Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. К. Захаров, А. В. Михалёв, А. А. Серединский, Алгебраическое описание колец непрерывных функций, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 1, 163–164

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm365>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 18:02:24

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ КОЛЕЦ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

В. К. ЗАХАРОВ, А. В. МИХАЛЁВ, А. А. СЕРЕДИНСКИЙ

В 1975 году Дельфосс в заметке [1] анонсировал следующий результат. Коммутативное кольцо A с единицей 1_A изоморфно кольцу $C(K)$ всех непрерывных вещественнозначных функций на компактном пространстве K , если и только если оно обладает следующими свойствами:

- 1) для любых $a, b \in A$ существует $c \in A$ такое, что $a^2 + b^2 = c^2$;
- 2) для любого $a \in A$ существуют $b \in A$ и $c \in A$ такие, что $a = b^2 - c^2$ и $bc = 0$;
- 3) для любого a существует $(1_A + a^2)^{-1}$;
- 4) если для a существует последовательность $(b_n \in A \mid n \in \mathbb{N})$ такая, что $n(a^2 + b_n^2) = 1_A$, то $a = 0$;
- 5) для любого a существуют $b \in A$ и $n \in \mathbb{N}$ такие, что $a^2 + b^2 = n1_A$;
- 6) если $(a_n \in A \mid n \in \mathbb{N})$ — последовательность, для которой существует последовательность $(m_k \in \mathbb{N} \mid k \in \mathbb{N})$ такая, что $k((a_m - a_n)^2 + b^2) = 1_A$ для всех $m, n \geq m_k$ и соответствующих $b \equiv b(k, m, n)$, то существует $a \in A$, для которого существует последовательность $(n_k \in \mathbb{N} \mid k \in \mathbb{N})$ такая, что $k((a - a_n)^2 + c^2) = 1_A$ для всех $n \geq n_k$ и соответствующих $c \equiv c(k, n)$.

Так как мы не нашли никакого опубликованного доказательства этого результата, то попытались провести доказательство самостоятельно. Однако мы не смогли доказать теорему в формулировке Дельфосса. Поэтому, чтобы доказать характеристическую теорему такого типа, мы были вынуждены заменить условия Дельфосса 4)–6) своими собственными условиями:

- 4') если для $a \in A$ существует последовательность $(b_n \in A \mid n \in \mathbb{N})$ такая, что $n^2(a^2 + b_n^2) = 1_A$, то $a = 0$;
- 5') для любого a существуют $b \in A$ и $n \in \mathbb{N}$ такие, что $a^2 + b^2 = n^2 1_A$;
- 6') если $(a_n \in A \mid n \in \mathbb{N})$ — последовательность, для которой существует последовательность $(m_k \in \mathbb{N} \mid k \in \mathbb{N})$ такая, что $k^2((a_m - a_n)^2 + b^2) = 1_A$ для всех $m, n \geq m_k$ и соответствующих $b \equiv b(k, m, n)$, то существует $a \in A$, для которого существует последовательность $(n_k \in \mathbb{N} \mid k \in \mathbb{N})$ такая, что $k^2((a - a_n)^2 + c^2) = 1_A$ для всех $n \geq n_k$ и соответствующих $c \equiv c(k, n)$.

Условия 1)–3), 4')–6') позволяют провести доказательство до конца. Ниже мы приводим подробную схему такого доказательства. Как нам представляется, версия Дельфосса, возможно, некорректна.

Коммутативное кольцо A с единицей 1_A , обладающее свойствами 1)–3), 4')–6'), назовем *с-кольцом*.

ЛЕММА 1. Для любого числа $n \in \mathbb{N}$ существуют элементы $\sqrt{n1_A}$ и $(n1_A)^{-1}$.

Определим внешнее умножение A на $\mathbb{Q}$, полагая $pa \equiv m(n1_A)^{-1}a$ для любого элемента a из s -кольца и любого числа $p \equiv m/n \in \mathbb{Q}$ такого, что $n \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{Z}$.

ЛЕММА 2. Пара $(A, \mathbb{Q})$ вместе с композицией $(p, a) \mapsto pa$ образует $\mathbb{Q}$ -алгебру.

ЛЕММА 3. Для любых чисел $m, n \in \mathbb{N}$ существует элемент $\sqrt{(m/n)1_A}$.

ЛЕММА 4. Пусть $(a_i \in A \mid i = 1, \dots, k)$ — конечная последовательность элементов s -кольца A такая, что $\sum(a_i^2 \mid i = 1, \dots, k) = 0$. Тогда $a_i = 0$ для каждого $i = 1, \dots, k$.

СЛЕДСТВИЕ. Для любого $a \in A$ существует элемент $\sqrt{(1_A + a^2)^{-1}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для $a \in A$ и $q \in \mathbb{Q}_+$ следующие заключения эквивалентны:

- 1) существует $b \in A$ такое, что $a^2 + b^2 = q^2 1_A$;
- 2) существуют $c, d \in A$ такие, что $a + c^2 = d^2 - a = q1_A$.

ЛЕММА 5. Пусть $r \in \mathbb{Q}_+$, $k \in \mathbb{N}$ и $r \leq 1/k$. Тогда существует $b \in A$ такое, что $k^2((r1_A)^2 + b^2) = 1_A$.

