Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Людковский, Представления топологических групп, порожденные пуассоновыми мерами, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 1, 169–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm368>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 12:10:15

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУПП, ПОРОЖДЕННЫЕ ПУАССОНОВЫМИ МЕРАМИ

С. В. Люлковский

В статьях [1]–[5] были построены неотрицательные гауссовы квазиинвариантные меры (КИМ) на группах диффеоморфизмов (ГД) и петель G относительно плотных подгрупп G' . Данная работа посвящена исследованию унитарных представлений этих групп, порожденных пуассоновыми мерами на соответствующих конфигурационных пространствах.

1. Обозначения и определения. Пусть X обозначает многообразие $M = X$ для ГД $G = G(M)$ или саму ГД, или группу петель $G = X$ класса гладкости не меньше C^1 . При $X = M$ пусть X – это банахово некомпактное многообразие. Пусть $K = X$ – польское пространство, B_K^n семейство – всех n -точечных подмножеств в K . Пусть $P_{K,\mu} := \exp(-\mu(K)) \sum_{n=0}^{\infty} m_n/n!$ – пуассонова мера на алгебре борелевских подмножеств в B_K , где $m_n := \bigotimes_{j=1}^n \mu =: \mu^n$ – мера на K^n , m_0 – вероятностная мера на одноточечном множестве K^0 , B_K – прямая сумма топологических пространств K^n , $n = 0, 1, 2, \dots$, μ – σ -конечная КИМ относительно действия G' (слева) на K с $\mu(K) = \infty$. Рассмотрим последовательность собственных польских подмножеств K_n в K таких, что $K_n \subset \text{Int}(K_{n+1})$ для любых $n \in \mathbb{N}$. Тогда можно задать конфигурационное пространство Γ_K , изоморфное проективному пределу $\text{pr-lim}\{B_{K_n}, \pi_n^m\}$, $\pi_n^m(\gamma) = \gamma \cap B_{K_n}$ для любых $\gamma \in B_{K_m}$ и $m \geq n$. Мера $P_{K,\mu}$ порождает меру P_μ на Γ_K . Пусть $\tilde{\Gamma}_K := [\bigcup_{g \in G'} g\Gamma_K]/R$ – многообразие с картами, индуцированными из Γ_K , где R – отношение эквивалентности, $(g\gamma)R(g'\gamma')$ равносильно $(g\gamma) = (g'\gamma')$, $\gamma \in \Gamma_K$, $g \in G'$, $\bigcup_{g \in G'} g\Gamma_K$ рассматривается как подмножество в $K^{\mathbb{N}}$, так как G' сепарабельна. Тогда P_μ на Γ_K индуцирует пуассонову меру P_μ на $\tilde{\Gamma}_K$. Можно задать унитарное представление $U^\mu: G' \rightarrow U(\overline{H})$, где $U_z^\mu f(\gamma) := (dP_{\mu_z}/dP_\mu)^{1/2}(\gamma) f(z^{-1}\gamma)$, $f \in \overline{H}$, $\gamma \in \tilde{\Gamma}_K$, $\overline{H} := L^2(P_\mu, \tilde{\Gamma}_K, \mathbb{C})$, $z \in G'$, и $\mu_z(A) := \mu(z^{-1}A)$ для любого борелевского подмножества A в K и $z \in G'$. В случае $X = M$ и ГД $G' = \text{Diff}^t(M)$ рассмотрим симметрические группы Σ^n и Σ^∞ , образованные всеми биективными эпиморфизмами множеств $\{1, \dots, n\}$ или $\mathbb{N}$ соответственно, где $n \in \mathbb{N}$. Если q – унитарное представление Σ^n или Σ^∞ в гильбертовом пространстве (ГП) W , то $s_n: B_X^n \rightarrow \tilde{X}^n$ дает отображение $\sigma: G' \times B_X^n \rightarrow \Sigma^n$ такое, что $s_n(\psi^{-1}(\gamma)) = \psi^{-1}(s_n(\gamma))\sigma(\psi, \gamma)$, где $(x_1, x_2, \dots)\sigma = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots)$, s_n – это измеримое сечение отображения $p_n: \tilde{X}^n \rightarrow \tilde{\Gamma}_X$ такое, что $p_n(x_1, x_2, \dots) = \{x_1, x_2, \dots\}$, $n \in \mathbb{N}$ или $n = \infty$, $\tilde{X}^n$ – подмножество в X^n с элементами $(x_1, x_2, \dots)$ такими, что $x_i \neq x_j \quad \forall i \neq j$. Тогда получим унитарные представления G' в $L^2(B_X^n, \mu^n, W)$ или $L^2(\tilde{\Gamma}_X, P_\mu, W)$ такие, что $V_\mu^q(\psi)f(\gamma) := \rho_{\mu^n}^{1/2}(\psi, \gamma)q(\sigma(\psi, \gamma))f(\psi^{-1}(\gamma))$ или $V_\mu^q(\psi)f(\gamma) := \rho_{P_\mu}^{1/2}(\psi, \gamma)q(\sigma(\psi, \gamma))f(\psi^{-1}(\gamma))$ и $U^{q,\mu} := U^\mu \otimes V_\mu^q$, где $\rho_{\mu^n}(\psi, \gamma) := (\mu^n)_\psi(d\gamma)/\mu^n(d\gamma)$. В случае $X \neq M$ берем $V_\mu^q = I$ и $W = \{0\}$.

