Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. С. Геворкян, Эquivариантная теорема Фрейденталя и эквивариантная n -подвижность, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 1, 159–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm363>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 18:32:32

ЭКВИВАРИАНТНАЯ ТЕОРЕМА ФРЕЙДЕНТАЛЯ И ЭКВИВАРИАНТНАЯ n -ПОДВИЖНОСТЬ

П. С. ГЕВОРКЯН

В настоящей статье некоторые чисто топологические результаты Г. Фрейденталя [1] и С. А. Богатого [2] распространяются на G -компакты¹.

ТЕОРЕМА 1. *Любой n -мерный G -компакт является пределом обратной системы $S = \{|K_i|, \pi_i^{i+1}\}$, $i = 1, 2, 3 \dots$, составленной из компактных n -мерных симплициальных G -комплексов $|K_i|$ и эквивариантных отображений π_i^{i+1} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО². В нашем случае найдется такая последовательность конечных, регулярных, $(n+1)$ -кратных G -покрытий ω_i , $i = 1, 2, 3 \dots$, что ω_i имеет мелкость 2^{-i} , а ω_{i+1} вписано в ω_i . Известно [3], что в этом случае имеется эквивариантное вписывание $\mu_i: \omega_{i+1} \rightarrow \omega_i$ для каждого i . Всякое такое вписывание индуцирует G -отображение $K(\mu_i): K(\omega_{i+1}) \rightarrow K(\omega_i)$, где $K(\omega_i)$ – нервы покрытий ω_i , $i = 1, 2, 3 \dots$, рассматриваемые пока как абстрактные симплициальные комплексы, на которых естественным образом симплициально действует группа G .

Для каждого покрытия ω_i имеется такое G -разбиение единицы $\bar{\pi}^i$, $i = 1, 2, 3 \dots$, что выполнено равенство

$$\pi_i^{i+1} \circ \pi^{i+1} = \pi^i, \quad (1)$$

где $\pi^i: X \rightarrow |K(\omega_i)|^3$ и $\pi_i^{i+1}: |K(\omega_{i+1})| \rightarrow |K(\omega_i)|$ – естественные эквивариантные отображения, соответствующие G -разбиениям единицы $\bar{\pi}^i$. В самом деле, каждому покрытию ω_i сопоставлено такое разбиение единицы $\bar{\rho}_i = \{\bar{\rho}_V^i, V \in \omega_i\}$, что

$$\bar{\rho}_V^i = \sum_{\mu_i(U)=V} \bar{\rho}_U^{i+1}, \quad (2)$$

где $V \in \omega_i$, $U \in \omega_{i+1}$ ⁴. Отсюда имеем⁵:

$$\rho_i^{i+1} \circ \rho^{i+1} = \rho^i. \quad (3)$$

Из “обычных” разбиений единицы $\bar{\rho}_i$, удовлетворяющих равенствам (2), можно построить G -разбиения единицы $\bar{\pi}^i$, удовлетворяющие равенствам

$$\bar{\pi}_V^i = \sum_{\mu_i(U)=V} \bar{\pi}_U^{i+1}, \quad (4)$$

аналогичным равенствам (2). Они получаются по формуле

$$\bar{\pi}_V^i(x) = \frac{1}{|G|} \sum_g \bar{\rho}_{gV}^i(gx), \quad (5)$$

где $x \in X$, $g \in G$, $V \in \omega_i$. В самом деле,

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_V^i &= \frac{1}{|G|} \sum_g \bar{\rho}_{gV}^i(gx) = \frac{1}{|G|} \sum_g \sum_{\mu_i(U')=V} \bar{\rho}_{U'}^{i+1}(gx) = \frac{1}{|G|} \sum_g \sum_{\mu_i(U)=V} \bar{\rho}_{gU}^{i+1}(gx) \\ &= \sum_{\mu_i(U)=V} \frac{1}{|G|} \sum_g \bar{\rho}_{gU}^{i+1}(gx) = \sum_{\mu_i(U)=V} \bar{\pi}_U^{i+1}(x). \end{aligned}$$

¹Компактные метризуемые пространства с непрерывным действием *конечной* группы G .

²Определения основных понятий см. в [3].

³ $|K(\omega_i)|$ – геометрическая реализация абстрактного G -комплекса $K(\omega_i)$.

⁴См. [4, с. 437].

⁵См. [3, с. 136].

Легко видеть, что из равенств (5) следуют искомые равенства (1).

Итак, построена обратная система $S = \{|K_i|, \pi_i^{i+1}\}$, где $K_i = K_i(\omega_i)$, удовлетворяющая условиям теоремы 1. То, что $x = \varprojlim S$ вытекает из теоремы Фрейденшталя.