Определим внешнее умножение A на $\mathbb{R}$ следующим образом. Пусть $a \in A$ и $r \in \mathbb{R}$. Для r возьмем некоторую последовательность $(r_n \in \mathbb{Q} \mid n \in \mathbb{N})$ такую, что $\lim(r_n \mid n \in \mathbb{N}) = r$. Тогда существует последовательность $(m_k \in \mathbb{N} \mid k \in \mathbb{N})$, для которой $|r_m - r_n| < 1/k$ для $m, n \geq m_k$. По лемме 5 существует $b = b(k, m, n) \in A$ такое, что $k^2((r_m - r_n)^2 1_A + b^2) = 1_A$ для $m, n \geq m_k$. Умножая на a^2 , получаем $k^2(((r_m - r_n)a)^2 + (ab)^2) = a^2$. По свойству 5') существуют $l \in \mathbb{N}$ и $y \in A$ такие, что $a^2 + y^2 = l^2 1_A$. В результате мы приходим к равенству $k^2(((r_m - r_n)a/l)^2 + c^2) = 1_A$ для некоторого $c = c(k, m, n)$. По свойству 6') существуют $\alpha \in A$ и $(n_k \in \mathbb{N} \mid k \in \mathbb{N})$ такие, что $k^2((\alpha - (r_n/l)a)^2 + d^2) = 1_A$ для любого $n \geq n_k$ и $d = d(k, n)$. Определим $ra \in A$, полагая $ra \equiv l\alpha$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пара $(A, \mathbb{R})$ вместе с композицией $(r, a) \mapsto ra$ образует $\mathbb{R}$ -алгебру.

Определим на A оценивание $\|\cdot\|: A \rightarrow \mathbb{R}$, полагая $\|a\| \equiv \inf\{p \in \mathbb{Q}_+ \mid \exists x \in A(a^2 + x^2 = p^2)\}$.

ЛЕММА 6. Оценивание $\|\cdot\|$ является мультипликативной нормой на $\mathbb{R}$ -алгебре A со свойством регулярности $\|a^2\| = \|a\|^2$. Нормированная алгебра $(A, \|\cdot\|)$ является полной.

Определим на A порядок $\leq$, полагая $a \leq b$, если $b - a = x^2$ для некоторого $x \in A$.

ЛЕММА 7. $\mathbb{R}$ -алгебра $(A, \leq)$ является упорядоченной архимедовой алгеброй.

ЛЕММА 8. Для любого $a \in A$ справедливо равенство $\|a\| = \inf\{p \in \mathbb{Q}_+ \mid a \leq p1_A \wedge -a \leq p1_A\}$.

ЛЕММА 9. Максимальный идеал M s -кольца является выпуклым идеалом $\mathbb{R}$ -алгебры A .

Фиксируем максимальный идеал M s -кольца A . Рассмотрим фактор-алгебру $\bar{A}_M \equiv A/M$, состоящую из классов эквивалентности $\bar{a}_M$ элементов $a \in A$. Определим на $\bar{A}_M$ порядок $\leq$, полагая $\bar{a}_M \leq \bar{b}_M$, если существуют $a' \in \bar{a}_M$ и $b' \in \bar{b}_M$ такие, что $a' \leq b'$.

ЛЕММА 10. $\bar{A}_M$ относительно порядка $\leq$ является линейно-упорядоченным архимедовым $\mathbb{R}$ -полем.

Определим отображение $\kappa: \mathbb{Q} \rightarrow \bar{A}_M$, полагая $\kappa(p/q) \equiv (p1_A)(q1_A)^{-1} + M$ для любых $p \in \mathbb{Z}$ и $q \in \mathbb{N}$. Пусть $\bar{a}_M \equiv p1_{\bar{A}_M}(q1_{\bar{A}_M})^{-1} \in A$. Тогда очевидно, что $\kappa(p/q) = \bar{a}_M$. Следовательно, κ отображает $\mathbb{Q}$ на $\bar{A}_M$.

Существенную роль далее играет следующая хорошо известная

ТЕОРЕМА. Существует единственный изоморфизм линейно упорядоченных $\mathbb{R}$ -полей $u_M: \bar{A}_M \rightarrow \mathbb{R}$, продолжающий изоморфизм линейно упорядоченных $\mathbb{Q}$ -полей $\kappa^{-1}: \bar{A}_M \rightarrow \mathbb{Q}$.

Обозначим через $\text{Max } A$ множество всех максимальных идеалов s -кольца A . Каждому элементу $a \in A$ сопоставим функцию $\hat{a}: \text{Max } A \rightarrow \mathbb{R}$ такую, что $\hat{a}(M) \equiv u_M(\bar{a}_M)$. Семейство всех функций $\hat{a}$ обозначим через $\hat{A}$.

Зададим топологию $\mathcal{G}$ на $\text{Max } A$ как слабейшую топологию, в которой все функции из $\hat{A}$ непрерывны. Известно, что топологическое пространство $(\text{Max } A, \mathcal{G})$ отделимо и компактно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Кольцо A является полупримитивным, т.е. $\text{Rad } A \equiv \bigcap (M \mid M \in \text{Max } A) = \{0\}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть A является s -кольцом. Тогда отображение $\rho: A \rightarrow C(\text{Max } A)$ является изоморфизмом упорядоченных банаховых $\mathbb{R}$ -алгебр.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J.-P. Delfosse // Ann. Soc. Sci. Bruxelles. Ser. I. 1975. V. 89. P. 364–368.