Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Дубровский, В. В. Дубровский (мл.), К теореме существования решения
в обратной задаче спектрального анализа, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 1, 161–162

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm364>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 18:04:11

**К ТЕОРЕМЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ
В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА**

В. В. ДУБРОВСКИЙ, В. В. ДУБРОВСКИЙ (мл.)

Пусть $\Pi = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ и $\Pi_4 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a \cdot 2^{-1}, 0 \leq y \leq b \cdot 2^{-1}\}$ – прямоугольники, где $a > 0, b > 0$. Рассмотрим в $l_2(\Pi)$ граничную задачу M :

$$-\Delta \varphi = \lambda \varphi, \quad \varphi|_{\partial \Pi} = 0.$$

Введем оператор $T_\beta = \int \lambda^\beta dE(\lambda)$, где $E(\lambda)$ – спектральное разложение единицы оператора M , $\beta \geq 0$ и $\lambda^\beta > 0$ при $\lambda > 0$. Собственные числа $\lambda_{m,s} = (\pi^2 a^{-2} m^2 + \pi^2 b^{-2} s^2)^\beta$, $m, s = \overline{1, \infty}$, оператора T_β будем нумеровать в порядке возрастания их величин с помощью натурального индекса n . Соответствующие им ортонормированные функции оператора T_β имеют вид $V_{m,s} = 2^{-1}(a, b)^{-1} \sin(\pi b^{-1} m x) \sin(\pi b^{-1} s y)$. Обозначим d_n расстояние от собственного числа λ_n до остальной части спектра $\sigma(T_\beta) = \bigcup_{m,s=1}^{\infty} \lambda_{m,s}$ оператора T_β . Известно, что существует такая подпоследовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, что $d_{n_k} \geq C_1 n_k^{\beta-1}$, где $C_1 > 0$ и не зависит от индекса n_k .

Введем оператор умножения P на вещественную, измеримую по Лебегу, существенно ограниченную по модулю функцию $p(x, y)$ ($(x, y) \in \Pi$), которая удовлетворяет условиям:

$$p(a-x, y) = p(x, y) = p(x, b-y) \quad (1)$$

для почти всех $(x, y) \in \Pi$;

$$\iint_{\Pi} p(x, y) \cos(2\pi a^{-1} n x) dx dy = \iint_{\Pi} p(x, y) \cos(2\pi b^{-1} n y) dx dy = 0, \quad (2)$$

$n = \overline{1, \infty}$. Пусть $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ – собственные числа оператора $T_\beta + P$, занумерованные в порядке возрастания их величин с учетом кратности.

ЛЕММА 1. Пусть $0 < \delta < 1$, $(1-\delta)(\beta - \frac{1}{2}) > 1$, тогда на вертикальных прямых $\Gamma_{n_k} = \{(\lambda_{n_k} + \lambda_{n_{k+1}})2^{-1} + i\rho, \rho \in \mathbb{R}\}$ выполняется равенство:

$$\begin{aligned} \|(T - \lambda E)^{-1}\|_1 &\equiv \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda - \lambda_n|^{-1} = (|\rho| + C_4 n_k^{\beta-1})^{-\delta} O(n_k^{\frac{1}{2} - (1-\delta)(\beta-1)}) \\ &\quad + (|\rho| + C_4 n_k^{\beta-\frac{1}{2}})^{-\delta} O(n_k^{1 - (1-\delta)(\beta-\frac{1}{2})}), \end{aligned}$$

где $C_4 > 0$ и $\|A\|_1$ означает ядерную норму оператора A .

Обозначим $f_{m_l}(\lambda) = [\prod_{j=1, j \neq l} (\lambda - \lambda_{m_j}) / (\lambda + \lambda_{m_j})] \frac{1}{f_{m_l}}$ – ограниченные по модулю, аналитические функции в правой полуплоскости:

$$f_{m_l}(\lambda_{m_j}) = \delta_{j,l}, \quad \|f_{m_l}(\lambda)\|_{\infty} = \sup_{\operatorname{Re} \lambda > 0} |f_{m_l}(\lambda)| = |f_{m_l}^{-1}|.$$

На подпоследовательность $\{m_l\}$ наложим ограничение:

$$f_{m_l}^{-1} = O(n_k^{\beta - \frac{3}{2} - \alpha}), \quad (3)$$

где $\alpha > 0$ и $m_l \in \{n_{k-1} + 1, n_{k-1} + 2, \dots, n_k\}$.

