_6 - c_3 c_8, \\ c_7 &= 2c_4 c_8 - 2c_9 c_2, & c_8 &= 2c_7 c_6 - 2c_3 c_9, & c_9 &= c_7 c_8 - c_5 c_9. \end{aligned}$$

Решение

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = \frac{1}{2}, \quad c_5 = 1, \quad c_6 = \frac{1}{2}, \quad c_7 = 0, \quad c_8 = 0, \quad c_9 = 0$$

этой системы соответствует (3.1). Нетрудно проверить, что все остальные решения с точностью до переопределения функций Z и $\bar{Z}$ также приводят к формуле (3.1).

ПРИМЕР 2. Рассмотрим в качестве второго примера уравнение (1.4). Для краткости положим $\beta = \sqrt{1 - u_x^2}$, $\bar{\beta} = \sqrt{1 - u_y^2}$. Для уравнения (1.4) минимальные Y - и X -интегралы задаются формулами

$$w = \frac{u_2}{\beta} - \frac{\beta}{u}, \quad \bar{w} = \frac{\bar{u}_2}{\bar{\beta}} - \frac{\bar{\beta}}{u},$$

а в качестве функций ψ и $\bar{\psi}$ (см. (2.27)) можно выбрать $\psi = \beta$, $\bar{\psi} = \bar{\beta}$. Легко проверить, что для этого уравнения, так же как и для уравнения Лиувилля, $H_2 = H_{-1} = 0$. Инварианты H_0 и H_1 имеют вид

$$H_0 = \frac{\bar{\beta} w}{u \beta^2}, \quad H_{-1} = \frac{\beta \bar{w}}{u \bar{\beta}^2}. \quad (3.12)$$

Используя формулы (2.43), (2.46), прямым вычислением получаем, что

$$\mathcal{L} = D(D^2 + v_1 D + v_2 + e^{2v}), \quad \bar{\mathcal{L}} = \bar{D}(\bar{D}^2 + \bar{v}_1 \bar{D} + \bar{v}_2 + e^{2\bar{v}}),$$

где $v = \ln w$, $\bar{v} = \ln \bar{w}$. Операторы, сопряженные к $\mathcal{L}$, $\bar{\mathcal{L}}$, имеют вид

$$\mathcal{L}^* = -(D^2 - v_1 D + e^{2v})D, \quad \bar{\mathcal{L}}^* = -(\bar{D}^2 - \bar{v}_1 \bar{D} + e^{2\bar{v}})\bar{D}.$$

Согласно формулам (3.5), (3.7)

$$A = \frac{u\beta}{w}, \quad \bar{A} = \frac{u\bar{\beta}}{\bar{w}}. \quad (3.13)$$

Таким образом, функции (3.13) являются решениями уравнений

$$\mathcal{L}(A) = \overline{\mathcal{L}}^*(A) = \overline{\mathcal{L}}(\bar{A}) = \mathcal{L}^*(\bar{A}) = 0. \quad (3.14)$$

Более того, нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} (D^2 + v_1 D + v_2 + e^{2v})A &= -1, & (\bar{D}^2 - \bar{v}_1 \bar{D} + e^{2\bar{v}})\bar{D}A &= 0, \\ (\bar{D}^2 + \bar{v}_1 \bar{D} + \bar{v}_2 + e^{2\bar{v}})\bar{A} &= -1, & (D^2 - v_1 D + e^{2v})D\bar{A} &= 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Положим

$$w = -i \frac{X'}{X}, \quad \bar{w} = -i \frac{Y'}{Y}, \quad (3.16)$$

где $X(x)$ и $Y(y)$ – произвольные функции, $i^2 = -1$. Тогда X^2/X' и $1/X'$ образуют базис ядра оператора $D^2 + v_1 D + v_2 + e^{2v}$. Базисом ядра оператора $(D^2 - v_1 D + e^{2v})D$ являются 1 , $P(x)$, $Q(x)$, где

$$P' = X, \quad Q' = \frac{1}{X}. \quad (3.17)$$

Аналогично, Y^2/Y' и $1/Y'$ – базис ядра оператора $\bar{D}^2 + \bar{v}_1 \bar{D} + \bar{v}_2 + e^{2\bar{v}}$ и 1 , $\bar{P}(y)$, $\bar{Q}(y)$, где

$$\bar{P}' = Y, \quad \bar{Q}' = \frac{1}{Y}, \quad (3.18)$$

– базис ядра оператора $(\bar{D}^2 - \bar{v}_1 \bar{D} + e^{2\bar{v}})\bar{D}$.

Методом вариации постоянных из (3.15) нетрудно найти, что

$$\begin{aligned} A &= \left(c_1 \frac{X^2}{X'} + c_2 \frac{1}{X'} \right) \bar{P} + \left(c_3 \frac{X^2}{X'} + c_4 \frac{1}{X'} \right) \bar{Q} + \frac{1}{2} \frac{P}{X'} - \frac{1}{2} \frac{X^2}{X'} Q, \\ \bar{A} &= \left(\bar{c}_1 \frac{Y^2}{Y'} + \bar{c}_2 \frac{1}{Y'} \right) P + \left(\bar{c}_3 \frac{Y^2}{Y'} + \bar{c}_4 \frac{1}{Y'} \right) Q + \frac{1}{2} \frac{\bar{P}}{Y'} - \frac{1}{2} \frac{Y^2}{Y'} \bar{Q}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

где c_i и $\bar{c}_i$ – некоторые постоянные.

Дифференцируя соотношения (3.13), приходим к равенствам

$$w\bar{D}(A) = u_y\beta - u_x\bar{\beta}, \quad \bar{w}D(\bar{A}) = u_x\bar{\beta} - u_y\beta, \quad (3.20)$$

$$D(wA) = -u u_x w, \quad \bar{D}(\bar{w}\bar{A}) = -u u_y \bar{w}. \quad (3.21)$$

Левые части этих равенств как функции от x и y нам известны. Выразим из этих соотношений u_x , u_y и u через произвольные функции $X(x)$ и $Y(y)$.

Из (3.20) следует, что $w\bar{D}(A) = -\bar{w}D(\bar{A})$. Подставляя сюда выражения (3.16) и (3.19), находим, что

$$\bar{c}_1 = -c_1, \quad \bar{c}_2 = -c_3, \quad \bar{c}_3 = -c_2, \quad \bar{c}_4 = -c_4.$$

Согласно формулам (3.13) и (3.21)

$$\beta = \frac{Aw}{u}, \quad \bar{\beta} = \frac{\bar{A}\bar{w}}{u}, \quad u_x = -\frac{D(wA)}{uw}, \quad u_y = -\frac{\overline{D(\bar{w}\bar{A})}}{u\bar{w}}.$$

Поскольку $\beta^2 = 1 - u_x^2$ и $\bar{\beta}^2 = 1 - u_y^2$, отсюда получаем

$$u^2 = A^2 w^2 - \left(\frac{D(Aw)}{w} \right)^2 = \bar{A}^2 \bar{w}^2 - \left(\frac{\overline{D(\bar{A}\bar{w})}}{\bar{w}} \right)^2.$$

Из второго равенства в этой цепочке следует, что

$$c_1 = c_4 = 0, \quad 4c_2 c_3 + 1 = 0.$$

Поскольку функции $X(x)$ и $Y(y)$ определены с точностью до пропорциональности, без ограничения общности можно положить $c_2 = \frac{1}{2}$, $c_3 = -\frac{1}{2}$. Теперь первое равенство дает следующий окончательный ответ:

$$u(x, y) = \sqrt{(Q(x) + \bar{Q}(y))(P(x) + \bar{P}(y))},$$

где

$$P'Q' = \bar{P}'\bar{Q}' = 1.$$

3.2. Новые примеры. Почти все примеры уравнений лиувиллевого типа содержатся в классических работах (см. [3]). В частности, хорошо известно уравнение (1.4), рассмотренное выше.

В результате попыток авторов полностью перечислить все уравнения лиувиллевого типа были найдены два новых примера таких уравнений. Первое из найденных уравнений имеет вид

$$u_{xy} = \frac{1}{6u+y} B^2(B-1)\bar{B}(\bar{B}-1)^2 + \frac{1}{6u+x} \bar{B}^2(\bar{B}-1)B(B-1)^2, \quad (3.22)$$

где $B = B(u_x)$ и $\bar{B} = \bar{B}(u_y)$ – решения кубических уравнений

$$\frac{1}{3}B^3 - \frac{1}{2}B^2 = u_x, \quad \frac{1}{3}\bar{B}^3 - \frac{1}{2}\bar{B}^2 = u_y. \quad (3.23)$$

Правая часть второго из этих уравнений

$$u_{xy} = \frac{1}{u} b(u_x) \bar{b}(u_y) \quad (3.24)$$

также содержит кубические радикалы от первых производных. А именно, функции $b(u_x)$ и $\bar{b}(u_y)$ определяются как решения следующих кубических уравнений

$$(u_x - b)(b + 2u_x)^2 = 1, \quad (u_y - \bar{b})(\bar{b} + 2u_y)^2 = 1. \quad (3.25)$$

В статье [25] приведена формула для общего решения уравнения (3.22). Эта формула была получена с помощью обсуждаемого в настоящей работе метода. Ниже мы показываем, как он работает, на примере уравнений (3.22), (3.24).

