Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Максимов, Представление алгебры линейных отображений косым произведением алгебр, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 1, 171–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm369>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 13:46:40

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АЛГЕБРЫ ЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ КОСЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ АЛГЕБР

В. М. МАКСИМОВ

1. Конструкции косых полиномов, рядов [1]–[4], косых алгебр таких, как алгебры Клиффорда и их обобщения [5], [6], а также аналогичных конструкций для алгебр Хопфа [6] являются предметом постоянных исследований, так как находят широкое применение [7], [8].

В частности, представления алгебры линейных отображений пространства полиномов в себя косыми рядами по степеням D – обычных операторов дифференцирования [9], лежит в основе классического теневого исчисления (см. [10], [11]). Обобщения этого исчисления см. в [12]–[15].

В данном сообщении мы даем общую теорему о представлении алгебры $\mathcal{A}(L)$ всех линейных отображений линейного пространства L над полем $\mathcal{F}$ (для удобства $\text{char } \mathcal{F} = 0$) косым произведением алгебр. Мы полагаем, что $\dim L = |L|$ конечна или счетна.

Следует отметить, что разложение Тейлора (1715 г.) $E^y = \sum y^n D^n / n!$, где E^y – оператор сдвига переменной на y , и разложение Бернулли (1694 г.) $V_0 = \sum (-1)^n X^n D^n / n!$, где V_0 – оператор значения в нуле, X – оператор умножения на переменную, дают примеры разложения этих операторов при таком их представлении.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Ассоциативную алгебру S над полем $\mathcal{F}$ будем называть косым произведением алгебр A и B над $\mathcal{F}$, если S содержит подалгебры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, изоморфные соответственно A и B , и если каждый элемент $s \in S$ может быть однозначно представлен в виде конечной или бесконечной суммы $s = \alpha_0 + \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots$, где $\alpha_i \in \mathcal{A}$ определяются s , а $b_1, b_2, \dots$ – некоторый базис $\mathcal{B}$.

Базис $\{b_k\}$ определяет операторы $\psi_j^{(i)}$ алгебры $\mathcal{A}$ по правилу $b_i \alpha = \psi_0^{(i)}(\alpha) + \psi_1^{(i)}(\alpha) b_1 + \dots$ для каждого $\alpha \in \mathcal{A}$.

Если структурные константы, определяемые базисом $\{b_k\}$, и операторы $\psi_j^{(i)}$ удовлетворяют соотношениям, вытекающим из условий ассоциативности, то алгебра $\mathcal{B}$ и операторы $\psi_j^{(i)}$ определяют алгебру S однозначно.

Заметим, что косое произведение алгебр можно также описать как скрещенное произведение этих алгебр (см., например, [6]).

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Всякую алгебру $\mathcal{T}$ операторов из $\mathcal{A}(L)$ будем называть алгеброй восстановления базиса $\{l_k\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, пространства L , если в $\mathcal{T}$ имеется линейный базис $\{\Gamma_k\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, такой, что $\Gamma_k l_0 = l_k$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Всякую алгебру $\mathcal{B}$ операторов из $\mathcal{A}(L)$ будем называть локальной относительно базиса $\{l_k\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, пространства L , если в $\mathcal{B}$ имеется базис $\{B_k\}$ такой, что выполнены следующие равенства:

$$B_k l_i = 0, \quad i < k, \quad B_k l_k = l_0 \quad (\text{условия локальности}). \quad (1)$$

ТЕОРЕМА 1 (о разложении операторов). *Каждый оператор $T \in \mathcal{A}(L)$ однозначно представляется в виде*

$$T = \gamma_0 + \gamma_1 B_1 + \gamma_2 B_2 + \dots, \quad (2)$$

где $\gamma_i \in \mathcal{T}$ – из определения 2, а $\{B_k\}$ – базис из определения 3.

В силу (1) лишь конечное число значений операторов B_k ряда (2) отлично от нуля на любом базисном элементе l_k . Поэтому сумма (2) может быть конечной и бесконечной.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Алгебру $\mathcal{P}$ над полем $\mathcal{F}$ будем называть обобщенно локальной, если в ней имеется базис $\{P_k\}$, для которого выполнены условия:

- 1) если произведение $P_i \cdot P_j \neq 0$, то при разложении по базису $\{P_k\}$ оно содержит только элементы P_r с $r > j$;
- 2) для любых целых $d > 0$ и $j > 0$ найдется целое $\delta(d, j) > 0$ такое, что для $n > \delta(d, j)$ в разложении $P_n P_j$ по базису $\{P_k\}$ встречаются только элементы P_r с $r > d$, либо $P_n P_j = 0$.

