Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Куликов, Эргодичность и перемешивание T -индуцированных потоков,
УМН, 2001, том 56, выпуск 1, 167–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm367>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 16:49:18

ЭРГОДИЧНОСТЬ И ПЕРЕМЕШИВАНИЕ Т-ИНДУЦИРОВАННЫХ ПОТОКОВ

М. С. Куликов

Пусть G – связная (вещественная) группа Ли и задано непрерывное действие $T : \Gamma \rightarrow \text{Aut}(X, \mu)$ замкнутой подгруппы $\Gamma \subset G$ на пространстве Лебега X с конечной мерой μ . На $X \times G$ рассмотрим вертикальное действие $S, (x, g) \xrightarrow{h} (x, hg)$, группы G и диагональное действие группы Γ , задаваемое формулой

$$(x, g) \xrightarrow{\gamma} (T(\gamma), g\gamma^{-1}). \quad (1)$$

На пространстве Y орбит действия (1) S индуцирует действие $\text{Ind } T$ группы G . Ограничение $\text{Ind } T$ на однопараметрическую подгруппу $F = \{f^t, t \in \mathbb{R}\} \subset G$ называется T -индуцированным потоком, отвечающим F . Если на G/Γ существует конечная G -инвариантная мера, то проекция меры $\mu \times \lambda$ на Y , где λ – правая мера Хаара на G , конечна и инвариантна относительно $\text{Ind } T$ (причем Y – пространство Лебега).

T -индуцированные потоки являются расширениями потоков на однородных пространствах групп Ли. Изложение основных результатов теории однородных потоков имеется в [1]. Нашей целью здесь является отыскание критериев эргодичности, перемешивания и слабого перемешивания T -индуцированных потоков.

Для дальнейшего нам понадобится следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Измеримое T -инвариантное разбиение ξ , отличное (mod 0) от $\{X\}$, назовем допустимым для T , если фактор-действие T/ξ продолжается до действия $\tilde{T}$ группы G .

Очевидным необходимым условием эргодичности $\text{Ind } T|_F$ является эргодичность соответствующего однородного фактор-потока и действия T . Однако, $\text{Ind } T|_F$ может оказаться неэргодичным, даже если эти условия выполнены. Критерий эргодичности в случае полупростой группы следующий.

ТЕОРЕМА 1. Пусть группа G полупроста и поток на однородном пространстве G/Γ , отвечающий F , эргодичен. Тогда неэргодичность $\text{Ind } T|_F$ эквивалентна существованию такого допустимого для T разбиения ξ , что поток $\tilde{T}|_F$ неэргодичен.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие эргодичности T -индуцированного потока в случае разрешимой группы G отличается от сформулированного в теореме 1.

Критерии перемешивания и слабого перемешивания сформулированы для произвольной группы, при этом необходимым условием является (эквивалентное слабому) перемешивание однородного фактор-потока.

ТЕОРЕМА 2. Пусть поток на однородном пространстве G/Γ , отвечающий F , перемешивает. Тогда отсутствие (слабого) перемешивания у $\text{Ind } T|_F$ эквивалентно существованию такого допустимого для T разбиения ξ , что поток $\tilde{T}|_F$ не обладает (слабым) перемешиванием.

ЭСКИЗ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1 и 2. Докажем, что из неэргодичности или соответственно отсутствия (слабого) перемешивания следует существование требуемого допустимого разбиения.

Ниже мы будем пользоваться тем, что σ -алгебра $\mathfrak{X}$ (классов, совпадающих по модулю 0) измеримых подмножеств в X , снабженная метрикой – мерой симметрической разности, является полным сепарабельным пространством.

Пусть $U \subset G$ – произвольная замкнутая нормальная подгруппа. Положим $\tilde{\Gamma} = \overline{\Gamma U}$. Рассмотрим T -инвариантную σ -алгебру $\mathfrak{A}$, состоящую из таких $A \in \mathfrak{X}$, что для любой последовательности $\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty \subset \Gamma$ сходимость $\{\gamma_n U\}$ к единице в G/U влечет

$$T(\gamma_n)A \rightarrow A \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Поскольку X – пространство Лебега, $\mathfrak{A}$ порождена некоторым измеримым T -инвариантным разбиением ξ .

ЛЕММА. Фактор-действие T/ξ подгруппы Γ продолжается до непрерывного действия $\tilde{T}$ подгруппы $\tilde{\Gamma}$, причем индуцированное действие $\text{Ind } \tilde{T}$ группы G изоморфно фактор-действию $(\text{Ind } T)/\zeta$, где ζ – разбиение на эргодические компоненты для $\text{Ind } T|_U$.