ТЕОРЕМА 2. Если G -пространство $X = \varprojlim \{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$, где X_α — G -компакты, а $p_{\alpha\alpha'}$ — эквивариантные отображения, то обратная система $\{X_\alpha, [p_{\alpha\alpha'}], A\}$, где $[p_{\alpha\alpha'}]$ — G -гомотопические классы отображений $p_{\alpha\alpha'}$, G -ассоциирована с G -пространством X .

Теорема доказывается так же, как аналогичная теорема Мардешича [5].

СЛЕДСТВИЕ 1. Для всякого n -мерного G -компакта X имеется G -ассоциированная с ним обратная система с не более чем n -мерными объектами X_α .

Теперь мы можем обобщить некоторые результаты из работы [2].

ТЕОРЕМА 3. Всякий $(G - n)$ -подвижный G -компакт X G -фундаментальной размерности $\text{Fd}_G X \leq n$ является G -подвижным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть обратная система $\underline{X} = \{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$ G -ассоциирована с X . Она G -подвижна. В самом деле, так как $\text{Fd}_G X \leq n$, то найдется такой G -компакт Y , что $\text{sh}_G X \leq \text{sh}_G Y$ и $\dim Y \leq n$. По следствию 1 имеется такая G -ассоциированная с Y обратная система $\{Y_\beta, q_{\beta\beta'}, B\}$, что $\dim Y_\beta \leq n$. Пусть теперь $\alpha \in A$. Так как X $(G - n)$ -подвижно, то имеется α' , $\alpha' \geq \alpha$,⁶ подчиняющееся условию G -подвижности для обратной системы $\underline{X}$. Воспользуемся неравенством $\text{sh}_G X \leq \text{sh}_G Y$: существуют такие G -шейповые морфизмы $\{f_\beta, \varphi\} = \underline{f}: X \rightarrow Y$ и $\{g_\alpha, \psi\} = \underline{g}: Y \rightarrow X$, что $\underline{g} \circ \underline{f} = \underline{1}_X$. Из последнего равенства следует, что для каждого α' найдется такое α'' , что $\alpha'' \geq \alpha'$, $\alpha'' \geq \varphi(\psi(\alpha'))$ и $p_{\alpha'\alpha''} = g_{\alpha'} \circ f_{\psi(\alpha')} \circ p_{\varphi(\psi(\alpha'))\alpha''}$.

Этот индекс α'' и удовлетворяет условию G -подвижности для обратной системы $\underline{X}$. Действительно, пусть $\alpha''' \geq \alpha$. Требуется найти такой G -гомотопический класс $r_{\alpha''\alpha'''}^{\alpha''}: X_{\alpha''} \rightarrow X_{\alpha'''}$, что $p_{\alpha\alpha''} = p_{\alpha\alpha'''} \circ r_{\alpha''\alpha'''}^{\alpha''}$. Для G -гомотопического класса $g_{\alpha'}: Y_{\psi(\alpha')} \rightarrow X_{\alpha'}$ в силу $(G - n)$ -подвижности системы $\underline{X}$ найдется такой G -гомотопический класс $h: Y_{\psi(\alpha')} \rightarrow X_{\alpha'''}$, что $p_{\alpha\alpha'} \circ g_{\alpha'} = p_{\alpha\alpha'''} \circ h$. Легко видеть, что искомым G -гомотопическим классом будет композиция $r_{\alpha''\alpha'''}^{\alpha''} = h \circ f_{\psi(\alpha')} \circ p_{\varphi(\psi(\alpha'))\alpha''}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Всякий n -мерный $(G - n)$ -подвижный G -компакт G -подвижен.

Утверждение следует из неравенства

$$\text{Fd}_G X \leq \dim X.$$

СЛЕДСТВИЕ 3. G -компакт конечной фундаментальной размерности G -подвижен тогда и только тогда, когда он $(G - n)$ -подвижен для каждого n .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. Freudenthal // Compositio Math. 1937. V. 4. P. 145–234. [2] С. А. Богатый // Bull. Acad. Polon. Sci. Math. Astron. Phys. 1974. Т. 22. № 8. С. 821–825. [3] Г. Бредон. Введение в теорию компактных групп преобразований. М., 1980. [4] А. Дольд. Лекции по алгебраической топологии. М., 1976. [5] S. Mardesic // Gen. Topology Appl. 1973. V. 3. P. 265–282.

Арцахский государственный университет

Принято редколлегией
01.12.2000

⁶Все участвующие в доказательстве индексы $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$ берутся из A .