Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Иншаков, Гомотопические группы пространств кривых на двумерных многообразиях., *УМН*, 1998, том 53, выпуск 2, 147–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm37>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 06:46:49

ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ГРУППЫ ПРОСТРАНСТВ КРИВЫХ НА ДВУМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

А. В. Иншаков

Построение инвариантов кривых на поверхностях требует знания топологии пространства иммерсий окружности в поверхность. Заметка посвящена описанию множества компонент связности и фундаментальной группы пространства иммерсий.

Пусть M^2 – (вещественная) поверхность, Ω – пространство C^1 -гладких иммерсий окружности S^1 (на которой мы предполагаем зафиксированной точку $\star$) в M^2 . Элементы пространства Ω мы будем называть *кривыми* (на поверхности M^2).

Обозначим через STM^2 пространство сферизованного касательного расслоения поверхности M^2 . На пространстве STM^2 существует естественная контактная структура. Пусть κ – кривая на M^2 . Через κ^s мы будем обозначать поднятие кривой κ до лежандрова узла в STM^2 . Зафиксируем точку $s_0 \in STM^2$ и ее проекцию m_0 на M^2 . Эти точки считаются отмеченными при вычислении соответствующих фундаментальных групп.

Пусть $\pi_1^{cb}(X)$ – это множество классов свободной гомотопической эквивалентности петель на пространстве X . Множество $\pi_1^{cb}(X)$ естественно изоморфно фактору группы $\pi_1(X)$ по действию самой на себе сопряжением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Полным индексом кривой κ назовем класс в $\pi_1^{cb}(STM^2)$ узла κ^s .

Пусть γ – некоторый элемент множества $\pi_1^{cb}(STM^2)$. Обозначим через Ω_γ множество всех кривых на поверхности M^2 , полный индекс которых равен γ .

ТЕОРЕМА 1. Для любого элемента $\gamma \in \pi_1^{cb}(STM^2)$ пространство Ω_γ непусто и связно.

Пусть $\Omega^{s_0} \subset \Omega$ – подпространство кривых, у которых отмеченная точка лежандровых поднятий совпадает с s_0 .

ЛЕММА 1. ([1, Theorem A]) Множество $\pi_0(\Omega^{s_0})$ естественно изоморфно множеству $\pi_1(STM^2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Непустота пространства Ω_γ непосредственно следует из леммы 1. Чтобы показать связность, надо две кривые, у которых лежандровы поднятия гомотопны, регулярно прогомоторить так, чтобы отмеченные точки их поднятий совпали с s_0 , а сами поднятия стали гомотопны друг другу при фиксированной отмеченной точке. После этого по лемме 1 полученные кривые регулярно гомотопны друг другу внутри пространства $\Omega^{s_0} \subset \Omega$. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что некоторый гомотопический класс петель на M^2 *ориентирующий* (дезориентирующий), если любая петля этого класса ориентирующая (дезориентирующая). Подмножество ориентирующих (дезориентирующих) классов множества $\pi_1^{cb}(M^2)$ будем обозначать $\pi_1^{cb,ор}(M^2)$ ($\pi_1^{cb,дезор}(M^2)$). Ориентирующий класс назовем *вторичным*, если, пройдя некоторую дезориентирующую петлю несколько раз, можно получить элемент этого класса. Подмножество вторичных классов множества $\pi_1^{cb,ор}(M^2)$ обозначим через $\pi_1^{cb,вт}(M^2)$. Пусть $\pi_1^{cb,невт}(M^2) = \pi_1^{cb,ор}(M^2) \setminus \pi_1^{cb,вт}(M^2)$.

ЛЕММА 2. Множество $\pi_1^{cb}(STM^2)$ при $M^2 \neq \mathbb{R}P^2, S^2$ естественно изоморфно множеству $(\pi_1^{cb,дезор}(M^2) \times \mathbb{Z}_2) \cup (\pi_1^{cb,вт}(M^2) \times (\mathbb{N} \cup \{0\})) \cup (\pi_1^{cb,невт}(M^2) \times \mathbb{Z}) \subset (\pi_1^{cb}(M^2) \times (\mathbb{Z} \cup \mathbb{Z}_2))$. Причем этот изоморфизм при ограничении на первый сомножитель соответствует проекции $STM^2 \rightarrow M^2$.

Далее через T^2 мы будем обозначать двумерный тор, через Kl – бутылку Клейна.

ТЕОРЕМА 2. Рассмотрим элемент $\gamma \in \pi_1^{cb}(STM^2)$. Обозначим через $r\gamma \in \pi_1^{cb}(M^2)$ его проекцию.

Пусть $r\gamma$ нетривиален и лежит в $\pi_1^{cb,невт}(M^2)$. Если $M^2 \neq T^2, Kl$, то $\pi_1(\Omega_\gamma) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, если же $M^2 = T^2$ или Kl , то $\pi_1(\Omega_\gamma) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Пусть $r\gamma$ нетривиален и лежит в $\pi_1^{\text{св,вт}}(M^2)$. Если $M^2 \neq T^2, Kl$, то $\pi_1(\Omega_\gamma) = \pi_1(Kl)$, если же $M^2 = T^2$ или Kl , то $\pi_1(\Omega_\gamma) = \pi_1(ST(Kl))$.

