Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Кудрявцев, Об исключительных терминальных особенностях, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 1, 165–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm366>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 16:34:06

ОБ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ ТЕРМИНАЛЬНЫХ ОСОБЕННОСТЯХ

С. А. КУДРЯВЦЕВ

Важность изучения исключительных особенностей следует из следующего наблюдения: если особенность не исключительна, то для нее можно найти “хороший” дивизор из линейной системы $|-nK_X|$ для небольших значений n . Например, для двухмерных логканонических особенностей $n \in \{1, 2\}$ [1; 5.2], а в трехмерном случае $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ [2; 7.1]. А исключительные особенности “ограниченны” и можно дать их подробное описание. В данной работе строятся первые примеры исключительных терминальных особенностей.

Автор очень признателен В. А. Исковских, Ю. Г. Прохорову за проявленный интерес к работе.

1. Предварительные сведения. Все многообразия рассматриваются над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Основные определения, обозначения и понятия приведены в [3], [4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть $(X/Z \ni P, D)$ – стягивание многообразий. $\mathbb{Q}$ -дополнением для этого стягивания называется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор D' такой, что $D' \geq D$, дивизор $K_X + D'$ – логканоничен и $K_X + D' \sim_{\mathbb{Q}} 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Пусть $(X/Z \ni P, D)$ – стягивание многообразий. Если $\dim Z \neq 0$, то стягивание называется *исключительным*, если для любого $\mathbb{Q}$ -дополнения D' существует не более одного дивизора E (не обязательно исключительного) такого, что $a(E, D') = -1$. Если $\dim Z = 0$, то стягивание называется *исключительным*, если для любого $\mathbb{Q}$ -дополнения D' пара (X, D') логтерминальна по Кавамате.

ПРИМЕР 1.3. Если для особенности $(X \ni P)$ существует эффективный дивизор H такой, что пара (X, H) – логканонична и $\lfloor H \rfloor \neq 0$, то особенность не исключительна. Поэтому трехмерная терминальная особенность не исключительна, так как в антиканонической линейной системе $|-K_X|$ существует дивизор с дубалевскими особенностями [5; 6.4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Пусть $(X \ni P)$ – логтерминальная особенность, и пусть $f: Y \rightarrow X$ некоторое ее раздутие. Предположим, что исключительное множество f состоит из одного неприводимого дивизора E . Тогда $f: (Y, E) \rightarrow (X \ni P)$ называется *чисто логтерминальным раздутием*, если дивизор $K_Y + E$ чисто логтерминален и $-(K_Y + E)$ f -обилен.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. Чисто логтерминальное раздутие всегда существует [6; 1.5].

ТЕОРЕМА 1.6 [7; 4.9]. Пусть $(X \ni P)$ – логтерминальная особенность, и пусть $f: (Y, E) \rightarrow X$ – чисто логтерминальное раздутие X . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (1) особенность $(X \ni P)$ – исключительная;
- (2) логмногообразие $(E, \text{Diff}_E(0))$ – исключительное.

2. Примеры исключительных терминальных особенностей.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $(f = 0, 0) = (x_1^{a_1} + x_2^{a_2} + x_3^{a_3} + x_4^{a_4} + x_5^{a_5} = 0, 0) \subset (\mathbb{C}^5, 0)$ – четырехмерные гиперповерхностные особенности, где $(a_1, \dots, a_5) = (2, 3, 11, 17, 19)$, $(2, 3, 11, 17, 23)$, $(2, 3, 11, 17, 25)$, $(2, 3, 11, 17, 29)$, $(2, 5, 7, 9, 11)$, $(2, 5, 7, 9, 13)$. Тогда они терминальны и исключительны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим первую особенность. Сначала докажем, что эта особенность терминальна. Так как она невырожденная, то для нее существует вложенное торическое логразрешение [8]. Поэтому удобно доказать, что $a_{\mathbf{p}} = \langle \mathbf{p}, 1 \rangle - \mathbf{p}(f) - 1 \geq 1$ для всех $\mathbf{p}$, где $\mathbf{p}$ – ненулевой вектор с целочисленными неотрицательными координатами и $\mathbf{p}(f) = \min_{x^m \in f} \langle \mathbf{p}, m \rangle$. Проще всего это сделать следующим образом. Пусть $h(d) = \lceil \frac{d}{2} \rceil + \lceil \frac{d}{3} \rceil + \lceil \frac{d}{11} \rceil + \lceil \frac{d}{17} \rceil + \lceil \frac{d}{19} \rceil - d - 1$.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ № 99-01-01132, ведущих научных школ № 96-15-96146 и грантов INTAS-OPEN № 93-2805 и № 97-2072.

Положим $d = \mathbf{p}(f)$, тогда $h(d) \leq a_{\mathbf{p}}$. Отсюда достаточно доказать, что $h(d) \geq 1$ для всех $1 \leq d \leq 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 19$. Последнее элементарно проверить с помощью компьютерной программы.