Вычисления, связанные с этими уравнениями, довольно громоздки. Заметно упрощает ситуацию тот факт, что в обоих случаях оператор $\mathcal{L}$ удастся разложить в произведение двух операторов, коэффициенты которых по-прежнему являются Y -интегралами. По-видимому, это связано с существованием дифференциальных подстановок, сводящих наши уравнения к более простым. Явные формулы для этих подстановок приведены ниже.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим уравнение (3.24). Нетрудно проверить, что для этого уравнения $H_3 = H_{-2} = 0$. Функция

$$w = \frac{1}{2} \left(\frac{p^2}{2} + \frac{3}{2} \frac{bp}{u} + 3 \frac{u_1 p}{u} + Dp \right), \quad (3.26)$$

где

$$p = 2 \frac{u_2}{b} + \frac{b}{u},$$

является минимальным Y -интегралом для (3.24). При таком выборе функции w (которая определена с точностью до замены $w \rightarrow \varphi(x, w)$) коэффициенты оператора $\mathcal{L}$, заданного формулой (2.43), выглядят особенно просто. Оказывается, что $\mathcal{L}$ раскладывается в произведение $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2$, где

$$\mathcal{L}_1 = D^3 - 4wD - 2D(w), \quad \mathcal{L}_2 = D^2 + D(\ln w)D + D^2(\ln w) - w. \quad (3.27)$$

Отметим, что

$$\mathcal{L}_1^* = -\mathcal{L}_1, \quad \mathcal{L}_2^* = D^2 - D(\ln w)D - w = w \mathcal{L}_2 \frac{1}{w}. \quad (3.28)$$

Аналогичные формулы имеют место и для оператора $\overline{\mathcal{L}}$.

Поскольку для уравнения (3.24) $\psi = b$, $\overline{\psi} = \overline{b}$, основные соотношения (3.14) имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left(\frac{\overline{b}}{bH_1H_2} \right) &= 0, & \mathcal{L}^* \left(\frac{b}{\overline{b}H_0H_{-1}} \right) &= 0, \\ \overline{\mathcal{L}} \left(\frac{b}{\overline{b}H_0H_{-1}} \right) &= 0, & \overline{\mathcal{L}}^* \left(\frac{\overline{b}}{bH_1H_2} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Нетрудно проверить, что функция A , определенная формулой (3.5), имеет вид

$$A = \frac{u^3 p(b + 2u_1)}{(\overline{u}_1 - \overline{b})w}. \quad (3.30)$$

Обозначим $\Phi = Aw$, т.е.

$$\Phi = \frac{u^3 p(b + 2u_1)}{\overline{u}_1 - \overline{b}}. \quad (3.31)$$

Кроме того, полезно ввести обозначения

$$F = \frac{u^2}{(\overline{u}_1 - \overline{b})(u_1 - b)} \quad (3.32)$$

и

$$G = \sqrt{F} \left[\frac{3}{2} D \ln F \cdot \overline{D} \ln F - \frac{6}{F} \right]. \quad (3.33)$$

Аналогичными формулами определяются $\overline{w}$, $\overline{p}$, $\overline{\mathcal{L}}$, $\overline{\mathcal{L}}_1$, $\overline{\mathcal{L}}_2$, $\overline{A}$ и $\overline{\Phi}$.

Можно проверить, что соотношения (3.29) эквивалентны системе

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1(F) = \overline{\mathcal{L}}_1(F) = 0, \quad \mathcal{L}_2\left(\frac{\Phi}{w}\right) = \overline{\mathcal{L}}_2\left(\frac{\overline{\Phi}}{\overline{w}}\right) = 3F, \\ \mathcal{L}_1(\overline{\Phi}) = \overline{\mathcal{L}}_1(\Phi) = G, \quad \mathcal{L}_2^*(G) = \overline{\mathcal{L}}_2^*(G) = 0.\end{aligned}\tag{3.34}$$

В соответствии с общей схемой мы должны параметризовать двумя произвольными функциями ядра всех встречающихся в (3.34) операторов, решить эту систему и найти явное выражение для функций $A = \Phi/w$ и $\bar{A} = \overline{\Phi}/\overline{w}$.

Перед тем как заняться этой технической выкладкой, покажем, что общее решение уравнения (3.24) выражается через F , Φ и $\overline{\Phi}$.

Дифференцированием из (3.32) получаем, что

$$p = D \ln F - \frac{2u_1 + b}{u}, \quad \bar{p} = \overline{D} \ln F - \frac{2\bar{u}_1 + \bar{b}}{\bar{u}}.$$

Используя эти соотношения и формулы (3.25), (3.31), находим

$$u(b + 2u_1)(u_1 - b) = \frac{\Phi + F}{DF}.$$

Аналогично,

$$\bar{u}(\bar{b} + 2\bar{u}_1)(\bar{u}_1 - \bar{b}) = \frac{\overline{\Phi} + F}{\overline{D}F}.$$

Возведя в квадрат и перемножив эти тождества, в силу (3.25) получаем

$$u^4(u_1 - b)(\bar{u}_1 - \bar{b}) = \frac{(\Phi + F)^2(\overline{\Phi} + F)^2}{(DF)^2(\overline{D}F)^2},$$

откуда согласно (3.32)

$$u^6 = \frac{F(\Phi + F)^2(\overline{\Phi} + F)^2}{(DF)^2(\overline{D}F)^2}.$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения (3.24) допускает следующее представление:

$$u = F^{1/6} \left[\frac{(\Phi + F)(\overline{\Phi} + F)}{DF \cdot \overline{D}F} \right]^{1/3}.\tag{3.35}$$

Вернемся к исследованию системы (3.34). Нетрудно проверить, что функция $v = -\ln(F/2)$ является решением уравнения Лиувилля $v_{xy} = \exp(v)$. Другими словами, уравнение (3.24) связано с уравнением Лиувилля дифференциальной подстановкой

$$v = -\ln \left[\frac{u^2}{2(\bar{u}_1 - \bar{b})(u_1 - b)} \right].$$

Поэтому согласно (3.1) функция F имеет вид

$$F = \frac{(Z(x) + \overline{Z}(y))^2}{Z'(x)\overline{Z}'(y)}.\tag{3.36}$$

Удобно выбрать Z и $\bar{Z}$ в качестве произвольных параметризующих функций.

Легко проверить, что

$$G = -\frac{3}{2}(X_1 Y_2 + X_2 Y_1),$$

где

$$\begin{aligned} X_1(x) &= \frac{2Z'^2 - ZZ''}{Z'^{3/2}}, & X_2(x) &= \frac{Z''}{Z'^{3/2}}, \\ Y_1(y) &= \frac{2\bar{Z}'^2 - \bar{Z}\bar{Z}''}{\bar{Z}'^{3/2}}, & Y_2(y) &= \frac{\bar{Z}''}{\bar{Z}'^{3/2}}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Функции X_1 и X_2 образуют базис ядра оператора $\mathcal{L}_2^*$. Согласно (3.28) базисом ядра для $\mathcal{L}_2$ служат $\frac{X_1}{w}$ и $\frac{X_2}{w}$. Наконец, как уже упоминалось в предыдущем разделе, базис ядра $\mathcal{L}_1$ задается формулой (3.4). Аналогичные формулы имеют место и для ядер операторов $\bar{\mathcal{L}}_1$, $\mathcal{L}_2$ и $\mathcal{L}_2^*$.

Теперь нетрудно выразить функции Φ и $\bar{\Phi}$ через $Z(x)$ и $\bar{Z}(y)$. Пусть функции $P_1, P_2, P_3, \bar{Q}_1, \bar{Q}_2$ – произвольные решения линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2(P_1) &= \frac{3Z^2}{Z'}, & \mathcal{L}_2(P_2) &= \frac{6Z}{Z'}, & \mathcal{L}_2(P_3) &= \frac{3}{Z'}, \\ \mathcal{L}_1(\bar{Q}_1) &= -\frac{3}{2}X_1, & \mathcal{L}_1(\bar{Q}_2) &= -\frac{3}{2}X_2. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Аналогично определим $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, Q_1, Q_2$.

Используя приведенные выше формулы для F и G , находим из (3.34), что

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{w}{Z'}(P_1(x) + P_2(x)\bar{Z} + P_3(x)\bar{Z}^2) + X_2 Q_1(y) + X_1 Q_2(y), \\ \bar{\Phi} &= \frac{\bar{w}}{\bar{Z}'}(\bar{P}_1(y) + \bar{P}_2(y)Z + \bar{P}_3(y)Z^2) + Y_2 \bar{Q}_1(x) + Y_1 \bar{Q}_2(x). \end{aligned} \quad (3.39)$$

У системы (3.38) удастся найти довольно простое частное решение, задаваемое формулами

$$\begin{aligned} \bar{Q}_1 &= -Z\bar{Q}_2, & \bar{Q}_2 &= -\left(\frac{wP_1}{X_1 Z'} + \frac{wZP_3}{X_2 Z'} + \frac{Z}{X_2 Z'^2} + \frac{Z^2}{X_1 Z'^2}\right), \\ P_1 &= \left(C_1(x) - \frac{Z^2}{X_1 Z'}\right) \frac{X_1}{w}, & P_2 &= -\left(\frac{4}{X_1 X_2 w} + \frac{X_2 P_1}{X_1} + \frac{X_1 P_3}{X_2}\right), \\ P_3 &= -\left(C_2(x) + \frac{1}{X_2 Z'}\right) \frac{X_2}{w}, \end{aligned}$$

где

$$C_1'(x) = \frac{Z}{\sqrt{Z'}}, \quad C_2'(x) = \frac{1}{\sqrt{Z'}}. \quad (3.40)$$

Десять произвольных постоянных, которые имеются в общем решении системы (3.38), уточняются весьма трудоемкой прямой подстановкой формулы (3.35) в

уравнение (3.24). Оказывается, что без ограничения общности все их можно положить нулями. Окончательный ответ выглядит следующим образом:

$$u(x, y) = \left[\frac{(\overline{C}_1 - C_1 + \overline{C}_2 Z + C_2 \overline{Z})(\overline{C}_1 - C_1 - \overline{C}_2 \overline{Z} - C_2 Z)}{Z + \overline{Z}} \right]^{1/3}.$$

Отметим, что в ответе все-таки имеются четыре произвольные постоянные, содержащиеся неявно в (3.40) и в формуле

$$\overline{C}'_1(y) = \frac{\overline{Z}}{\sqrt{\overline{Z}'}} , \quad \overline{C}'_2(y) = \frac{1}{\sqrt{\overline{Z}'}} .$$