Обозначим $\varphi_{m_l}(\lambda) = \int_1^\lambda f_{m_l}(\lambda) d\lambda$ и рассмотрим спектральное равенство при $m_l \in \{n_{k-1} + 1, n_{k-1} + 2, \dots, n_k\}$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} \varphi_{m_l}(\mu_j) &= \sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} \varphi_{m_l}(\lambda_j) + (PV_{m_l}, V_{m_l}) \\ &\quad - \frac{1}{6\pi i} S_p \left\{ \int_{\Gamma_{n_k}} - \int_{\Gamma_{n_{k-1}}} \right\} f_{m_l}(\lambda) (P(T - \lambda E)^{-1})^2 d\lambda + \dots \\ &\equiv \sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} \varphi_{m_l}(\lambda_j) + (PV_{m_l}, V_{m_l}) + \alpha_{m_l}(p), \end{aligned} \quad (4)$$

которое записано в предположении

$$\iint_{\Pi_4} p(x, y) \psi_t(x, y) dx dy = 0$$

при $t \neq m_l$, $\psi_t(x, y) = (ab)^{-1} \cos(2\pi a^{-1}mx) \cos(2\pi b^{-1}sy)$, где $\lambda_t = (\pi a^{-2}m^2 + \pi^2 b^{-2}s^2)^\beta$.

При $\beta > \frac{3}{2}$ и $\alpha > 0$ можно построить такую подпоследовательность натуральных индексов t_q , что

$$I = \sum_{q=1}^{\infty} |O(n_{t_q}^{-\alpha})| = \sum_{q=1}^{\infty} |O(n_{t_q}^{\beta-\frac{3}{2}-\alpha})| \cdot [|O(t_q^{\frac{3}{2}-\beta})| + |O(n_{t_q}^{2-\beta-\frac{1}{2\delta+2}})|] < \infty.$$

Обозначим

$$\alpha_0(p) = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{j=n_{t_{q-1}}+1}^{n_{t_q}} (\varphi_{m_l}(\mu_j) - \varphi_{m_l}(\lambda_j)) \psi_{m_l} \right),$$

где $m_l \in \{n_{t_{q-1}} + 1, n_{t_{q-1}} + 2, \dots, n_{t_q}\}$, $\alpha(p) = \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{m_l}(p) \psi_{m_l}$. Здесь $\alpha_{m_l}(p)$ взяты в (4) при условии $k = t_q$.

Тогда

$$\|\alpha(p) - \alpha(\tilde{p})\|_{\infty} \leq \|p - \tilde{p}\|_{\infty} (\|p\|_{\infty} + \|\tilde{p}\|_{\infty}) I = \gamma \|p - \tilde{p}\|_{\infty}.$$

По принципу Стефана Банаха операторное уравнение

$$\alpha_0 - \alpha(p) = P,$$

где

$$\alpha_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\left(\xi_{m_l} - \sum_{j=n_{t_{q-1}}+1}^{n_{t_q}} \varphi_{m_l}(\lambda_j) \right) \right) \psi_{m_l},$$

имеет единственное решение p при $\alpha_0 \in U(0, \varepsilon)$.

ТЕОРЕМА 2. Если $a^2 b^{-2}$ – иррациональное число, $\beta > \frac{3}{2}$ и $\{\lambda_{m_n}\}$ – такая подпоследовательность собственных чисел оператора T_β , что выполнено (3), то существует $\varepsilon > 0$, зависящее от $O(n_k^{-\alpha})$, такое, что в замкнутом шаре $U(0, \varepsilon)$ существует единственный потенциал p , удовлетворяющий условиям (1) и (2), и при условии $\alpha_0 \in U(0, \varepsilon)$ выполняется равенство:

$$\sum_{j=n_{t_{q-1}}+1}^{n_{t_q}} \left(\varphi_{m_l}(\mu_j) - \varphi_{m_l}(\lambda_j) \right) = \xi_{m_l}, \quad n = \overline{1, \infty}, \quad m_l \in \{n_{t_{q-1}} + 1, n_{t_{q-1}} + 2, \dots, n_{t_q}\},$$

и

$$\iint_{\Pi_4} p(x, y) \psi_t(x, y) dx dy = 0, \quad t \neq m_l, \quad l = \overline{1, \infty}.$$