Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Л. Бланк, Спектральные свойства левых треугольных матриц, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 1, 155–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm361>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 13:50:35

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЛЕВЫХ ТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ

М. Л. Бланк

Для семейства левых треугольных $(n \times n)$ -матриц с двоичными $(0, 1)$ элементами получено асимптотически точное (при $n \rightarrow \infty$) представление для полной системы собственных векторов и собственных значений. В частности, показан асимптотически линейный рост каждого собственного значения по n . Аналогичный результат получен также для более общего (со специальным образом шкалируемыми элементами) семейства левых треугольных матриц. Эти результаты применены для анализа эргодических свойств одного семейства хаотических отображений.

1. *Левой треугольной (по аналогии с верхней треугольной) $(n \times n)$ -матрицей с двоичными $(0, 1)$ элементами назовем матрицу $A_n = (a_{ij})$, элементы которой вплоть до побочной диагонали равны единице, а все остальные равны нулю, т.е. $a_{ij} = 1$ при $1 \leq i \leq n - j + 1$. Несмотря на вполне классический вид, спектральные свойства подобных матриц в литературе не описаны, возможно, ввиду отсутствия при конечном размере матрицы n явного представления для ее спектра. Обозначим через $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \dots, \lambda_n^{(n)}$ собственные значения матрицы A_n , упорядоченные по убыванию их абсолютных величин, и через $\{e_k^{(n)}\}_{k=1}^n$ — соответствующий набор ортогональных собственных векторов. Как обычно, через $(e)_i$ мы обозначаем i -й элемент вектора $e \in \mathbb{R}^n$, а через $\|e\|$ — его $\mathbf{L}^2$ -норму.*

ТЕОРЕМА 1.1. *Пусть A_n — левая треугольная матрица. Тогда при каждом $k \in \{1, \dots, n\}$ выполнено*

$$\lambda_k^{(n)} = (-1)^{k+1} \frac{n}{(k-1/2)\pi} + O(1), \quad (e_k^{(n)})_i = \cos\left(\frac{(k-1/2)(i-1)}{n}\pi\right) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого результата основывается на следующих утверждениях. Заметим, что $(A_n v)_i = \sum_{j=1}^{n-i+1} v_j$ для любого вектора $v \in \mathbb{R}^n$.

ЛЕММА 1.1. *Для любой C^1 -гладкой функции $f: [0, 1] \rightarrow [-1, 1]$ с производной, не превышающей 1 по модулю, выполняется*

$$\sum_{j=1}^{n-i+1} f\left(\frac{j-1}{n}\right) = n \sum_{j=1}^{n-i+1} f\left(\frac{j-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = n \int_0^{1-\frac{i-1}{n}} f(s) ds + O(1).$$

ЛЕММА 1.2. *Оператор $L: f(x) \rightarrow \int_0^{1-x} f(s) ds$ в $\mathbf{L}^2$ имеет полную систему ортогональных собственных функций $E_k(x) := \cos((k-1/2)\pi x)$ с собственными значениями $\mu_k := (-1)^{k+1}[(k-1/2)\pi]^{-1}$ для $k = 1, 2, \dots$.*

ЛЕММА 1.3. *Пусть равенство $Av = \mu v + \xi$ выполнено для симметричной матрицы A , некоторых векторов $v, \xi \in \mathbb{R}^n$ с $\|\xi\| \leq \varepsilon \|v\|$ и числа μ . Тогда ближайшее к μ собственное значение λ матрицы A удовлетворяет неравенству $|\lambda - \mu| \leq \varepsilon$, и если его кратность равна 1, то для соответствующего собственного вектора e выполнено $\|e - v\| \leq O(\varepsilon) \cdot \|v\|$.*

Идея доказательства здесь состоит в том, что $(A - \xi v^* / \|v\|^2)v = \mu v$ (см. также [1]).