ПРИМЕР 4. Приведем ключевые формулы для уравнения (3.22). Для этого уравнения, как и для уравнения (3.24), $H_3 = H_{-2} = 0$. Явный вид минимальных Y - и X -интегралов w и $\overline{w}$ можно найти в § 6. Функции ψ и $\overline{\psi}$ (см. (2.27)) определяются формулами

$$\begin{aligned} \psi &= u_2 - \frac{B^4(B-1)^2}{6u+y} - \frac{B^2(B-1)^4}{6u+x}, \\ \overline{\psi} &= \overline{u}_2 - \frac{\overline{B}^4(\overline{B}-1)^2}{6u+x} - \frac{\overline{B}^2(\overline{B}-1)^4}{6u+y}. \end{aligned}$$

Инварианты Лапласа уравнения (3.22) имеют вид

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{\overline{B}(\overline{B}-1)}{B(B-1)} \left[\frac{\overline{B}-1}{(6u+y)(B-1)^2} - \frac{\overline{B}}{(6u+x)B^2} \right] \psi, \\ H_0 &= \frac{B(B-1)}{\overline{B}(\overline{B}-1)} \left[\frac{B-1}{(6u+x)(\overline{B}-1)^2} - \frac{B}{(6u+y)\overline{B}^2} \right] \overline{\psi}, \\ H_2 &= \frac{2(6u+y)(6u+x)}{\overline{B}(\overline{B}-1)[(6u+x)B^2(\overline{B}-1) - (6u+y)\overline{B}(B-1)^2]^2} \psi \overline{\psi}, \\ H_{-1} &= \frac{2(6u+y)(6u+x)}{B(B-1)[(6u+y)\overline{B}^2(B-1) - (6u+x)B(\overline{B}-1)^2]^2} \psi \overline{\psi}. \end{aligned}$$

Операторы $\mathcal{L}$ и $\overline{\mathcal{L}}$ факторизуются:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= D(D+w)(D+w)(D+2w)(D+3w), \\ \overline{\mathcal{L}} &= \overline{D}(\overline{D}+\overline{w})(\overline{D}+\overline{w})(\overline{D}+2\overline{w})(\overline{D}+3\overline{w}). \end{aligned} \tag{3.41}$$

Функции A и $\bar{A}$, удовлетворяющие системе (3.14), имеют вид

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2\psi^3} [(6u+x)(\overline{B}-1)B^5(B-1)^3 - (6u+y)\overline{B}B^3(B-1)^5], \\ \bar{A} &= \frac{1}{2\overline{\psi}^3} [(6u+y)(B-1)\overline{B}^5(\overline{B}-1)^3 - (6u+x)B\overline{B}^3(\overline{B}-1)^5]. \end{aligned}$$

Минимальные интегралы w и $\bar{w}$ удобно параметризовать произвольными функциями $X(x)$ и $Y(y)$ следующим образом:

$$w = \frac{X'''(x)}{X''(x)}, \quad \bar{w} = \frac{Y'''(y)}{Y''(y)}.$$

Не приводя технических подробностей, отметим только, что, в сравнении с выкладками из примера 3, процедура нахождения функций A и $\bar{A}$ из системы (3.14) заметно проще, поскольку все факторы в формулах (3.41) имеют первый порядок и нет никаких проблем с описанием ядер операторов $\mathcal{L}$, $\overline{\mathcal{L}}$, $\mathcal{L}^*$ и $\overline{\mathcal{L}}^*$.

В процессе вычислений возникают функции $P(x)$, $Q(x)$, $\bar{P}(y)$ и $\bar{Q}(y)$, связанные с $X(x)$ и $Y(y)$ дифференциальными соотношениями:

$$P' = X'^2, \quad \bar{P}' = Y'^2, \quad Q' = X'^3, \quad \bar{Q}' = Y'^3.$$

В эти формулы в статье [25] вкралась опечатка.

Окончательный ответ выглядит следующим образом:

$$u(x, y) = -\frac{x+y}{12} + \frac{K_1}{12\sqrt{K_2}},$$

где

$$\begin{aligned} K_1 &= 2(X+Y)^3 + 3(x-y)(X+Y)(\bar{P}-P) + (x-y)^2(\bar{Q}+Q), \\ K_2 &= (x-y)^2(\bar{Q}+Q)^2 - 2(x-y)(\bar{P}-P)[2(\bar{P}-P)^2 - 3(\bar{Q}+Q)(X+Y)] \\ &\quad + 4(X+Y)^3(\bar{Q}+Q) - 3(X+Y)^2(\bar{P}-P). \end{aligned}$$

Отметим, что уравнение (3.22) связано дифференциальной подстановкой

$$v = -\ln \left[\frac{A(A-1)(1-A-B)}{\psi} \right]$$

с хорошо известным уравнением лиувилевского типа

$$v_{xy} = \exp(v) v_y.$$

§ 4. Высшие симметрии уравнений лиувилевского типа

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Инфинитезимальной (локальной) симметрией уравнения (1.2) называется всякая функция $V(x, y, u, u_x, \dots, u_n, u_y, \dots, \bar{u}_m)$ от переменных (2.19), удовлетворяющая линеаризованному уравнению (2.18).

Это определение эквивалентно условию, что поток в силу эволюционного уравнения

$$u_\tau = V(x, y, u, u_x, \dots, u_n, u_y, \dots, \bar{u}_m) \quad (4.1)$$

переводит решения уравнения (1.2) снова в решения. Часто симметрией называют само эволюционное уравнение (4.1).

Если $n \leq 1, m \leq 1$, симметрия называется *классической*. В этом случае уравнение (4.1) может быть проинтегрировано методом характеристик, и ответ задает однопараметрическую группу точечных или контактных преобразований, действующую на множестве всех решений уравнения (1.2). Переменная τ играет роль группового параметра.

В противном случае симметрия называется *высшей*.

Хорошо известно, что существует два типа интегрируемых нелинейных уравнений (1.2). К первому относятся уравнения, своими свойствами похожие на уравнение Лиувилля. Они могут быть проинтегрированы в квадратурах. Наиболее известным из уравнений второго типа является уравнение sin-Gordon $u_{xy} = \sin u$. Эти уравнения интегрируются методом обратной задачи рассеяния.

Как те, так и другие уравнения имеют высшие симметрии. Поэтому проблема перечисления всех интегрируемых случаев строго может быть сформулирована как задача классификации уравнений (1.2), обладающих высшими симметриями [33]–[36]. Последняя задача является весьма сложной и в настоящее время решена только для нескольких частных случаев (см. [29]). Например, в [22] доказано, что нелинейное уравнение Клейна–Гордона

$$u_{xy} = F(u)$$

обладает высшими симметриями тогда и только тогда, когда оно эквивалентно либо уравнению Лиувилля, либо уравнению sin-Gordon, либо уравнению Цицейки

$$u_{xy} = \exp(u) + \exp(-2u).$$

В работе [22] показано, что все высшие симметрии уравнения Лиувилля описываются формулой

$$V = (D + u_x) G(w, w_x, \dots, w_{k_1}) + (\overline{D} + u_y) \overline{G}(\overline{w}, \overline{w}_y, \dots, \overline{w}_{k_2}), \quad (4.2)$$

где w и $\overline{w}$ – минимальные Y - и X -интегралы, заданные формулой (2.42).

Отметим две особенности формулы (4.2). Во-первых, каждая симметрия является суммой двух симметрий, одна из которых зависит только от переменных $u, u_x, u_{xx}, \dots$, а другая – от $u, u_y, u_{yy}, \dots$. В несколько более слабой формулировке похожее утверждение для произвольного уравнения (1.2) доказано в [29].

Во-вторых, правая часть (4.2) содержит произвольные функции G и $\overline{G}$. Далеко не при всяких функциях G и $\overline{G}$ эволюционное уравнение $u_\tau = V$ является точно интегрируемым. Отметим, что запас высших симметрий для гиперболических уравнений типа sin-Gordon значительно скромнее: векторное пространство всех симметрий ограниченного порядка конечномерно. Зато в этом случае все высшие симметрии являются эволюционными уравнениями, интегрируемыми методом обратной задачи рассеяния.

Формула (4.2) обобщается на случай произвольного уравнения лиувиллевого типа.

ТЕОРЕМА 5. Пусть для уравнения лиувилевского типа (1.2) $H_r = H_{-s} = 0$. Обозначим через $\mathcal{M}$ и $\overline{\mathcal{M}}$ дифференциальные операторы

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \overline{\psi} \frac{1}{H_1} D \frac{1}{H_2} \cdots D \frac{1}{H_{r-1}} D \frac{\psi H_1 \cdots H_{r-1}}{\overline{\psi}}, \\ \overline{\mathcal{M}} &= \psi \frac{1}{H_0} \overline{D} \frac{1}{H_{-1}} \cdots \overline{D} \frac{1}{H_{1-s}} \overline{D} \frac{\overline{\psi} H_0 \cdots H_{1-s}}{\psi}.\end{aligned}\quad (4.3)$$

Тогда для любых Y - и X -интегралов W и $\overline{W}$ выражение

$$V = \mathcal{M}(W) + \overline{\mathcal{M}}(\overline{W}) \quad (4.4)$$

является симметрией уравнения (1.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функции $V_r = 0$ и $V_{r-1} = \overline{\psi} H_1 \cdots H_{r-1} W$ удовлетворяют системе (2.44). Поэтому функция V , построенная с помощью формулы (2.11), удовлетворяет (2.18). Легко видеть, что $V = \mathcal{M}(W)$. Следовательно, $V = \mathcal{M}(W)$ является симметрией. По аналогичной причине симметрией является $V = \overline{\mathcal{M}}(\overline{W})$. Поскольку множество всех симметрий является векторным пространством, теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если $H_0 = 0$, формула (4.3) для оператора $\overline{\mathcal{M}}$ неприменима. В этом случае $\overline{\mathcal{M}}$ совпадает с оператором умножения на $\overline{\psi}$. Аналогично, если $H_1 = 0$, то $\mathcal{M} = \psi$.

