Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Локтев, Фермионные формулы для характеров представлений $\widehat{sl}_2$, УМН, 2001, том 56, выпуск 1, 153–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm360>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 16:08:49

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

ФЕРМИОННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ХАРАКТЕРОВ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ $\widehat{sl}_2$

С. А. ЛОКТЕВ

Рассмотрим алгебру $\widehat{sl}_2$ – центральное расширение алгебры sl_2 -значных многочленов Лорана $sl_2 \otimes \mathbb{C}[t^{-1}, t]$. Пусть $L_{k,l}$ – неприводимое интегрируемое представление алгебры $\widehat{sl}_2$ со старшим весом $(k-l, l)$. Действие картановского элемента h и элемента энергии d такого, что $[d, t^i \otimes g] = it^i \otimes g$, определяет биградуировку на $L_{k,l}$. Положим

$$\text{ch } L_{k,l} = \text{Tr}_{L_{k,l}} q^{-d} z^{h/2}.$$

Для представлений $\widehat{sl}_2$ имеется формула Вейля для характера [1]. А именно,

$$\text{ch } L_{k,l} = \frac{\sum_{i \in \mathbb{Z}} q^{(k+2)i^2 + (l+1)i} (z^{l/2 + (k+2)i} - z^{-l/2 - (k+2)i-1})}{\prod_{j=0}^{\infty} (1 - q^j z^{-1}) \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^j) \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^j z)} \quad (1)$$

В этой заметке предлагается другая формула для характера $L_{k,l}$. Согласно [2] формула (1) – формула бозонного типа, а ниже приведены формулы фермионного типа (2) и (3). Бозонная формула представляет характер пространства как эйлерову характеристику некоторого комплекса. Для получения фермионной формулы определяется фильтрация и вычисляется характер ее присоединенного градуированного фактора. Буквально этот способ применим к вакуумному представлению $L_{k,0}$, что дает теорему 1. Для произвольного представления фильтрация определяется на вспомогательном пространстве, после чего характер представления $L_{k,l}$ выражается через характеры $u_{k,l}$ вспомогательных пространств, что дает теорему 2.

Фиксируем k . Пусть Q – матрица размера $3k \times 3k$ вида

$$Q = \begin{pmatrix} P & R & 0 \\ R & P & R \\ 0 & R & P \end{pmatrix},$$

где $P = (P_{ij})$, $R = (R_{ij})$ – матрицы размера $k \times k$ такие, что

$$P_{ij} = \min(i, j), \quad R_{ij} = \frac{1}{2} \max(0, i + j - k).$$

Кроме того, пусть $\mathcal{Z}$ – вектор длины $3k$ вида

$$\mathcal{Z} = (-C, 0, C),$$

где $C = (C_i)$ – вектор длины k такой, что $C_i = i$.

ТЕОРЕМА 1.

$$\text{ch } L_{k,0} = \sum_{\substack{v=(v_1, \dots, v_{3k}) \\ v_i \in \mathbb{Z}, v_i \geq 0}} \frac{q^{\langle v, Qv \rangle} z^{\langle v, \mathcal{L} \rangle}}{\prod_{i=1}^{3k} (q)_{v_i}}, \quad (2)$$

где $(q)_n = \prod_{i=1}^n (1 - q^i)$, $a \langle X, Y \rangle = \sum X_i Y_i$ – стандартное скалярное произведение.

Чтобы записать характер произвольного представления, необходимы дополнительные обозначения. Пусть $\mathcal{L}$ – зависящий от l вектор длины $3k$ вида

$$\mathcal{L} = (-2C + D, -C, 0),$$

где $D = (D_i)$ – вектор длины k такой, что $D_i = \max(i - l, 0)$. Положим для $0 \leq l \leq k$

$$u_{k,l} = \sum_{\substack{v=(v_1, \dots, v_{3k}) \\ v_i \in \mathbb{Z}, v_i \geq 0}} \frac{q^{\langle v, Qv + \mathcal{L} \rangle} z^{\langle v, \mathcal{L} \rangle}}{\prod_{i=1}^{3k} (q)_{v_i}}.$$

Дополнительно положим $u_{k,-1} = 0$, $u_{k,k+1} = u_{k,k}$.

ТЕОРЕМА 2. Характер представления $L_{k,k-l}$ равен “второй разностной производной по параметру l ” ряда $u_{k,l}$:

$$z^{-l/2} \text{ch } L_{k,k-l} = (qz)^l (u_{k,l} - u_{k,l-1}) - (qz)^{l+1} (u_{k,l+1} - u_{k,l}). \quad (3)$$

Эти формулы возникли при изучении пространств коинвариантов представлений $\widehat{sl}_2$ и доказываются методами, разработанными в [3], [4]. Для самих пространств коинвариантов имеются аналогичные формулы, где выражения вида $\frac{1}{(q)_i}$ заменены на q -биномиальные коэффициенты. Теоремы 1 и 2 получаются из этих формул предельным переходом.

Автор благодарит Б. Л. Фейгина за постановку задачи и ценные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Кац. Бесконечномерные алгебры Ли. М.: Мир, 1993. [2] R. Kedem, T. Klassen, B. McCoy, E. Melzer // Phys. Lett. B. 1993. V. 307. P. 68–76. [3] B. Feigin, R. Kedem, S. Loktev, T. Miwa, E. Mukhin. Combinatorics of the $\widehat{sl}_2$ spaces of coinvariants // math-ph/9908003, RIMS 1243 (to appear in Transformation Groups). [4] B. Feigin, R. Kedem, S. Loktev, T. Miwa, E. Mukhin. Combinatorics of the $\widehat{sl}_2$ spaces of coinvariants, II // math.QA/0009198.

Принято редколлегией
01.12.2000