Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Головашкин, В. М. Максимов, О косых полиномах Оре высших порядков, порождаемых однородными квадратичными соотношениями, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 2, 145–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm36>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 17:59:41

О КОСЫХ ПОЛИНОМАХ ОРЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ, ПОРОЖДАЕМЫХ ОДНОРОДНЫМИ КВАДРАТИЧНЫМИ СООТНОШЕНИЯМИ

А. В. Головашкин, В. М. Максимов

1. Алгебра косых полиномов Оре хорошо известна. Она состоит из однозначно представляемых элементов $\alpha_0 + \alpha_1\tau + \dots + \alpha_k\tau^k$, $k = k(\alpha) = 0, 1, 2, \dots$, $\alpha_i \in \mathcal{K}$, где $\mathcal{K}$ – кольцо, с условием перестановки $\tau\alpha = \varphi(\alpha)\tau + \psi(\alpha)$. При этом φ является эндоморфизмом кольца $\mathcal{K}$, а ψ – его φ -дифференцирование [1]. В [2]–[5] рассматривались различные обобщения, называемые косыми полиномами Оре высших порядков, которые возникают при условии перестановки

$$(1) \quad \tau\alpha = \psi_1(\alpha)\tau + \psi_2(\alpha)\tau^2 + \dots,$$

что является удобным способом задания алгебры, так как тогда она определяется набором операторов $\psi_k: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$, связанных специальными алгебраическими соотношениями [5].

Однако, имеются случаи, в которых условия перестановки (1) оказываются недостаточными для задания алгебры косыми полиномами. Такими, например, будут алгебры, заданные общим квадратичным соотношением, которые находят важные приложения в физике [6].

При этом оказывается, что алгебры, заданные квадратичным соотношением, представляются косыми полиномами, но с соотношением перестановки в которых добавлен свободный, ненулевой член ψ_0 .

В [7] рассмотрены косые полиномы Оре с условием перестановки со свободным членом ψ_0 , т.е.

$$(2) \quad \tau\alpha = \psi_0(\alpha) + \psi_1(\alpha)\tau + \psi_2(\alpha)\tau^2 + \dots,$$

где ψ_0 при произвольных $\alpha, \beta \in \mathcal{K}$ удовлетворяет соотношению

$$\psi_0(\alpha\beta) = \psi_0(\alpha)\beta + \psi_1(\alpha)\psi_0(\beta) + \psi_2(\alpha)\psi_0^2(\beta) + \dots$$

или эквивалентному ему операторному уравнению $\psi_0\alpha = \psi_0(\alpha) + \psi_1(\alpha)\psi_0 + \psi_2(\alpha)\psi_0^2 + \dots$, в котором α рассматривается как оператор левого умножения на α кольца $\mathcal{K}$. Можно было бы считать ψ_0 особым оператором дифференцирования относительно $\psi_1, \psi_2, \dots$, но при этом ψ_1 может и не быть эндоморфизмом кольца $\mathcal{K}$.

Цель нашей заметки изложить полученные результаты о представлении алгебр, заданных квадратичным соотношением от двух образующих a, b :

$$(3) \quad ba = \alpha a^2 + \beta ab + \gamma b^2$$

в виде алгебры косых полиномов Оре высших порядков с условием перестановки вида (2). При этом основные результаты остаются справедливыми, если α, β, γ рассматривать из произвольного поля F характеристики 0.

2. Алгебра, порождаемая соотношением (3), очевидно, представляется в виде алгебры косых полиномов Оре высших порядков, если элементы $\{a^m b^n\}$ образуют линейный базис алгебры. Тогда алгебра, порождаемая (3), может быть определена системой линейных отображений $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots$ алгебры полиномов $F(a)$ в себя. Тогда для $p(a) \in F(a)$ имеем: $bp(a) = \psi_0(p(a)) + \psi_1(p(a))b + \dots + \psi_k(p(a))b^k$, $k = k(p(a))$, $k = 0, 1, 2, \dots$. В предположении, что такое представление действительно существует, легко вывести соотношения между операторами $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots$. Обозначим через X оператор умножения на образующую a в кольце полиномов $F(a)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Имеют место равенства*

$$(4) \quad \begin{aligned} \psi_0 X &= \alpha X^2 + \beta X \psi_0 + \gamma \psi_0^2, \\ \psi_k X &= \beta X \psi_k + \gamma [\psi_0 \psi_k + \psi_1 \psi_{k-1} + \dots + \psi_k \psi_0], \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Если выполняется (4), то уравнение (3) дает $\psi_0(a) = \alpha a^2$. Тогда из первого уравнения, если оно имеет решение, должно быть $\psi_0(a^n) = \bar{\psi}_0^n a^{n+1}$, $\bar{\psi}_0^n \in F$, а всю систему можно дополнить непротиворечивыми начальными условиями $\psi_0(1) = 0$, $\psi_1(1) = 1$, $\psi_k(1) = 0$, $k \geq 2$. Тогда

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00492).