Из (2.12) легко вывести, что для всякой симметрии V

$$V_{-s-1} = \psi W_1, \quad V_r = \overline{\psi} \overline{W}_1,$$

где W_1 и $\overline{W}_1$ – некоторые Y - и X -интегралы. Согласно (2.43), (2.46) для симметрии, заданной формулой (4.4), $V_{-s-1} = \psi \mathcal{L}(W)$, $V_r = \overline{\psi} \overline{\mathcal{L}}(\overline{W})$. Мы видим, что если V имеет вид (4.4), то $W_1 \in \text{Im } \mathcal{L}$ и $\overline{W}_1 \in \text{Im } \overline{\mathcal{L}}$. Последние условия нужно понимать следующим образом. Согласно предложению 3 всякий Y -интеграл является функцией от x , минимального Y -интеграла w и его производных $w_1 = D(w)$, $w_2 = D^2(w), \dots$. Поскольку в силу теоремы 4 все коэффициенты оператора $\mathcal{L}$ являются Y -интегралами, этот оператор действует на множестве функций от переменных $x, w, w_1, w_2, \dots$. Легко видеть, что не любая такая функция принадлежит $\text{Im } \mathcal{L}$. Нетрудно показать, что условие $W_1 \in \text{Im } \mathcal{L}$ является необходимым и достаточным для того, чтобы симметрия задавалась формулой (4.4).

§5. Уравнения лиувилевского типа и преобразования Миуры для эволюционных уравнений

В теории интегрируемых эволюционных уравнений хорошо известны (см., например, [37]–[39]) дифференциальные подстановки типа преобразования Миуры. Соотношение

$$v = P(x, u, u_x, \dots) \quad (5.1)$$

называется дифференциальной подстановкой из уравнения

$$u_\tau = f(x, u, u_x, \dots)$$

в уравнение

$$v_\tau = g(x, v, v_x, \dots),$$

если для любого решения $u(x, \tau)$ первого уравнения функция (5.1) удовлетворяет второму. Далеко не для всякой функции $P(x, u, u_x, \dots)$ можно найти пару эволюционных уравнений, которые бы связывала подстановка (5.1). С другой стороны, во всех известных примерах оказывается, если уж одна такая пара существует, то их бесконечно много.

Задача полного перечисления всех возможных дифференциальных подстановок является весьма сложной и в общей постановке не решена и по сей день. Однако тесная связь между дифференциальными подстановками и гиперболическими уравнениями лиувиллевого типа, обнаруженная в [39], привела к серьезному прогрессу в этом вопросе.

Как мы увидим ниже, для всякого уравнения лиувиллевого типа его Y - и X -интегралы минимального порядка задают дифференциальные подстановки вида (5.1). Вполне вероятно, что вообще *все* дифференциальные подстановки получаются из уравнений лиувиллевого типа с помощью этой конструкции, но в настоящий момент мы совершенно не представляем, как бы это можно было доказать.

Сначала рассмотрим следующее уравнение лиувиллевого типа:

$$u_{xy} = u u_y. \quad (5.2)$$

Легко проверить, что для него

$$\psi = 1, \quad \bar{\psi} = u_y, \quad H_0 = 0, \quad H_1 = H_2 = u_y, \quad H_3 = 0.$$

Минимальные Y - и X -интегралы задаются формулой

$$w = u_x - \frac{1}{2}u^2, \quad \bar{w} = \frac{u_{yyy}}{u_y} - \frac{3}{2}\frac{u_{yy}^2}{u_y^2}. \quad (5.3)$$

Формулы (4.3), (2.40) с учетом замечания 3 дают

$$\mathcal{M} = D^2 + uD + u_x, \quad \overline{\mathcal{M}} = u_y, \quad \mathcal{L} = D^3 + 2wD + w_x. \quad (5.4)$$

Симметрии уравнения (5.2)

$$u_\tau = \mathcal{M}w = u_{xxx} - \frac{3}{2}u^2u_x \quad (5.5)$$

и

$$u_\tau = \overline{\mathcal{M}}\bar{w} = u_{yyy} - \frac{3}{2}\frac{u_{yy}^2}{u_y} \quad (5.6)$$

являются хорошо известными точно интегрируемыми эволюционными уравнениями. Нетрудно проверить, что производная w_τ , вычисленная в силу уравнения (5.5), совпадает с $w_{xxx} + 3ww_x$. Другими словами, Y -интеграл (5.3) уравнения (5.2) задает дифференциальную подстановку из уравнения мКдФ (5.5) в уравнение Кортевега–де Фриза. Эта подстановка – не что иное, как знаменитое преобразование Миуры.

Аналогично, X -интеграл задает подстановку из уравнения (5.6) в уравнение КдФ $\overline{w}_\tau = \overline{w}_{yy} + 3\overline{w}\overline{w}_y$.

Более того, для любой симметрии уравнения (5.2) вида

$$u_\tau = (D^2 + uD + u_x) G(x, w, w_x, \dots, w_n) \quad (5.7)$$

Y -интеграл $w = u_x - \frac{1}{2}u^2$ удовлетворяет некоторому эволюционному уравнению $w_\tau = Q(x, w, w_x, \dots)$. Дело в том, что дифференцирование D_τ в силу уравнения (5.7) коммутирует с $\overline{D}$ и поэтому переводит Y -интегралы снова в Y -интегралы. В частности, Y -интегралом является $D_\tau(w)$. Согласно предложению 1, всякий Y -интеграл может быть представлен в виде (2.41). Поэтому $D_\tau(w) = Q(x, w, w_x, \dots)$.

Уточним явный вид функции Q :

$$\begin{aligned} w_\tau &= (D - u) u_\tau = (D - u) (D^2 + uD + u_x) G(x, w, w_x, \dots, w_n) \\ &= (D^3 + 2wD + w_x) G(x, w, w_x, \dots, w_n) = \mathcal{L} G(x, w, w_x, \dots, w_n). \end{aligned}$$

Аналогичные рассуждения доказывают следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Для любого уравнения лиувилевского типа всякая симметрия вида*

$$u_\tau = \mathcal{M} G(x, w, w_x, \dots), \quad (5.8)$$

где w – минимальный Y -интеграл, связана дифференциальной подстановкой

$$v = w(x, u, u_x, \dots, u_k) \quad (5.9)$$

с некоторым эволюционным уравнением вида

$$v_\tau = Q(x, v, v_x, \dots). \quad (5.10)$$

Допустимая свобода $w \rightarrow f(x, w)$ в выборе минимального интеграла соответствует точечному преобразованию в уравнении (5.10).

Легко видеть, что правая часть Q уравнения (5.10) имеет вид

$$Q = w^* \mathcal{M}(G(x, v, v_x, \dots)). \quad (5.11)$$

Здесь

$$w^* \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^k \frac{\partial w}{\partial u_i} D^i$$

– производная Фреше от минимального Y -интеграла w . Поскольку $D_\tau(w)$ является Y -интегралом для произвольной функции G , все коэффициенты дифференциального оператора $w^* \mathcal{M}$ представляют собой Y -интегралы.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Во всех известных нам примерах оператор $w^* \mathcal{M}$ совпадает (при согласованном определении w и ψ) с оператором $\mathcal{L}$, задаваемым формулой (2.43). Если это так, то согласно (2.43), (4.3) должна иметь место формула

$$w^* = \frac{\overline{\psi}}{\psi} H_0 H_{-1} \cdots H_{1-s} D \frac{1}{H_{1-s}} D \cdots \frac{1}{H_0} D \frac{1}{\overline{\psi}}. \quad (5.12)$$

При предположении, что порядок k минимального интеграла равен $\text{ord } \mathcal{L} - \text{ord } \mathcal{M}$, мы умеем этот факт строго доказывать.

Пусть у нас имеется произвольная дифференциальная подстановка первого порядка

$$v = P(x, u, u_x). \quad (5.13)$$

Сопоставим ей гиперболическое уравнение

$$u_{xy} = -\frac{P_u}{P_{u_x}} u_y, \quad (5.14)$$

для которого функция P является Y -интегралом. Для преобразования Миуры это уравнение совпадает с (5.2). Из (2.21) следует, что $H_0 = 0$ для любой функции P . Удивительно, что для всех известных примеров подстановок (5.13) уравнение (5.14) является уравнением лиувилевского типа (т.е. $H_r = 0$ для некоторого $r > 0$).

Например, известной дифференциальной подстановке $v = u_x + \exp(u) + \exp(-u)$ соответствует уравнение

$$u_{xy} = (\exp(-u) - \exp(u))u_y, \quad (5.15)$$

для которого $H_3 = 0$.

ТЕОРЕМА 6. Уравнение (5.14) является уравнением лиувилевского типа тогда и только тогда, когда существует замена $u \rightarrow f(x, u)$, после которой функция $P(x, u, u_x)$ для полученного уравнения удовлетворяет соотношению вида

$$u_x = \alpha(x, P)u^2 + \beta(x, P)u + \gamma(x, P) \quad (5.16)$$

для некоторых α, β и γ . При такой нормировке уравнение имеет (не обязательно минимальный) X -интеграл вида

$$\overline{W} = \frac{u_{yuy}}{u_y} - \frac{3}{2} \frac{u_{yy}^2}{u_y^2}.$$

Итак, существует семейство подстановок вида (5.13), зависящее от трех произвольных функций α, β и γ . По-видимому, этими подстановками с точностью до замен $u \rightarrow f(x, u)$ и исчерпывается список всех дифференциальных подстановок первого порядка. В частности, для (5.15) после замены $u \rightarrow \ln u$ функция P удовлетворяет уравнению $u_x = -u^2 + Pu - 1$. Для замены Коула–Хопфа $v = \frac{u_x}{u}$, линеаризующей уравнение Бюргерса $v_\tau = v_{xx} + 2vv_x$, имеем $u_x = Pu$, и т. д.

§ 6. Список уравнений лиувиллевого типа

6.1. Список. В этом разделе мы приводим полный с точностью до инволюции $x \leftrightarrow y$ и (вообще говоря, комплексных) преобразований вида

$$x \rightarrow \zeta(x), \quad y \rightarrow \xi(y), \quad u \rightarrow \theta(x, y, u) \quad (6.1)$$

список *нелинейных* уравнений лиувиллевого типа и их Y - и X -интегралов.