Если $r\gamma \in \pi_1^{\text{св,дезор}}(M^2)$, $M^2 \neq \mathbb{R}P^2$, то $\pi_1(\Omega_\gamma) = \mathbb{Z}$.

Пусть $r\gamma$ тривиален, $M^2 \neq S^2, \mathbb{R}P^2$. Если γ нетривиален, то $\pi_1(\Omega_\gamma) = \mathbb{Z} \times \pi_1^{\text{ор}}(M^2)$ (здесь через $\pi_1^{\text{ор}}(M^2)$ обозначена подгруппа всех ориентирующих элементов группы $\pi_1(M^2)$); в противном случае $\pi_1(\Omega_\gamma) = \pi_1(STM^2)$.

При $M^2 = S^2$ группа $\pi_1(\Omega_\gamma) = \mathbb{Z}_2$. При $M^2 = \mathbb{R}P^2$ группа $\pi_1(\Omega_\gamma) = \mathbb{Z}_4$.

Кроме того, при $M^2 \neq \mathbb{R}P^2, S^2$, Ω_γ является пространством типа $K(\pi, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Отметим точку в Ω_γ – некоторую кривую общего положения (то есть имеющую в качестве особенностей только точки простого самопересечения) κ_0 , такую, что $\kappa_0^s(\star) = s_0$. Пусть $\tilde{\gamma}$ – класс петли κ_0 в $\pi_1(STM^2, s_0)$. Пространство Ω_γ естественно расслоено над STM^2 отображением fp , которое сопоставляет кривой отмеченную точку ее лежандрова узла. При этом $fp(\kappa_0) = s_0$. Поэтому определен гомоморфизм $fp_* : \pi_1(\Omega_\gamma, \kappa_0) \rightarrow \pi_1(STM^2, s_0)$.

ЛЕММА 3. Гомоморфизм fp_* инъективен.

Доказательство вытекает из того, что по [1, Theorem C] $\pi_1(\Omega^{s_0}) = \pi_2(STM^2)$ и $\pi_2(STM^2) = 0$.

ЛЕММА 4. Образ мономорфизма fp_* состоит из всех элементов группы $\pi_1(STM^2)$, коммутирующих с $\tilde{\gamma}$.

Легко показать, что все элементы из образа мономорфизма fp_* коммутируют с $\tilde{\gamma}$. Далее можно найти все элементы группы $\pi_1(STM^2)$, коммутирующие с $\tilde{\gamma}$, и проверить, что все они реализуются петлями на пространстве Ω_γ . При этом используется следующая лемма.

ЛЕММА 5. Пусть $\delta \in \pi_1(M^2)$ – некоторый нетривиальный элемент ($M^2 \neq S^2, \mathbb{R}P^2, T^2, Kl$). Тогда $\exists n \in \mathbb{N}$, $\theta \in \pi_1(M^2) : \theta^n = \delta$, и $\forall k \geq n \forall \theta \in \pi_1(M^2)$ ($\theta \neq \theta$) выполняется $\theta^k \neq \delta$. Все коммутирующие с δ элементы являются степенями элемента θ .

По [1, Theorem C] $\pi_k(\Omega^{s_0}) = \pi_{k+1}(STM^2)$. Но $\pi_{k+1}(STM^2) = 0$, если $M^2 \neq S^2, \mathbb{R}P^2$. Рассмотрев точную гомотопическую последовательность расслоения $fp : \Omega_\gamma \rightarrow STM^2$ в старших членах, можно получить, что $\pi_k(\Omega_\gamma) = 0$ при $k > 1$. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем элемент $\alpha \in \pi_1(\Omega_\gamma, \kappa_0)$ простым для кривой κ_0 , если можно выбрать такую регулярную гомотопию кривой κ_0 , имеющую тип α , что при проведении этой гомотопии кривая в каждый момент остается кривой общего положения.

Примерами таких регулярных гомотопий являются перепараметризация кривой и обнос маленькой стягиваемой кривой вдоль представителя какого-либо ориентирующего элемента группы $\pi_1(M^2)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Операция “прогон петли” вдоль ориентирующей кривой состоит из “рождения” пары противоположно направленных петель, прогона одной из рожденных петель по кривой, “смерти” получившейся пары петель.

ЛЕММА 6. Для любого элемента $\gamma \in \pi_1^{\text{св}}(STM^2)$ можно выбрать кривую $\kappa_0 \in \Omega_\gamma$ таким образом, что фактор группы $\pi_1(\Omega_\gamma, \kappa_0)$ по подгруппе, порожденной простыми элементами и “прогоном петли”, будет конечен.

Автор выражает благодарность В. И. Арнольду за постановку задачи и С. М. Гусейн-Заде за продолжительные обсуждения. В. Чернов [2] независимо получил близкие результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Smale S. Regular curves on Riemannian manifolds // Transactions of AMS 1958. V. 87. P. 492–512. [2] Tchernov V. Arnold-type invariants of curves on surfaces and homotopic groups of the space of curves. Preprint: Uppsala University, 1997.

E-mail: ainsh@ium.ips.ras.ru

Принято редколлегией
22.01.1998