Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Бунина, Элементарная эквивалентность групп Шевалле, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 1, 157–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm362>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 16:58:53

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ГРУПП ШЕВАЛЛЕ

Е. И. Бунина

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Элементарными* свойствами алгебраической системы называются те свойства этой системы, которые можно выразить на языке узкого исчисления предикатов (УИП), принимая в качестве исходных основные операции и отношения данной системы. Две алгебраические системы одинаковой сигнатуры называются *элементарно эквивалентными* (обозначение: $G_1 \equiv G_2$), если они обладают одинаковыми элементарными свойствами.

Вопросы элементарных свойств линейных групп были впервые рассмотрены в 1961 году А. И. Мальцевым. В работе “Об элементарных свойствах линейных групп” [1] он доказал следующую структурную теорему: *для того чтобы группы $\mathcal{G}(m, K_1)$ и $\mathcal{G}(n, K_2)$ ($\mathcal{G} = GL, PG, SL, PSL, m \geq n \geq 3$) имели один и тот же арифметический тип (были элементарно эквивалентны), необходимо и достаточно, чтобы $m = n$ и чтобы один и тот же арифметический тип имели поля K_1 и K_2 .*

Продолжение эта теория получила в 1992 году, когда прогресс в теории моделей позволил К. И. Бейдару и А. В. Михалеву предложить в работе [2] общий способ решения проблем такого типа. С помощью логических конструкций они обобщили теорему Мальцева для случая групп GL, SL, PG, PSL над первичными ассоциативными кольцами, содержащими 1 и $1/2$, и над телами. Кроме того, ими была доказана теорема, позволяющая выводить утверждения об элементарной эквивалентности алгебраических систем из утверждений об их изоморфности.

Группы Шевалле, рассматриваемые в данной работе, включают в себя такие классические группы, как $SL_n(K), PSL_n(K), SO_n(K), Spin_n(K), PSO_n(K), Sp_{2n}(K), PSp_{2n}(K)$, т.е., с одной стороны, изучаемые группы пересекаются с теми, которые рассматривались А. И. Мальцевым в работе [1], с другой стороны, здесь присутствует довольно много классических линейных групп, им не рассмотренных.

Основным результатом работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА. *Предположим, что группы Шевалле $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ построены по алгебраически замкнутым полям k_1 и k_2 характеристик, не равных двум, простым алгебрам Ли $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ и решеткам L и M . Пусть, кроме того, $L/L_0 \cong \varphi_1$, $M/M_0 \cong \varphi_2$, где φ_1 и φ_2 – конечные группы. Тогда $\mathcal{G}_1 \equiv \mathcal{G}_2$ тогда и только тогда, когда $k_1 \equiv k_2$, $\mathcal{L}_1 \cong \mathcal{L}_2$ и $\varphi_1 \cong \varphi_2$.*

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Предположим сначала, что группы Шевалле $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ построены по одной и той же алгебре Ли $\mathcal{L}$ и фундаментальной группе φ и по элементарно эквивалентным полям k_1 и k_2 . Каждое элементарно групповое предложение $\mathcal{U}$, относящееся к группам Шевалле $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$, можно преобразовать в кольцевую формулу $\mathcal{U}^k$, относящуюся к полям k_1 и k_2 , так, чтобы истинность $\mathcal{U}$ на $\mathcal{G}$ была равносильна истинности $\mathcal{U}^k$ на k . Вид формулы $\mathcal{U}^k$ при этом не будет зависеть от поля k . Таким образом, истинность $\mathcal{U}$ на $\mathcal{G}_1$ равносильна истинности $\mathcal{U}^k$ на k_1 . Если поля k_1 и k_2 элементарно эквивалентны, то истинность $\mathcal{U}^k$ на k_1 равносильна истинности $\mathcal{U}^k$ на k_2 . Поэтому истинность $\mathcal{U}$ на $\mathcal{G}_1$ равносильна истинности $\mathcal{U}$ на $\mathcal{G}_2$, следовательно, $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ элементарно эквивалентны.

Теперь предположим, что группы $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ элементарно эквивалентны. Известно, что фундаментальная группа группы Шевалле $\mathcal{G}$ совпадает с ее центром, поэтому группы φ_1 и φ_2 изоморфны. Профакторизуем группы $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ по их центрам, получим элементарно эквивалентные группы $\overline{\mathcal{G}}_1$ и $\overline{\mathcal{G}}_2$.