КЛАСС 1. Уравнения этого класса имеют вид

$$u_{xy} = -\frac{W_y}{W_{u_x}}, \quad (6.2)$$

где функция $W(x, y, u_x)$ определяется из уравнения вида

$$u_x = q_0(x, y) + \sum_{i=1}^n \alpha_i(y) q_i(x, W),$$

α_i, q_i – произвольные функции. Функция $w = W(x, y, u_x)$ является Y -интегралом. Обозначим через

$$L = \frac{\partial^n}{\partial y^n} + \sum_{i=0}^{n-1} c_i(y) \frac{\partial^i}{\partial y^i}$$

однозначно определенный дифференциальный оператор с ядром, порожденным $\alpha_1(y), \alpha_2(y), \dots, \alpha_n(y)$. Тогда X -интеграл (не обязательно минимальный!) имеет вид

$$\bar{w} = \bar{u}_n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i(y) \bar{u}_i + \alpha(x, y),$$

где $c_i(y)$ – коэффициенты оператора L . Функция $\alpha(x, y)$ определяется из соотношения

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = -L(q_0).$$

КЛАСС 2. (См. § 5.)

$$u_{xy} = -\frac{P_u}{P_{u_x}} u_y, \quad (6.3)$$

где

$$u_x = \alpha(x, P)u^2 + \beta(x, P)u + \gamma(x, P),$$

α, β, γ – произвольные функции. Интегралами являются $w = P(x, u, u_x)$ и

$$\bar{w} = \frac{\bar{u}_3}{\bar{u}_1} - \frac{3}{2} \frac{\bar{u}_2^2}{\bar{u}_1^2}.$$

Хорошо известным примером уравнения из класса 2 является

УРАВНЕНИЕ 1.

$$u_{xy} = e^u u_y.$$

КЛАСС 3.

$$u_{xy} = A_n(x, y) \sqrt{u_x u_y},$$

где $A_n(x, y)$ – любое решение уравнения

$$h_n = 0, \quad n \geq 1,$$

левая часть которого h_n определяется рекуррентными формулами

$$h_{k+1} = 2h_k - h_{k-1} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln h_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-2, \quad (6.4)$$

$$h_0 = \frac{1}{4} A_n^2, \quad h_1 = \frac{1}{4} A_n^2 - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln A_n. \quad (6.5)$$

В частности, в этом классе содержатся все уравнения с

$$A_n = \frac{2n\lambda}{\lambda(x+y) - xy}$$

и их вырождения с

$$A_n = \frac{2n}{x+y}.$$

Y -интеграл $w = w(x, y, u, u_1, \dots, u_n)$ имеет вид

$$w = \frac{1}{A_n} (D - D(h_1)) \dots (D - D(h_1 \dots h_{n-1})) A_n \sqrt{u_x}.$$

Интеграл $\bar{w}$ получается из него заменой $D \rightarrow \bar{D}$, $u_x \rightarrow u_y$.

УРАВНЕНИЕ 2.

$$u_{xy} = e^u.$$

Минимальные интегралы имеют вид

$$w = u_2 - \frac{1}{2} u_1^2, \quad \bar{w} = \bar{u}_2 - \frac{1}{2} \bar{u}_1^2.$$

УРАВНЕНИЕ 3.

$$u_{xy} = \left(\frac{1}{u-x} + \frac{1}{u-y} \right) u_x u_y.$$

Минимальные интегралы:

$$w = \frac{u_2}{u_1} + \frac{1-2u_1}{u-x}, \quad \bar{w} = \frac{\bar{u}_2}{\bar{u}_1} + \frac{1-2\bar{u}_1}{u-y}.$$

УРАВНЕНИЕ 4.

$$u_{xy} = f(u) b(u_x),$$

где

$$f f'' - f'^2 = 0, \quad b b' + u_1 = 0.$$

Минимальные интегралы задаются формулами

$$w = \frac{u_2}{b} + f' \frac{b}{f}, \quad \bar{w} = \bar{u}_2 - \frac{f'}{2f} \bar{u}_1^2 + \int f^2 du.$$

УРАВНЕНИЕ 5.

$$u_{xy} = f(u) b(u_x) \bar{b}(u_y),$$

где

$$(\ln f)'' - f^2 = 0, \quad bb' + u_1 = 0, \quad \bar{b}\bar{b}' + \bar{u}_1 = 0.$$

Минимальные интегралы задаются формулами

$$w = \frac{u_2}{b} + f' \frac{b}{f}, \quad \bar{w} = \frac{\bar{u}_2}{\bar{b}} + f' \frac{\bar{b}}{f}.$$

УРАВНЕНИЕ 6.

$$u_{xy} = \frac{1}{u} b(u_x) \bar{b}(u_y),$$

где

$$bb' + cb + u_1 = 0, \quad \bar{b}\bar{b}' + c\bar{b} + \bar{u}_1 = 0,$$

где c – произвольная постоянная. Минимальные интегралы:

$$w = \frac{u_2}{b} - \frac{b}{u}, \quad \bar{w} = \frac{\bar{u}_2}{\bar{b}} - \frac{\bar{b}}{u}.$$

УРАВНЕНИЕ 7.

$$u_{xy} = \frac{1}{(x+y) b(u_1) \bar{b}(\bar{u}_1)},$$

где

$$b' = b^3 + b^2, \quad \bar{b}' = \bar{b}^3 + \bar{b}^2.$$

Минимальные интегралы:

$$w = b u_2 - \frac{1}{b(x+y)}, \quad \bar{w} = \bar{b} \bar{u}_2 + \frac{1}{\bar{b}(x+y)}.$$

УРАВНЕНИЕ 8.

$$u_{xy} = \frac{1}{u} b(u_x) \bar{b}(u_y),$$

где

$$bb' + b - 2u_1 = 0, \quad \bar{b}\bar{b}' + \bar{b} - 2\bar{u}_1 = 0.$$

Минимальные интегралы:

$$w = \frac{u_3}{b} + \frac{2(b-u_1)}{b^3} u_2^2 + \frac{2(2u_1+b)}{ub} u_2 + \frac{b(u_1+b)}{u^2},$$

$$\bar{w} = \frac{\bar{u}_3}{\bar{b}} + \frac{2(\bar{b}-\bar{u}_1)}{\bar{b}^3} \bar{u}_2^2 + \frac{2(2\bar{u}_1+\bar{b})}{u\bar{b}} \bar{u}_2 + \frac{\bar{b}(\bar{u}_1+\bar{b})}{u^2}.$$

УРАВНЕНИЕ 9.

$$u_{xy} = \frac{1}{B_{u_1} \overline{B}_{\overline{u}_1}} \left[B \overline{B} \left(\frac{1}{6u+x} + \frac{1}{6u+y} \right) - \frac{1}{6u+y} B - \frac{1}{6u+x} \overline{B} \right],$$

где

$$\frac{1}{3} B^3 - \frac{1}{2} B^2 = u_1, \quad \frac{1}{3} \overline{B}^3 - \frac{1}{2} \overline{B}^2 = \overline{u}_1.$$

Минимальные интегралы:

$$\begin{aligned} w = D \left\{ \ln \left[u_2 - \frac{B^4(B-1)^2}{6u+y} - \frac{B^2(B-1)^4}{6u+x} \right] - \ln B(B-1) \right\} \\ - \left[\left(\frac{1}{6u+y} + \frac{1}{6u+x} \right) B - \frac{1}{6u+x} \right] B(B-1), \\ \overline{w} = \overline{D} \left\{ \ln \left[\overline{u}_2 - \frac{\overline{B}^4(\overline{B}-1)^2}{6u+x} - \frac{\overline{B}^2(\overline{B}-1)^4}{6u+y} \right] - \ln \overline{B}(\overline{B}-1) \right\} \\ - \left[\left(\frac{1}{6u+y} + \frac{1}{6u+x} \right) B - \frac{1}{6u+x} \right] B(B-1). \end{aligned}$$

6.2. Комментарии. 1. Отметим, что для уравнений из класса 3 из формул (6.5) следует, что $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln h_1 = 2h_1 - 2h_0$. Следовательно, соотношения (6.4), (6.5) и $h_n = 0$ представляют собой открытую цепочку Тоды серии C_n , и поэтому все возможные функции A_n могут быть найдены явно [40], [41].

2. Как видно из списка, для уравнений из класса 3 условие обрыва $H_r = H_{-s} = 0$ может выполняться при сколь угодно больших r и s . Классификация уравнений с большими r и s доставляет значительные трудности. Основное наблюдение, позволяющее их преодолеть, опубликовано в [25].

3. Конечно, все дифференциальные уравнения для $f(u)$, $b(u_x)$ и $\overline{b}(u_y)$ в случае уравнений 5–8 легко интегрируются. Однако если приводить явные формулы, то из-за необходимости отдельно рассматривать частные решения размер списка увеличивается. Например, уравнение 4 эквивалентно одному из двух уравнений:

$$u_{xy} = \exp(u) \sqrt{1 - u_x^2}$$

или

$$u_{xy} = \sqrt{1 - u_x^2}.$$

4. При приведении уравнений к одной из перечисленных выше канонических форм мы пользовались комплексными преобразованиями. Список вещественных канонических форм несколько шире.

5. Согласно известному наблюдению Гурса [42] уравнение вида

$$u_{xy} = A(x, y) \sqrt{u_x u_y} \tag{6.6}$$

подстановкой $v = \sqrt{u_y}$ сводится к линейному уравнению

$$v_{xy} = \frac{A_y}{A} v_x + \frac{A^2}{4} v. \quad (6.7)$$

Можно показать, что (6.6) является уравнением лиувиллевого типа тогда и только тогда, когда лиувиллевский тип имеет соответствующее уравнение (6.7).

Функции h_i (см. описание уравнений из класса 3) – это просто инварианты Лапласа уравнения (6.7). Всякое уравнение (6.7) лиувиллевого типа имеет Y -интегралы вида

$$w = \sum_{i=0}^m M_i(x, y) \bar{v}_i.$$

Соответствующие интегралы уравнения (6.6) могут быть получены из них подстановкой $v = \sqrt{u_y}$.