Очевидно, градуированные алгебры ($\deg P_i = i$) являются обобщенно локальными.

ТЕОРЕМА 2. Если дана произвольная обобщенно локальная алгебра $\mathcal{P}$, определяемая в базисе $\{P_k\}$ структурными константами $\{C_k^{ij}\}$, то для любого базиса $\{l_k\}$ пространства L операторы $\{B_k\}$, определяемые условиями:

- 1) $B_k l_i = 0$, $i < k$, $B_k l_k = l_0$ (свойство локальности),
- 2) $B_n l_{n+m} = \beta_1^{n,m} l_1 + \beta_2^{n,m} l_2 + \dots$, где $\beta_k^{n,m} = C_{n+m}^{k,n}$,

порождают локальную алгебру $\mathcal{B}$, изоморфную алгебре $\mathcal{P}$ (причем в силу локальности сумма в 2) конечна).

Доказательство основано на формальной проверке изоморфизма при соответствии $P_i \rightarrow B_i$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для каждой алгебры $\mathcal{G}$ над полем $\mathcal{F}$, $|\mathcal{G}| = |L|$, и любого базиса $\{l_k\}$ пространства L существует изоморфная ей алгебра операторов восстановления $\mathcal{T}$.

Таким образом, из теорем 1, 2 и предложения 1 вытекает

ТЕОРЕМА 3 (о косом представлении). Пусть $\mathcal{G}$ — произвольная алгебра над $\mathcal{F}$, $|\mathcal{G}| = |L|$, и $\mathcal{B}$ — произвольная обобщенно локальная алгебра над $\mathcal{F}$, $|\mathcal{B}| = |L| - 1$. Тогда алгебра $\mathcal{A}(L)$ изоморфна некоторому косому произведению алгебр $\mathcal{G}$ и $\mathcal{B}$.

Частные случаи этой теоремы при $|L| = 2^q$, $|L| < \infty$ и счетном L были рассмотрены в [9], [14], [16], [17].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] O. Ore // Ann. of Math. (2). 1933. V. 34. P. 480–508. [2] F. Dumas // Lecture Notes in Math. 1991. V. 1478. P. 192–214. [3] В. М. Максимов // УМН. 2000. Т. 55. № 4. С. 215–216. [4] Т. Н. М. Smits // Proc. Nederl. Akad. Wet. Ser. A. 1968. V. 71. P. 209–224. [5] A. K. Kwasnewski // J. Phys. A. 1986. V. 19. P. 1469–1476. [6] К. Кассельс. Квантовые группы. Москва: Фазис, 1999. [7] Б. И. Ботвинник, В. М. Бухштабер, С. П. Новиков, С. А. Юзвинский // УМН. 2000. Т. 55. № 4. С. 5–24. [8] A. Bottreau, A. Di Bucchianico, D. E. Loeb // Discrete Math. 1998. V. 180. P. 65–75. [9] С. Г. Курбанов, В. М. Максимов // Докл. УзССР. 1986. № 4. С. 809–811. [10] G.-C. Rota. Finite Operator Calculus. London: Academic Press, 1975. [11] S. M. Roman. The Umbral Calculus. London: Academic Press, 1984. [12] О. В. Висков // Докл. АН СССР. 1978. Т. 239. С. 22–25. [13] О. В. Висков // Труды МИАН. 1986. Т. 177. С. 21–32. [14] О. В. Висков. Обобщенные функции и их применения в математической физике // Труды Межд. конф. АН СССР. Москва: ВЦ, 1981. С. 111–120. [15] A. K. Kwasnewski // Preprint № 5. Poland: Univ. Bialystok, 2000. [16] В. М. Максимов // Логико-алгебраические конструкции: Изд-во Калининского гос. ун-та, 1987. С. 61–65. [17] В. М. Максимов // Алгебраические и логические конструкции: Изд-во Калининского гос. ун-та, 1989. С. 72–77.

Институт информатики университета в Белостоке, Польша

Принято редколлегией
01.12.2000