из (4) легко следует, что $\psi_k(a^n) = \bar{\psi}_k^n a^{n-k+1}$, $n+1 \geq k$; $\psi_k(a^n) = 0$, $k > n+1$, где $\bar{\psi}_k^n \in F$ константы, определяющие оператор ψ_k .

Оказывается, в случае существования решения ψ_0 , все остальные решения ψ_k выражаются через ψ_0 по формулам, похожим на общие формулы, данные в [3], [4]. Однако, они имеют другой смысл, так как там $\psi_0 = 0$.

Для выражения ψ_k нам понадобятся два оператора. Это оператор V_0 – оператор значения в нуле, известный как δ -функция Дирака, т.е. $V_0 p(a) = p(0)$, и оператор $\bar{D}$, понижающий степень на единицу, т.е. $\bar{D}1 = 0$, $\bar{D}a^n = a^{n-1}$, $n \geq 1$. Для произвольного полинома $p(a)$, очевидно, имеем, $\bar{D}p(a) = \frac{p(a)-p(0)}{a}$. Следовательно, оператор $\bar{D}$ есть V_0 -дифференцирование на $F(a)$.

Относительно коэффициентов α и γ мы будем предполагать, что $\alpha \cdot \gamma \neq 0$, так как в случае $\alpha = 0$ или $\gamma = 0$ уравнение (3) приводит к классическим полиномам Оре над кольцом $F(a)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если уравнение $\psi_0 X = \alpha X^2 + \beta X \psi_0 + \gamma \psi_0^2$ имеет решение ψ_0 , где $\psi_0 1 = 0$, $\psi_0 a^n = \bar{\psi}_0^n a^{n+1}$ при некоторых $\bar{\psi}_0^n \in F$, то существует единственная система операторов ψ_k , удовлетворяющая системе (4), и для них имеет место

$$(5) \quad \psi_1 = \frac{\beta}{\alpha} (\bar{D} \psi_0 - \psi_0 \bar{D}) + V_0 = \frac{\beta}{\alpha} [\bar{D}, \psi_0] + V_0; \quad \psi_k = \psi_1 \mathcal{F}^{k-1}, \quad k \geq 1,$$

где $\mathcal{F} = \frac{\gamma}{\alpha} \bar{D}^2 \psi_0$.

3. В силу этого предложения центральным моментом в решении уравнений (4) является нахождение оператора ψ_0 . Введем для любого столбца $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, $c_2 \neq 0$, обозначение $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \div = c_1/c_2$. Тогда имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если правый нижний элемент матрицы $\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ -\gamma & 1 \end{pmatrix}^n$ для любого $n = 1, 2, \dots$ отличен от нуля, то уравнение (4) имеет единственное решение ψ_0 и для всех $n = 1, 2, \dots$

$$(6) \quad \bar{\psi}_0^n = \left[\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ -\gamma & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \div.$$

Это предложение позволяет сформулировать условия, когда одночлены $\{a^m b^n\}$, $m, n = 0, 1, 2, \dots$, образуют базис алгебры, порождаемой (3). Обозначим определитель матрицы $\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ -\gamma & 1 \end{pmatrix}$ через Δ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если $\Delta \neq 0$, то для того чтобы в алгебре, заданной (3), одночлены $\{a^m b^n\}$ образовывали базис, необходимо и достаточно, чтобы нижние правые элементы матриц $\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ -\gamma & 1 \end{pmatrix}^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, были отличны от нуля.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Если $\Delta = 0$, то базис алгебры, порождаемой (3) всегда состоит из одночленов $\{a^m b^n\}$, кроме случая $ba = \alpha a^2 - ab + \frac{1}{\alpha} b^2$, когда эти одночлены линейно независимы, но базиса не образуют.

В ряде частных случаев, когда $a^2 + b^2 = 0$; $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$ и $\beta = \gamma = 0$, $\alpha = 1$, с помощью бриллиантовой леммы в [8] найдены базисы другого вида. Например, в случае $\beta = \gamma = 0$, $\alpha = 1$ базис состоит из одночленов $\{a^r\}$, $\{a^m b a^n\}$. Однако, из них с помощью соотношения (3) легко получить базис $\{a^m b^n\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ore O. // Ann. Math. 1931. V. 32. P. 463–477. [2] Cohn P. M. // Proc. London Math. Soc. 1961. V. 11. №3. P. 531–556. [3] Smits T. H. M. // Indag. Math. 1968. V. 30. P. 209–224. [4] Кон П. Свободные кольца и их связи. М.: Мир, 1975. [5] Dumas F. // Lecture Notes Math. 1991. V. 1478. P. 192–214. [6] Островский В. Л., Самойленко Ю. С. // Уч. записки ЛОМИ. 1989. Т. 172. С. 121–129. [7] Максимов В. М. Косые полиномы Оре высших порядков. (готовится к печати). [8] Уфнаровский В. А. // Итоги науки и техники. 1990. Т. 57. С. 5–177.