6. Грубо говоря, уравнения лиувиллевого типа – это уравнения, связанные различными подстановками с уравнением $v_{xy} = 0$. Однако существуют нелинейные уравнения (1.2), связанные подстановками, скажем, с уравнением

$$v_{xy} = v. \quad (6.8)$$

В частности, уравнение

$$u_{xy} = 2\sqrt{u_x u_y} \quad (6.9)$$

связано с (6.8) подстановкой

$$v = c_1 \sqrt{u_x} + c_2 \sqrt{u_y},$$

где c_i – произвольные постоянные.

Как уравнение (6.8), так и уравнение (6.9) не являются уравнениями лиувиллевого типа. Таким образом, понятие ”линеаризуемое уравнение” является более широким, чем понятие ”уравнение лиувиллевого типа”.

7. Существуют примеры уравнений, у которых цепочка инвариантов Лапласа обрывается только в одну сторону. Например, для уравнения

$$u_{xy} = \exp(u) b(u_x), \quad (u_x - b)(b + 2u_x)^2 = 1,$$

инвариант H_{-1} равен нулю, в то время как $H_i \neq 0$ при $i > 0$. Мы не знаем, является ли это уравнение интегрируемым в каком-либо смысле.

§ 7. Заключительные замечания

7.1. Об одном свойстве оператора $\mathcal{L}$. Рассмотрим множество $\mathcal{G}$ всех функций, зависящих от переменных

$$x, \quad u_0 = u, \quad u_1 = u_x, \quad u_2 = u_{xx}, \quad \dots$$

Для каждой функции $f(x, u, u_1, \dots, u_n)$ положим

$$f^* \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^n \frac{\partial f}{\partial u_i} D^i.$$

Скобка Ли

$$[f, g] \stackrel{\text{def}}{=} g^*(f) - f^*(g) \quad (7.1)$$

задает на $\mathcal{G}$ структуру алгебры Ли. Скобка (7.1) соответствует коммутатору потоков эволюционных уравнений $w_{t_1} = f$ и $w_{t_2} = g$. Поэтому множество симметрий вида

$$u_\tau = S(x, u, u_1, u_2, \dots) \quad (7.2)$$

данного уравнения лиувилевского типа образует подалгебру Ли в $\mathcal{G}$ (как обычно, мы отождествляем симметрии с их правыми частями).

Оператор $\mathcal{L} = D^3 + 2uD + u_1$, связанный с уравнением Лиувилля (см. пример 1), обладает следующим замечательным свойством. Его образ является подалгеброй Ли в $\mathcal{G}$. А именно, легко проверить, что

$$[\mathcal{L}(f), \mathcal{L}(g)] = \mathcal{L}(D(f)g - D(g)f + g^*\mathcal{L}(f) - f^*\mathcal{L}(g)).$$

Поскольку $\mathcal{L}$ инъективен, последняя формула задает на $\mathcal{G}$ новую скобку Ли:

$$[f, g]_1 \stackrel{\text{def}}{=} D(f)g - D(g)f + g^*\mathcal{L}(f) - f^*\mathcal{L}(g). \quad (7.3)$$

Для всех известных нам гиперболических уравнений лиувилевского типа оператор $\mathcal{L}$, заданный формулой (2.43), обладает тем же свойством. Мы покажем, что в свете результатов §5 это выглядит довольно естественно.

Обозначим через $\mathcal{G}_w$ алгебру Ли функций от переменных $x, w, w_1, \dots$ со скобкой вида (7.1). Согласно теореме 4 и предложению 3 все коэффициенты оператора $\mathcal{L}$ являются функциями от $x, w, w_1, \dots$, где w – минимальный Y -интеграл. Таким образом, у нас имеется дифференциальный оператор $\mathcal{L}: \mathcal{G}_w \rightarrow \mathcal{G}_w$. Покажем, что при некоторых предположениях $\text{Im } \mathcal{L}$ является подалгеброй Ли в $\mathcal{G}_w$.

Рассмотрим множество $\mathcal{S}$ всех симметрий вида (5.8) заданного уравнения лиувилевского типа. Для всех известных примеров $\mathcal{S}$ совпадает с множеством всех симметрий вида (7.2) и поэтому является подалгеброй Ли в $\mathcal{G}$ относительно скобки (7.1). Как было показано в §5, образ симметрии (5.8) при подстановке (5.9) – это уравнение $w_\tau = Q$, где

$$Q = w^*\mathcal{M}(G(x, w, w_1, \dots)). \quad (7.4)$$

Поэтому множество всех функций вида (7.4) образует подалгебру относительно скобки (7.1). Чтобы закончить рассуждение, напомним, что согласно замечанию 4 $w^*\mathcal{M} = \mathcal{L}$ для всех известных уравнений лиувилевского типа.

Для заданного дифференциального оператора $\mathcal{L}$ с коэффициентами из $\mathcal{G}_w$ не очень трудно проверить, является ли его образ подалгеброй Ли. Это условие является довольно жестким.

Рассмотрим, например, операторы, “похожие” на (3.41). А именно, коэффициенты оператора (3.41) являются многочленами от $w, w_1, w_2, \dots$. Сам оператор однороден, если считать, что D имеет вес 1, а вес w_i равен $i + 1$. Ниже приведен полный список операторов $\mathcal{L}$ порядков 2–6 указанной однородности таких, что $\text{Im } \mathcal{L}$ – подалгебра Ли в $\mathcal{G}_w$. Оказалось, что все они раскладываются на множители первого порядка.

Операторы 2-го порядка:

$$\mathcal{L}_1^{(2)} = D (D + w).$$

Операторы 3-го порядка:

$$\mathcal{L}_1^{(3)} = D (D + w) (D + w).$$

Операторы 4-го порядка:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1^{(4)} &= D (D + w) (D + w) (D + w), \\ \mathcal{L}_2^{(4)} &= D (D + w) (D + w) (D + 2w). \end{aligned}$$

Операторы 5-го порядка:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1^{(5)} &= D (D + w) (D + w) (D + w) (D + w), \\ \mathcal{L}_2^{(5)} &= D (D + w) (D + w) (D + 2w) (D + 3w). \end{aligned}$$

Операторы 6-го порядка:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1^{(6)} &= D (D + w) (D + w) (D + w) (D + w) (D + w), \\ \mathcal{L}_2^{(6)} &= D (D + w) (D + w) (D + w) (D + w) (D + 2w), \\ \mathcal{L}_3^{(6)} &= D (D + w) (D + w) (D + 2w) (D + 3w) (D + 3w), \\ \mathcal{L}_4^{(6)} &= D (D + w) (D + w) (D + 2w) (D + 3w) (D + 4w). \end{aligned}$$

Отметим, что оператор $\mathcal{L}_2^{(5)}$ совпадает с (3.41). Интересно было бы найти все такие однородные операторы порядков больше шести и понять, что за красивая математика скрывается за наборами натуральных коэффициентов, содержащихся в факторах операторов $\mathcal{L}_i^{(j)}$.

Можно показать, что для всякого гамильтонова дифференциального оператора (см. [43]) его образ – подалгебра в $\mathcal{G}$. Поэтому условие, рассмотренное выше, приводит к некоторому некососимметрическому обобщению понятия гамильтонова оператора.

7.2. Системы лиувиллевого типа. Непосредственным обобщением уравнения Лиувилля на случай систем вида (1.5) являются открытые цепочки Тоды [41], [30], связанные с матрицами Картана простых алгебр Ли. Одна из эквивалентных форм записи этих систем имеет вид

$$(u_i)_{xy} = \sum_j A_i^j \exp(u_j),$$

где A_i^j – элементы матрицы Картана соответствующей простой алгебры Ли. Хорошо известно, что эти системы обладают Y - и X -интегралами (см. [44]).

Очевидно, что бóльшую часть приведенных утверждений и конструкций этой статьи, связанных с уравнениями лиувиллевого типа, можно обобщить на случай систем (1.5). Однако здесь имеется следующая серьезная проблема, связанная с определением инвариантов Лапласа.

Оператор линеаризации (2.18) в этом случае – это оператор вида $D\overline{D} + aD + b\overline{D} + c$ с матричными коэффициентами. Прямолинейное обобщение всех определений на матричный случай (см. [45]) состоит в следующем. Главные инварианты Лапласа определяются формулами

$$H_1 = D(a) + b a - c, \quad H_0 = \overline{D}(b) + a b - c,$$

а матрицы H_i при $i > 1$ находятся рекуррентно из системы

$$\overline{D}H_i - H_i a_{i-1} + a_i H_i = 0, \quad (7.5)$$

$$H_{i+1} = 2H_i + D(a_i - a_{i-1}) + [b, a_i - a_{i-1}] - H_{i-1}, \quad (7.6)$$

где $a_0 = a$. Конечно, в скалярном случае эти формулы совпадают с соответствующими формулами из системы (2.6).

Если H_i при $i \leq k$ и a_i при $i \leq k-1$ уже известны, то из уравнения (7.5) определяется a_k , а затем из уравнения (7.6) – H_{k+1} . Однако если $\det H_k = 0$, то a_k либо вообще не существует, либо определяется не единственным образом, а с точностью до матрицы α такой, что $\alpha H_k = 0$. При этом существование и свойства последующих инвариантов Лапласа существенно зависят от выбора α .

Вырождение $\det H_k = 0$ при некотором k типично для открытых цепочек Тоды.

ПРИМЕР 5. Рассмотрим цепочку Тоды серии A_2 :

$$u_{xy} = -2 \exp u + \exp v, \quad v_{xy} = \exp u - 2 \exp v.$$

Оператор линеаризации имеет вид

$$D\overline{D} + \begin{pmatrix} 2 \exp u & -\exp v \\ -\exp u & 2 \exp v \end{pmatrix}.$$

Из формул (7.5), (7.6) находим

$$a_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4u_y + v_y & -2u_y + 2v_y \\ 2u_y - 2v_y & u_y - 4v_y \end{pmatrix},$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} \exp u - 2 \exp v & 2 \exp u - \exp v \\ -\exp u + 2 \exp v & -2 \exp u + \exp v \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что $\det H_2 = 0$.