2. Изучим теперь более общий класс левых треугольных матриц. Пусть $\phi: [0, 1] \rightarrow (0, 1]$ — C^1 -гладкая функция. Функция ϕ порождает семейство левых треугольных $(n \times n)$ -матриц: $(A_n^\phi)_{i,j} := \phi((j-i+1)/n)$ при $i \leq j$ и равно 0 в противном случае. Отметим, что двоичная левая треугольная матрица удовлетворяет этому условию при $\phi \equiv 1$.

Используя, как и в предыдущем разделе, то свойство, что основной вклад в “форму” собственных векторов дают собственные функции интегрального оператора $L_\phi: f(x) \rightarrow \int_0^{1-x} \phi(s)f(s) ds$, можно доказать асимптотически линейный по n рост собственных значений матрицы A_n^ϕ .

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грантов INTAS и CRDF.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть μ и f_μ — собственное значение и собственная функция оператора L_ϕ . Тогда $\forall n$ найдутся собственное значение $\lambda = n\mu + O(1)$ и собственный вектор $e \in \mathbb{R}^n$ матрицы A_n^ϕ такой, что $(e)_i = f_\mu((i-1)/n) + O(1/n)$ при всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Предположим, что функция ϕ является невозрастающей, и обозначим через $\mathbf{S}^n \subset \mathbb{R}^n$ множество положительных векторов v , зависимость элементов которых от их номера является монотонно убывающей и вогнутой функцией. Введем также нелинейный оператор $B_n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \cup (\infty)^n$, определяемый соотношением $(B_nv)_i := (A_n^\phi v)_i / (A_n^\phi v)_1$.

ЛЕММА 2.1. Множество $\mathbf{S}^n$ является B_n -инвариантным, и для любого вектора $v \in \mathbf{S}^n$ последовательность $\{B_n^m v\}_m$ сходится при $m \rightarrow \infty$ в $\mathbf{L}^2$ -норме к ведущему собственному вектору $e_1^{(n)}$ матрицы A_n^ϕ .

В качестве следствия, выбирая векторы $v \in \mathbf{S}^n$, соответствующие минимальному и максимальному $(A_n^\phi v)_1$ (а именно, $(v)_i = (n-i+1)/n$ и $(v)_i \equiv 1$), мы немедленно получаем, что

$$\frac{n}{2} \int_0^1 (1-s)\phi(s) ds + O(1) \leq \lambda_1^{(n)} \leq n \int_0^1 \phi(s) ds + O(1).$$

Подобным путем (но для несколько более сложного множества $\mathbf{S}^n$) можно получить также оценки и для остальных элементов спектра.

3. Применим теперь полученные результаты для анализа эргодических свойств одного семейства хаотических отображений. Необходимые определения и утверждения, связанные с хаотическими отображениями, можно найти, например, в [2].

Для фиксированного натурального n рассмотрим кусочно линейное отображение $T_n: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, определяемое как $T_n|_{[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]}(x) := \frac{i}{n}x$ для $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Это отображение является топологически перемешивающим, и его вторая итерация является кусочно растягивающим отображением. Поэтому имеется единственная абсолютно непрерывная T_n -инвариантная мера (см. [2]).

ЛЕММА 3.1. Топологическая энтропия отображения T_n удовлетворяет соотношению $h_{\text{top}}(T_n) = \ln(\frac{2n}{\pi} + O(1))$.

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Заметим, что отображение T_n является марковским по отношению к разбиению на интервалы монотонности. Поэтому соответствующая символическая динамика определяется оператором сдвига в пространстве последовательностей из n символов, удовлетворяющих условию, что за k -м символом может следовать любой из первых $(n-k+1)$ символов. Таким образом, соответствующая матрица переходов является левой треугольной. Теперь требуемое неравенство следует из теоремы 1.1, поскольку топологическая энтропия как марковского отображения, так и соответствующего оператора сдвига равна логарифму наибольшего (первого) собственного значения матрицы перехода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] B. N. Parlett. The Symmetric Eigenvalue Problem. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1980. [2] M. L. Blank. Discreteness and Continuity in Problems of Chaotic Dynamics. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1997.

Институт проблем передачи информации РАН
E-mail: blank@iitp.ru

Принято редколлегией
01.12.2000