Взвешенное раздутие $\mathbb{C}^5$ с весами, пропорциональными $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{11}, \frac{1}{17}, \frac{1}{19})$, индуцирует чисто логтерминальное раздутие нашей особенности. Полученное многообразие лог Фано $(E, \text{Diff}_E(0))$ — это

$$\left(\underbrace{\sum_{i=1}^5 x_i \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 1, 1)}_{\mathbb{P}^3}, \frac{1}{2}H_1 + \frac{2}{3}H_2 + \frac{10}{11}H_3 + \frac{16}{17}H_4 + \frac{18}{19}H_5 \right),$$

где $H_i = \{x_i = 0\}$.

Пусть $D = \sum d_i D_i + \sum h_i H_i$ — произвольное $\mathbb{Q}$ -дополнение для этой пары. В данном случае легко проверить, что $d_i < 1$ и $h_i < 1$ для всех i . Если любой D_i является гиперплоским сечением, то легко проверить, что дивизор $K_{\mathbb{P}^3} + D$ — логтерминален по Кавамате. Докажем, что всегда пара $(\mathbb{P}^3, D)$ логтерминальна по Кавамате. Этот вопрос локальный, поэтому рассмотрим произвольную карту $\mathbb{C}_{y_1, y_2, y_3}^3$. Пусть $D = \Delta + D'$, где Δ состоит из гиперплоских сечений и $D' = \sum d_i \{f_i = 0\}$. Пусть минимальная степень f_i равняется n_i . Рассматривая замену координат в $\mathbb{C}^3$, без ограничения общности можно считать, что $f_i = y_1^{n_i} + \dots$. Рассмотрим деформацию $F'_t = \sum d_i t^{-n_i} f_i(ty_1, t^2y_2, t^2y_3)$. При $t = 0$ имеем $D'_0 = \{F'_0 = 0\} = \sum d_i \{y_1^{n_i} = 0\} = \sum d_i n_i \{y_1 = 0\}$, а при малых $t \neq 0$ следует, что $D'_t = \{F'_t = 0\} = D'$. Из [9; 8.6] имеем, что $c(\mathbb{C}^3, \Delta + D'_0) \leq c(\mathbb{C}^3, \Delta + D'_t) = c(\mathbb{C}^3, \Delta + D')$, где c — логканонический порог. Так как каждая компонента $\text{Supp}(\Delta + D'_0)$ является гиперплоским сечением, то пара $(\mathbb{C}^3, \Delta + D'_0)$ логтерминальна по Кавамате. Поэтому пара $(\mathbb{C}^3, \Delta + D')$ тем более логтерминальна по Кавамате. По критерию 1.6 особенность исключительная. Дивизор $\frac{1}{22}(\lfloor 23 \cdot \text{Diff}_E(0) \rfloor)$ дает 22-дополнение минимального индекса. Остальные особенности рассматриваются аналогичным образом. Они соответственно 24-, 34-, 34-, 22-, 28-дополняемы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Из гипотезы о том, что минимальный индекс дополняемости поверхностей лог Дель-Пеццо со стандартными коэффициентами не превосходит 66 [2], следует ограничение на вид $\mathbb{Q}$ -дополнения $D = \sum d_i D_i$ для 4-мерных особенностей. Пусть $d_i = r_i/q_i$, тогда $q_i \leq 66$. Это позволяет рассматривать конечное число вариантов для D .

ГИПОТЕЗА 2.3. Пусть $(X \ni P)$ — n -мерная каноническая (логканоническая) гиперповерхностная особенность. Пусть f — логразрешение и $\min\{a(E, 0) \mid f(E) = P\} \geq n - 2$. Тогда существует гиперплоское сечение H такое, что пара (X, H) чисто логтерминальна (логканонична). Отсюда следует, что особенность не слабо исключительна [7; 4.8] (не исключительна).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. В. Шокуров // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1992. Т. 56. С. 105–203. [2] V. V. Shokurov. Complements on surfaces // e-print math.AG/9711024. [3] J. Kollar (ed.). Flips and Abundance for Algebraic Threefolds. Paris: Société Mathématique de France, 1992. (Astérisque. V. 211.) [4] Yu. G. Prokhorov. Lectures on complements on log surfaces // e-print math.AG/9912111. [5] M. Reid // Proc. Sympos. Pure Math. 1987. V. 46. P. 343–416. [6] С. А. Кудрявцев. О чисто логтерминальных раздутиях // Матем. заметки. (в печати). [7] Yu. G. Prokhorov // Algebra: Proceedings of the International Conference on the Occasion of the 90th birthday of A. G. Kurosh, Moscow, Russia, May 25–30, 1998 / ed. Yu. Bahturin. Berlin: de Gruyter, 2000. P. 301–317. [8] A. N. Varchenko // Invent. Math. 1976. V. 37. P. 253–262. [9] J. Kollár // Proc. Sympos. Pure Math. 1995. V. 62. P. 221–287.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: koudr@mi.ras.ru

Принято редколлегией
01.12.2000