Нетрудно доказать [45] следующее общее утверждение (ср. с теоремой 3).

ТЕОРЕМА 7. Если система (1.5) обладает Y - и X -интегралами

$$W(x, y, \vec{u}, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p), \quad \overline{W}(x, y, \vec{u}, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{\overline{p}}),$$

то $\det H_r = \det H_{-s} = 0$ для некоторых $r \leq p$, $s \leq \overline{p} - 1$.

Таким образом, для систем типа цепочек Тоды некоторые из инвариантов Лапласа обязательно вырождены, и мы сталкиваемся с проблемой корректного определения последовательности инвариантов Лапласа.

Положим

$$Z_k = H_k H_{k-1} \cdots H_1. \quad (7.7)$$

Из соотношений (7.5) следует, что

$$Z_k (\overline{D} + a) = (\overline{D} + a_k) Z_k. \quad (7.8)$$

Именно последовательность Z_k (а не H_k) корректно определена для известных систем лиувиллевского типа. При этом если H_i (а вместе с ними и Z_i) при $i \leq k$ и a_i при $i \leq k - 1$ уже известны, то a_k следует определять из соотношения (7.8), а затем из уравнения

$$H_{k+1} = (D + b) a_k - (\overline{D} + a_k) b + H_k, \quad (7.9)$$

эквивалентного соотношению (7.6), находить H_{k+1} . Матрица a_k определена с точностью до произвольной матрицы α такой, что $\alpha Z_k = 0$.

ТЕОРЕМА 8. Пусть H_i при $i \leq k$ уже известны и при $i < k$ выполнены условия

$$(\overline{D} + a)(\ker Z_i) \subset \ker Z_i \quad (7.10)$$

и

$$(D - b^T)(\ker Z_i^T) \subset \ker Z_i^T. \quad (7.11)$$

Тогда для существования a_k необходимо и достаточно выполнение условия (7.10) при $i = k$. При этом Z_{k+1} не зависит от произвольной матрицы α , фигурирующей в определении a_k , если и только если при $i = k$ выполнено условие (7.11).

ИДЕЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Из формулы (7.8) следует, что для существования матрицы a_k необходимо выполнение условия (7.10) при $i = k$. Достаточность следует из теоремы Кронекера–Капелли. Необходимость условия (7.11) вытекает из (7.9).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В случае $a = b = 0$ условия (7.10), (7.11) выполнены, если пространства $\ker Z_k$ и $\ker Z_k^T$ допускают базисы, состоящие из постоянных векторов.

ПРИМЕР 6. Для цепочки Тоды серии A_3

$$\begin{aligned}(u_1)_{xy} &= 2 \exp u_1 - \exp u_2, \\ (u_2)_{xy} &= -\exp u_1 + 2 \exp u_2 - \exp u_3, \\ (u_3)_{xy} &= -\exp u_2 + 2 \exp u_3,\end{aligned}$$

все матрицы Z_k однозначно определены и $\text{rank } Z_k = 4 - k$. В частности, $Z_4 = 0$. Вектор $e_1 = (1, 1, 1)^T$ образует базис $\ker Z_2$. Базис пространства $\ker Z_3$ можно выбрать следующим образом: e_1 и $e_2 = (1, 0, -1)^T$. Базисами $\ker Z_2^T$ и $\ker Z_3^T$ являются $f_1 = (3, 4, 3)^T$ и $f_1, f_2 = (1, 0, -1)^T$. Таким образом, в этом случае $\ker Z_k$ и $\ker Z_k^T$ допускают постоянные базисы и поэтому выполнены условия (7.10), (7.11).

ПРИМЕР 7. Для цепочки Тоды серии C_3

$$\begin{aligned}(u_1)_{xy} &= 2 \exp u_1 - \exp u_2, \\ (u_2)_{xy} &= -\exp u_1 + 2 \exp u_2 - \exp u_3, \\ (u_3)_{xy} &= -2 \exp u_2 + 2 \exp u_3,\end{aligned}$$

матрицы Z_k однозначно определены,

$$\text{rank } Z_1 = 3, \quad \text{rank } Z_2 = 2, \quad \text{rank } Z_3 = 2, \quad \text{rank } Z_4 = 1, \quad \text{rank } Z_5 = 1 \quad \text{и} \quad Z_6 = 0.$$

Все пространства $\ker Z_k$ и $\ker Z_k^T$ допускают постоянные базисы.

ПРИМЕР 8. В случае цепочки Тоды D_3

$$\begin{aligned}(u_1)_{xy} &= 2 \exp u_1 - \exp u_2 - \exp u_3, \\ (u_2)_{xy} &= -\exp u_1 + 2 \exp u_2, \\ (u_3)_{xy} &= -\exp u_1 + 2 \exp u_3,\end{aligned}$$

$\text{rank } Z_k = 4 - k$. Все пространства $\ker Z_k$ и $\ker Z_k^T$ обладают постоянными базисами.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Как мы видим из рассмотренных примеров, индексы i , при которых происходит падение ранга матриц Z_i , совпадают с показателями соответствующей простой алгебры Ли, а номер h , для которого $Z_h = 0$, равен числу Кокстера.

Обрыв цепочки Z_i может быть положен в основу определения систем (1.5) лиувиллевого типа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Назовем (1.5) системой лиувиллевого типа, если выполнены условия (7.10) и (7.11) и существуют $r \geq 1$ и $s \geq 0$ такие, что $Z_r = Z_{-s} \equiv 0$.

Используя это определение, проклассифицируем все цепочки лиувиллевого типа вида

$$\begin{aligned}(u_1)_{xy} &= 2 \exp u_1 + k_1 \exp u_2, \\ (u_2)_{xy} &= k_2 \exp u_1 + 2 \exp u_2\end{aligned}\tag{7.12}$$

с невырожденной ($k_1 k_2 \neq -4$) недиагональной матрицей Картана.

Легко проверить, что при любых k_1, k_2 $\text{rank } Z_1 = 2$, $\text{rank } Z_2 = 1$. Далее, $Z_3 = 0$ тогда и только тогда, когда $k_1 = k_2 = -1$ (цепочка Тоды A_2).

Пусть $Z_3 \neq 0$, тогда условие (7.10) с $i = 3$ выполнено, если и только если $k_1 = -1$ или $k_2 = -1$. Без потери общности положим $k_1 = -1$. Тогда $Z_4 = 0$ тогда и только тогда, когда $k_2 = -2$ (цепочка Тоды C_2).

Если $k_2 \neq -2$, тогда $\text{rank } Z_5 = 1$ и условие (7.10) с $i = 5$ выполнено, если и только если $k_2 = -3$. В этом случае $Z_6 = 0$ (цепочка Тоды G_2).

Таким образом, мы доказали, что все системы (7.12) лиувиллевого типа исчерпываются цепочками Тоды, соответствующими простым алгебрам Ли ранга 2.

7.3. Уравнения типа sin-Gordon. Кроме уравнений sin-Gordon

$$u_{xy} = \sin u,$$

Цицейки

$$u_{xy} = \exp(u) + \exp(-2u),$$

а также уравнения (1.3), хорошо известно интегрируемое уравнение

$$u_{xy} = S(u) \sqrt{1 - u_x^2},\tag{7.13}$$

где S – любое решение обыкновенного дифференциального уравнения вида

$$S'' + \lambda^2 S = 0,$$

где λ – некоторая постоянная. С точностью до (комплексных) сдвигов и растяжений в (7.13) имеется три разных решения этого уравнения:

- $S = \sin u$,
- $S = u$,
- $S = 1$.

В первом случае уравнение (7.13) связано с уравнением $v_{xy} = \sin v$ дифференциальной подстановкой $v = \arcsin u_x + u$, во втором – подстановкой $v = \arcsin u_x$. В третьем случае (7.13) является уравнением лиувиллевого типа (см. уравнение 4 в списке §6) и сводится подстановкой $v = \arcsin u_x$ к волновому уравнению $v_{xy} = 0$.

Ниже мы приводим еще два интегрируемых уравнения (1.2). Эти уравнения связаны дифференциальными подстановками с уравнением Цицейки.

Модифицированные уравнения Цицейки. Оказывается, что рассмотренное в §3 уравнение (3.24) – это вырождение следующего (вероятно, нового) уравнения

$$u_{xy} = S(u) b(u_x) \bar{b}(u_y), \quad (7.14)$$

интегрируемого методом обратной задачи. Здесь функции $b(u_x)$ и $\bar{b}(u_y)$ определены формулами

$$(u_x - b)(b + 2u_x)^2 = 1, \quad (u_y - \bar{b})(\bar{b} + 2u_y)^2 = 1,$$

а S – произвольное решение дифференциального уравнения

$$S'' - 2SS' - 4S^3 = 0. \quad (7.15)$$

Отметим, что уравнение (7.15) имеет первый интеграл

$$I = (S' - 2S^2)^2 (S' + S^2).$$

Как сообщил нам М. Павлов, подстановки $S = Q'$ и $Q'^2 = F(Q)$ сводят (7.15) к линейному уравнению $F'' - 2F' - 8F = 0$. Отсюда следует, что функция $Z = \exp(-2Q)$ удовлетворяет уравнению $Z'^2 = c_1 Z^3 + c_2$, где c_i – некоторые постоянные.

Частное решение $S = \frac{1}{u}$ приводит к уравнению (3.24). Другое решение $S = -\frac{1}{2u}$ соответствует уравнению лиувилевского типа

$$u_{xy} = -\frac{1}{2u} b(u_x) \bar{b}(u_y).$$

Последнее уравнение эквивалентно одному из семейства уравнений 6 (см. список §6).