Предположим, что группа Шевалле $\mathcal{G}$ построена по алгебре Ли типа A_n, B_n, C_n, D_n или G_2 . Тогда предложение

$$Ddr(X, M) := (XM = MX \& M^{2^r} = 1 \& ((Y)(Z)(YM = MY \& ZM = MZ \rightarrow ZY = YZ)))$$

для фиксированной матрицы M при некотором r выделяет такие $X \in \mathcal{G}$, что они составляют подгруппу матриц, диагонализированных в одном базисе (обозначим ее через $\mathcal{H}$). При этом

$N(\mathcal{H})/\mathcal{H} \simeq W$, где W – группа Вейля соответствующей алгебры Ли $\mathcal{L}$. Так как группы Вейля алгебр Ли A_n , B_m (C_m), D_l и G_2 для всех $n \geq 1$, $m \geq 2$, $l \geq 3$ неизоморфны, то для каждой системы корней указанного вида существует элементарно групповое предложение, истинное в группах Шевалле, у которых алгебра Ли имеет данную систему корней, и ложное в группах Шевалле с любой другой алгеброй Ли. Группы Шевалле с системами корней B_n и C_n не могут быть элементарно эквивалентны, так как имеют разное количество классов инволюций. Теперь рассмотрим произвольную группу Шевалле $\mathcal{G}$ указанного в теореме вида и проверим, сколько в ней есть классов инволюций. Если их количество равно 1 или больше 3, то перед нами некоторая группа типа, рассмотренного выше, для которого мы умеем определять ее систему корней. Если в группе два класса инволюций, то это либо классическая группа, либо группа типа F_4 , E_6 или E_8 . Рассмотрим для каждой инволюции в каждой из таких групп ее централизатор, а затем коммутант этого централизатора. Полученные коммутанты будут изоморфны уже рассмотренным классическим группам Шевалле или их центральным произведениям. Найдем для каждой из систем корней F_4 , E_6 и E_8 такое предложение, что оно истинно на коммутанте централизатора одной из инволюций в каждой группе с соответствующей системой корней ее алгебры Ли и ложно на коммутанте централизатора каждой инволюции в любой другой группе Шевалле с двумя классами инволюций. С помощью этого предложения мы построим элементарно групповое предложение, отличающее группы типов F_4 , E_6 , E_8 друг от друга и от остальных групп Шевалле. Аналогичным способом строится предложение, отличающее группу Шевалле типа E_7 , но для этого рассматриваются группы с тремя классами инволюций. Таким образом, мы получаем, что если группы $\overline{\mathcal{G}}_1$ и $\overline{\mathcal{G}}_2$ элементарно эквивалентны, то их алгебры Ли изоморфны.

Теперь для каждого типа алгебры Ли доказывается, что каждое элементарно кольцевое предложение $\mathcal{U}$, относящееся к полям k_1 и k_2 , можно преобразовать в элементарно групповое предложение $\mathcal{U}_{\mathcal{G}}$, относящееся к группам Шевалле $\overline{\mathcal{G}}_1$ и $\overline{\mathcal{G}}_2$ данного типа и равносильное первоначальному (доказательство проводится для каждого типа алгебры Ли; в случае классических групп Ли мы выделяем предложения, которым удовлетворяют те и только те матрицы, которые вместе со специально введенными операциями “сложения” и “умножения” становятся изоморфными полю k ; в случаях исключительных алгебр Ли мы рассматриваем коммутанты централизаторов инволюций, в них выделяем относительно элементарные подгруппы, изоморфные классическим, а затем ссылаемся на предыдущие случаи). Так как вид предложения $\mathcal{U}_{\mathcal{G}}$ одинаков для групп $\overline{\mathcal{G}}_1$ и $\overline{\mathcal{G}}_2$ и истинность $\mathcal{U}_{\mathcal{G}}$ на $\overline{\mathcal{G}}_1$ равносильна истинности $\mathcal{U}_{\mathcal{G}}$ на $\overline{\mathcal{G}}_2$, то истинность $\mathcal{U}$ на k_1 равносильна истинности $\mathcal{U}$ на k_2 , т.е. поля k_1 и k_2 элементарно эквивалентны.

Теорема доказана полностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. И. Мальцев // Проблемы математики и механики. Новосибирск: Изд-во АН СССР, 1961. С. 110–132. [2] С. I. Beidar, A. V. Michalev // Contemp. Math. 1992. V. 131. P. 29–35.