2. ТЕОРЕМЫ. 1. *Существуют КИМ μ на X такие, что представления $U^{q,\mu}$ из п. 1 неприводимы, когда q неприводимы.*

2. *Унитарные представления U^μ и $U^{\tilde{\mu}}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда меры P_μ и $P_{\tilde{\mu}}$ эквивалентны.*

Наметим путь доказательства. Многообразие $\tilde{\Gamma}_X$ паракомпактно, следовательно, имеет локально конечное покрытие $\{S_l: l \in \mathbb{N}\}$, где $\zeta_l: S_l \rightarrow Q_l$ – диффеоморфизмы с соответствующими открытыми подмножествами Q_l в Γ_X , для которых $P_\mu(Q_l) < \infty$, где μ – КИМ на X относительно G' с $\mu(X) = \infty$. В силу п. 1 $P_\mu(\tilde{\Gamma}_X) = 1$. В работах [1], [3], [6], [7] было доказано, что в рассмотренных случаях такие μ эргодичны на X относительно G' . Выберем μ и K_n так, чтобы $\mu(K_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}; \forall \varepsilon > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ существует $\psi \in G'$ такое, что $\psi(K_n) \cap K_n = \emptyset$ и $\bigcup_n K_n = X$ и $\int_X |\rho_\mu^{1/2}(\psi, x) - 1|^2 \mu(dx) < \varepsilon$. Тогда P_μ на $\tilde{\Gamma}_X$ эргодична относительно действия G' . Возьмем μ так, что регулярное представление T^μ подгруппы G' в ГП $L^2(G, \mu, \mathbb{C})$ неприводимо [1], [3], [8]. Представления T^μ и $T^{\tilde{\mu}}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда μ и $\tilde{\mu}$ –

эквивалентные меры. Воспользуемся тем, что G' действует на X нелинейно преобразованиями L_h и с ненулевыми (тождественно) дифференциалами $D^n L_h$ по $h \forall n$, где $L_h x := hx \forall h \in G'$ и $x \in X$.