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ЛЕММЫ. Для каждого $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}$ рассмотрим произвольную последовательность $\{\gamma_n\} \subset \Gamma$ такую, что $\gamma_n U \rightarrow \tilde{\gamma} U$ в G/U . $T(\gamma_n)$ порождает автоморфизм σ -алгебры $\mathfrak{A}$, поскольку она T -инвариантна. Ввиду соотношения (2) можно определить действие элемента $\tilde{\gamma}$ на $\mathfrak{A}$, причем одно и то же для любой последовательности $\{\gamma_n\}$. Всякий автоморфизм алгебры измеримых подмножеств пространства Лебега порождается преобразованием, сохраняющим меру (см. [2]). Поэтому действие элемента $\tilde{\gamma}$ на $\mathfrak{A}$ (отождествленной с σ -алгеброй измеримых подмножеств в X/ξ) порождено преобразованием $\tilde{T}(\tilde{\gamma}) \in \text{Aut}(X/\xi)$.

Для каждого измеримого $M \subset Y/\zeta$ рассмотрим измеримую функцию $\mathfrak{M}: G \rightarrow \mathfrak{X}$, заданную формулой $\mathfrak{M}(g) = \{x \in X : (x, g) \in N\}$, где $N \subset X \times G$ – полный прообраз M при последовательной проекции $X \times G \rightarrow Y \rightarrow Y/\zeta$.

Используя понятие точки Лебега измеримой функции, принимающей значения в сепарабельном метрическом пространстве, можно доказать, что $\mathfrak{M}(g) \in \mathfrak{A}$ для почти всех g . Далее, образ N под действием проекции $X \times G \rightarrow (X/\xi) \times G$, обозначим его $\tilde{N}$, инвариантен (mod 0) относительно диагонального действия группы $\tilde{\Gamma}$ на $(X/\xi) \times G$. Пусть $\tilde{Y}$ – пространство орбит этого действия, т.е. пространство, на котором определено $\text{Ind } \tilde{T}$, и $\tilde{M}$ – проекция $\tilde{N}$ в $\tilde{Y}$. Соответствие $M \mapsto \tilde{M}$ является изоморфизмом алгебр с мерой. Так как Y и $\tilde{Y}$ – пространства Лебега, то он порожден взаимно однозначным (mod 0) сохраняющим меру отображением $Y \rightarrow \tilde{Y}$, которое осуществляет искомый изоморфизм $(\text{Ind } T)/\zeta$ и $\text{Ind } \tilde{T}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Подгруппой Мура для F называется наименьшая нормальная подгруппа $M \subset G$ такая, что замыкание $\text{Ad}(\pi(F))$ компактно, где π – проекция $G \rightarrow G/M$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ (феномен Маутнера) (см. [3]). Пусть M – подгруппа Мура для F . Тогда для любого непрерывного унитарного представления ρ группы G спектр $\rho|_F$ абсолютно непрерывен в $\text{Fix}(M)^\perp$ (в частности, $\text{Fix}(F) \subset \text{Fix}(M)$).

Эргодичность потока на полупростом однородном пространстве влечет его перемешивание (см. [1]). Для произвольного перемешивающего однородного потока справедливо $\Gamma \tilde{M} = G$. Применяя лемму к подгруппе $U = M$, получаем, что T/ξ продолжается до действия $\tilde{T}$ группы G . Заметим, что действие группы G индуцирует (в смысле приведенного выше определения) действие, изоморфное исходному. Поэтому $\tilde{T} \cong \text{Ind } \tilde{T}$ и согласно лемме $\tilde{T} \cong (\text{Ind } T)/\zeta$.

Предположим, что T -индуцированный поток неэргодичен. Рассмотрим представление группы G в $L^2(Y)$, ассоциированное с $\text{Ind } T$. Согласно феномену Маутнера получаем, что нетривиальное инвариантное относительно $\text{Ind } T|_F$ подмножество в Y/ζ -измеримо. Поэтому поток $(\text{Ind } T|_F)/\zeta$ неэргодичен, равно как и изоморфный ему $\tilde{T}|_F$. Значит, ξ – искомое допустимое разбиение.

Если $\text{Ind } T|_F$ не обладает (слабым) перемешиванием, то ввиду феномена Маутнера им не обладает и $(\text{Ind } T|_F)/\zeta \cong \tilde{T}|_F$. Поэтому ξ – требуемое разбиение и в этом случае.

ЗАМЕЧАНИЕ. Имеется конструкция индуцированного унитарного представления (см. [4]), для которого справедливы соответствующие аналоги теорем 1 и 2.

Автор выражает глубокую благодарность А.М. Стёпину за постановку задачи и помощь в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Н. Старков. Динамические системы на однородных пространствах. М.: Фазис, 1999.
- [2] И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
- [3] С. С. Moore // Pacific J. Math. 1980. V. 86. № 12. P. 154–169. [4] А. А. Кириллов. Элементы теории представлений. М.: Наука, 1978.