Уравнение (7.14) связано с уравнением Цицейки

$$v_{xy} = c_1 \exp(v) + c_2 \exp(-2v)$$

дифференциальной подстановкой

$$v = -\frac{1}{2} \ln(u_x - b) - \frac{1}{2} \ln(u_y - \bar{b}) + P(u),$$

где функция $P(u)$ определяется из дифференциального уравнения

$$P'^2 - 2SP' - 3S' - 2S^2 = 0.$$

При этом константы c_1 и c_2 удовлетворяют соотношению $c_1^2 c_2 = -I/27$.

Кроме уравнения (7.14), с уравнением Цицейки связано уравнение

$$u_{xy} = S(u) b(u_x), \quad (7.16)$$

где $S'' = 0$. С точностью до сдвигов и растяжений имеется два различных случая:

- $S = 3u$,
- $S = 1$.

В первом случае (см. [46]) уравнение (7.16) связано с уравнением $v_{xy} = \exp(v) + \exp(-2v)$ дифференциальной подстановкой

$$v = -\frac{1}{2} \ln(u_x - b). \quad (7.17)$$

Эта подстановка обратима в смысле работы [46].

В втором случае (7.16) является уравнением лиувилевского типа (принадлежит классу 1 в списке §6) и сводится подстановкой (7.17) к волновому уравнению $v_{xy} = 0$.

ГИПОТЕЗА. Перечисленными в этом разделе уравнениями исчерпывается, с точностью до инволюции $x \leftrightarrow y$ и (комплексных) преобразований (6.1), список уравнений (1.2), интегрируемых методом обратной задачи рассеяния.

В заключение заметим, что набор инвариантов Лапласа H_i для уравнения лиувиллевого типа удовлетворяет системе (2.22) с условием обрыва $H_r = H_{-s} = 0$. Эта система представляет собой одну из разновидностей открытой цепочки Тоды серии A , и поэтому сама является системой лиувиллевого типа.

Возникает вопрос, как обобщить это наблюдение на инварианты Лапласа на случай уравнений типа sin-Gordon. Наиболее естественное предположение о том, что инварианты для таких уравнений должны удовлетворять периодически замкнутым цепочкам Тоды, оказывается неверным. Было бы интересно найти описание уравнений типа sin-Gordon в терминах их инвариантов Лапласа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G. Darboux. Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 1870. V. 7. P. 163–173.
- [2] G. Darboux. Leçons sur la théorie générale des surfaces. V. II. Paris: Hermann, 1915.
- [3] E. Goursat. Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes. V. I, II. Paris: Hermann, 1896, 1898.
- [4] Д. Ф. Егоров. Уравнения с частными производными 2-го порядка по двум независимым переменным. Общая теория интегралов: характеристики // Ученые записки Императорского Моск. ун-та. 1899. Т. 15.
- [5] E. Gau. Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre par la méthode de M. Darboux // J. Math. Pures Appl. 1911. V. 7. P. 123–240.
- [6] E. Vessiot. Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre, $F(x, y, p, q, r, s, t) = 0$, intégrables par la méthode de Darboux // J. Math. Pures Appl. 1939. V. 18. P. 1–61.
- [7] Ф. Трикоми. Лекции по уравнениям в частных производных. М.: ИЛ, 1957.
- [8] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. Теория солитонов: метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
- [9] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
- [10] R. Gosse. La méthode de Darboux et les équations $s = f(x, y, z, p, q)$ // Mémoires de Sciences mathématiques, fasc. 12, Paris, 1926.
- [11] E. Goursat. Sur les intégrales de l'équation $s = f(x, y, z, p, q)$ // C. R. Acad. Sci. Paris. 1903. V. 136. P. 1383–1384.
- [12] É. Lainé. Sur l'application de la méthode de Darboux aux équations $s = f(x, y, z, p, q)$ // C. R. Acad. Sci. Paris. 1926. V. 182. P. 1127–1128.
- [13] É. Lainé. Sur les équations $s = f(x, y, z, p, q)$ intégrables par la méthode de Darboux // C. R. Acad. Sci. Paris. 1928. V. 186. P. 209–210.
- [14] D. H. Parsons. The extension of Darboux's method // Mémoires de Sciences Mathématiques, fasc. 142, Paris, 1960.
- [15] М. Ю. Звягин. Уравнения второго порядка, приводимые преобразованием Бэклунда к $z_{xy} = 0$ // Докл. АН СССР. 1991. Т. 316. № 1. С. 36–40.
- [16] А. Н. Лезнов, В. Г. Смирнов, А. Б. Шабат. Группа внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамических систем // ТМФ. 1982. Т. 51. № 1. С. 10–22.
- [17] I. M. Anderson, N. Kamran. The variational bicomplex for second order scalar partial differential equations in the plane // Preprint. Montréal: Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal, 1994.
- [18] I. M. Anderson, N. Kamran. The variational bicomplex for hyperbolic second-order scalar partial differential equations in the plane // Duke Math. J. 1997. V. 87. № 2. P. 265–319.

- [19] А. В. Жибер, В. В. Соколов, С. Я. Старцев. О нелинейных гиперболических уравнениях, интегрируемых по Дарбу // Докл. РАН. 1995. Т. 343. № 6. С. 746–748.
- [20] V. V. Sokolov, A. V. Zhiber. On the Darboux integrable hyperbolic equation // Phys. Lett. A. 1995. V. 208. P. 303–308.
- [21] I. M. Anderson, M. Juras. Generalized Laplace invariants and the method of Darboux // Duke Math. J. 1997. V. 89. № 2. P. 351–375.
- [22] А. В. Жибер, А. Б. Шабат. Уравнения Клейна–Гордона с нетривиальной группой // Докл. АН СССР. 1979. Т. 247. № 5. С. 1103–1107.
- [23] А. В. Жибер, А. Б. Шабат. Системы уравнений $u_x = p(u, v)$, $v_y = q(u, v)$, обладающие симметриями // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277. № 1. С. 29–33.
- [24] А. Б. Борисов, С. А. Зыков. Одевающая цепочка дискретных симметрий и размножение нелинейных уравнений // ТМФ. 1998. Т. 115. № 2. С. 199–214.
- [25] А. В. Жибер, В. В. Соколов. Новый пример гиперболического нелинейного уравнения, обладающего интегралами // ТМФ. 1999. Т. 120. № 1. С. 20–26.
- [26] J. Le Roux. Extensions de la méthode de Laplace aux équations linéaires aux dérivées partielles d'ordre supérieur au second // Bull. Soc. Math. France. 1899. V. 27. P. 237–262.
- [27] C. Athorne. A $\mathbf{Z}^2 \times \mathbf{R}^3$ Toda system // Phys. Lett. A. 1995. V. 206. P. 162–166.
- [28] С. П. Царев. Факторизация линейных дифференциальных операторов с частными производными и метод Дарбу интегрирования нелинейных уравнений с частными производными // ТМФ. 2000. Т. 122. № 1. С. 144–160.
- [29] А. В. Жибер. Квазилинейные гиперболические уравнения с бесконечной алгеброй симметрий // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 4. С. 33–54.
- [30] А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов. Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана // Препринт. Уфа: БФАН СССР, 1981.
- [31] А. В. Жибер, Н. Х. Ибрагимов, А. Б. Шабат. Уравнения типа Лиувилля // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249. № 1. С. 26–29.
- [32] А. Н. Лезнов, М. В. Савельев, В. Г. Смирнов. Общие решения двумерной системы уравнений Вольтерра, реализующих преобразования Беклунда для цепочки Toda // ТМФ. 1981. Т. 42. № 2. С. 216–234.
- [33] V. V. Sokolov, A. B. Shabat. Classification of integrable evolution equations // Soviet Sci. Rev. Sect. C. Math. Phys. Rev. 1984. V. 4. P. 221–280.
- [34] A. S. Fokas. Symmetries and integrability // Stud. Appl. Math. 1987. V. 77. P. 253–299.
- [35] А. В. Михайлов, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов. Симметричный подход к классификации нелинейных уравнений. Полные списки интегрируемых систем // УМН. 1987. Т. 42. № 4. С. 3–53.
- [36] A. V. Mikhailov, A. B. Shabat, V. V. Sokolov. The symmetry approach to classification of integrable equations // What is integrability? Berlin: Springer-Verlag, 1991. P. 115–184.
- [37] R. M. Miura. Korteweg–de Vries equation and generalizations. I: A remarkable explicit nonlinear transformation // J. Math. Phys. 1968. V. 9. P. 1202–1204.
- [38] С. И. Свинолулов, В. В. Соколов, Р. И. Ямилов. Преобразования Беклунда для интегрируемых эволюционных уравнений // Докл. АН СССР. 1983. Т. 271. № 4. С. 802–805.
- [39] В. В. Соколов. О симметриях эволюционных уравнений // УМН. 1988. Т. 43. № 5. С. 133–163.
- [40] T. Moutard. Sur la construction des équations de la forme $\frac{1}{z} \frac{d^2 z}{dx dy} = \lambda(x, y)$, qui admettent une intégrale générale explicite // J. École Polytech. 1878. V. 45. P. 1–11.
- [41] А. Н. Лезнов, М. В. Савельев. Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. М.: Наука, 1985.
- [42] E. Goursat. Sur une transformation de l'équation $s^2 = 4\lambda(x, y) pq$ // Bull. Soc. Math. France. 1900. V. 28. P. 1–6.
- [43] П. Олвер. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
- [44] A. B. Shabat. Higher symmetries of two-dimensional lattices // Phys. Lett. A. 1995. V. 200. P. 121–133.

- [45] С. Я. Старцев. Инварианты Лапласа интегрируемых гиперболических уравнений и дифференциальные подстановки типа преобразования Миуры // Дисс. . . . канд. физ.-матем. наук. Уфа: ИМ РАН, 1997.
- [46] V. V. Sokolov, S. I. Svinolupov. On nonclassical invertible transformations of hyperbolic equations // European J. Appl. Math. 1995. V. 6. P. 145–156.

Институт механики Уфимского научного центра РАН;
Центр нелинейных исследований при ИТФ им. Л. Д. Ландау РАН

Поступила в редакцию
20.08.2000