3. ТЕОРЕМА. *Существуют абелевы не локально компактные группы Банаха–Ли G с квазиинвариантными мерами μ на G относительно плотных подгрупп G' такие, что ассоциированные регулярные унитарные представления T^μ подгрупп G' неприводимы, каждая однопараметрическая подгруппа S группы G компактна и проекция μ на S эквивалентна с мерой Хаара на S .*

Для доказательства рассмотрим ГП $l_{2,b}$ над $\mathbb{R}$ с элементами $x = (x_j : j \in \mathbb{N}, x_j \in \mathbb{R})$ такое, что $\|x\|_{l_{2,b}}^2 := \sum_j |x_j j^b|^2 < \infty, 0 \leq b < \infty$. На l_2 существует гауссова мера λ , квазиинвариантная относительно $l_{2,b}$ при $0 < b$. Для поля $\mathbb{L}$, являющегося конечным алгебраическим расширением поля $\mathbb{Q}_p$, пусть $c_{0,b}$ обозначает банахово пространство с элементами $x = (x_j : j \in \mathbb{N}, x_j \in \mathbb{L})$, так что $\|x\| := \max_j |x_j|_{\mathbb{L}} p^{jb} < \infty$ и $\lim_{j \rightarrow \infty} |x_j| p^{jb} = 0$, где p – простое число, $c_{0,0} =: c_0, b \geq 0$. Возьмем $b > 1$ и меру η на c_0 , квазиинвариантную относительно $c_{0,b}$, с проекциями на $\mathbb{L}e_j$ вида $\eta_j(dx_j) = F_j \exp(-|x_j|^2 p^{2j}) \cdot v(dx_j)$, где v – мера Хаара на $\mathbb{L}$, а $F_j = \text{const} > 0$ с $\eta_j(\mathbb{L}) = 1$, что индуцирует меру на единичном шаре $B \ni 0$ в c_0 квазиинвариантную относительно $B_b = \{x \in c_{0,b} : \|x\| \leq 1\}$. Рассмотрим аддитивную дискретную подгруппу E в $l_{2,b}$ с элементами $x \in l_{2,b}$ такими, что $x_j = n_j e_j \forall j \in \mathbb{N}$, где $n_j \in \mathbb{Z}$. Тогда $l_{2,b}/E =: H_b$ и $l_2/E =: H$ – аддитивные группы. Мера λ индуцирует меру μ на H , квазиинвариантную и эргодичную относительно H_b и $\text{sp}_{\mathbb{C}}\{(\mu_z(dx)/\mu(dx))^{1/2} =: \varphi(x) \mid z \in H_b\}$ плотно в $L^2(H, \mu, \mathbb{C})$ [3], [8]. С использованием теоремы фон Неймана о двойном коммутаторе и рассуждениями с каноническими регулярными $L^2(H, \mu, \mathbb{C})$ -проекторнозначными мерами доказывается неприводимость (аналогично для аддитивной группы B и плотной подгруппы B_b).

4. ЗАМЕЧАНИЕ. Однако представления U^μ из п. 1 для мер μ из п. 3 групп $l_{2,b}$ и $H_b, c_{0,b}$ и B_b приводимы, так как $D^n L_h = 0 \forall n > 1$ и вектор f_0 не циклический для U^μ , где $f_0(x) := 1 \forall x \in \tilde{\Gamma}_G$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. В. Лютковский // ТМФ. 1999. Т. 119. №3. С. 381–396. [2] С. В. Лютковский // УМН. 1998. Т. 53. №3. С. 203–204. [3] S. V. Ludkovsky // Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste. Nuova Ser. 1999. V. 31. P. 101–134. [4] С. В. Лютковский // Докл. РАН. 2000. Т. 370. №3. С. 306–308. [5] Е. Т. Шавгулидзе // Докл. АН СССР. 1988. Т. 303. С. 811–814. [6] S. V. Ludkovsky // Southeast Asian Bull. Math. 1998. V. 22. P. 419–436. [7] S. V. Ludkovsky // Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste. Nuova Ser. 1998. V. 30. P. 21–43. [8] S. V. Ludkovsky. Poisson measures for topological groups and their representations // Preprint, 1998. IHES/M/98/88 (Los Alamos Nat. Lab. USA. math.RT/9910110. <http://xxx.lanl.gov>).