Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

У. А. Розиков, Периодические гиббсовские меры неоднородной модели Изинга на деревьях, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 1, 175–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm371>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 17:45:52

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ГИББСОВСКИЕ МЕРЫ НЕОДНОРОДНОЙ МОДЕЛИ ИЗИНГА НА ДЕРЕВЬЯХ

У. А. Розиков

Деревом называется связный граф, не содержащий циклов. Одним из частных случаев дерева является дерево Кэли, т.е. дерево, из каждой вершины которого выходит ровно $k + 1$ ребро (дерево Кэли порядка $k \geq 1$). На дереве Кэли изучены модели статистической механики, и для них описаны множества периодических гиббсовских мер, а также изучены траектории случайного блуждания в случайной среде [1]–[4].

Для изучения этих задач используется групповое представление дерева Кэли [1], в этом случае задачи формулируются достаточно просто на языке группы, которая представляет дерево Кэли.

Заметим, что деревья Кэли и только они представимы как группа.

Пусть Γ – бесконечное дерево, т.е. граф без циклов. Предположим, что из каждой точки $x \in \Gamma$ выходит не менее 1 и не более $k_\Gamma < +\infty$ ребер.

Обозначим через V множество вершин и через L множество ребер дерева Γ .

Для $x, y \in V$ мы будем писать $x \leq y$, если x находится на кратчайшем пути, соединяющем x^0 и y ; будем писать $x < y$, если $x \leq y$ и $x \neq y$. Если $x \leq y$ и $|y| = |x| + 1$, тогда будем писать $x \rightarrow y$. Точку x^0 назовем корнем дерева Γ .

Обозначим

$$S(x) = \{y \in V : x \rightarrow y\}.$$

Пусть даны натуральные числа:

$$\begin{aligned} \alpha_1; \alpha_{1i_1}, i_1 = 1, 2, \dots, \alpha_1; \alpha_{1i_1i_2}, i_2 = 1, 2, \dots, \alpha_{1i_1}; \\ \dots; \alpha_{1i_1i_2\dots i_n}, i_n = 1, 2, \dots, \alpha_{1i_1i_2\dots i_{n-1}}; \dots \end{aligned}$$

Обозначим через A множество таких чисел. Пусть

$$\begin{aligned} K_A = \{(i_0, i_1, i_2, \dots, i_n) : i_0 = 1; i_1 = 1, 2, \dots, \alpha_1; \\ i_2 = 1, 2, \dots, \alpha_{1i_1}; \dots; i_n = 1, 2, \dots, \alpha_{1i_1i_2\dots i_{n-1}}; n \geq 0\}. \end{aligned}$$

Пусть B – множество всевозможных A и Λ – множество всевозможных деревьев Γ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Существует взаимнооднозначное соответствие F между элементами Λ и B .*

Обозначим через $A(\Gamma)$ множество вида A , соответствующее дереву Γ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Для любого дерева Γ существует взаимнооднозначное соответствие между элементами множества $K_{A(\Gamma)}$ и множеством вершин V дерева Γ .*

Таким образом, любое дерево Γ мы можем представить как множество вида $K_{A(\Gamma)}$.

Пусть $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots\}$ – некоторое разбиение множества $K = K_{A(\Gamma)}$ на классы и $h: K \rightarrow \mathbb{R}$ – произвольное отображение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Отображение h назовем ξ -периодическим, если $h_x = h_i$ для любого $x \in \xi_i, i = 1, 2, \dots$.

Пусть $x \in \Gamma$ и ему соответствует $(1, i_1, i_2, \dots, i_n) \in K$, тогда, очевидно, $|x| = n$. Пусть $\omega_x(j)$ – число j , участвующих в записи $x = 1, i_1, i_2, \dots, i_{|x|}, j \leq k_\Gamma$. Для любого $B \subseteq N_\Gamma = \{1, 2, \dots, k_\Gamma\}$ строим следующее разбиение: $\xi_B = \{\xi_1, \xi_2\}$, где $\xi_1 = \{x \in K : \sum_{j \in B} \omega_x(j) \text{ четно}\}$, $\xi_2 = \{x \in K : \sum_{j \in B} \omega_x(j) \text{ нечетно}\}$.

Пусть K – представление дерева Γ . Обозначим

$$W_n = \{x \in K : |x| = n\}, \quad V_n = \{x \in K : |x| \leq n\}, \quad L_n = \{l = \langle x, y \rangle \in L : x, y \in V_n\}.$$

Гамильтониан модели Изинга (неоднородной) на дереве Γ имеет вид:

$$H(\sigma) = - \sum_{\langle x, y \rangle \in L} J_{xy} \sigma(x) \sigma(y),$$

где $J_{xy} \in \mathbb{R}_+, \sigma(x) \in \{-1, 1\}$ для любого $x, y \in K$.

Положим

$$\Xi = \left\{ h = (h_x, x \in K) : h_x = \sum_{y \in S(x)} f(h_y; \theta_{xy}) \right\},$$

где $f(x; \theta) = \operatorname{arctg}(\theta \tanh x)$, $\theta_{xy} = \tanh\left(\frac{J_{xy}}{T}\right)$, $T > 0$. Известно, что каждому $h \in \Xi$ соответствует, и притом единственная, мера Гиббса μ на $\Omega = \{-1, 1\}^K$.

Таким образом, задача описания предельных гиббсовских мер сводится к описанию элементов множества Ξ . Описание произвольного элемента Ξ – сложная проблема. В данной работе мы ограничимся описанием ξ_{N_Γ} -периодических элементов Ξ .

Для описания ξ_{N_Γ} -периодических гиббсовских мер, т.е. описанию функции h_x , $x \in K$, вида:

$$h_x = \begin{cases} h_1, & \text{если } |x| \text{ четно,} \\ h_2, & \text{если } |x| \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Для h_1, h_2 в случае $x = 1$ получим систему уравнений

$$\begin{cases} h_1 = \sum_{i=1}^{\alpha_1} f(h_2; \theta_{1,1,i}), & (*) \\ h_2 = \sum_{j=1}^{\alpha_{1i}} f(h_1; \theta_{1,i,1,i,j}). & (*) \end{cases} \quad (1)$$

Пусть выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{\alpha_1} \left(\theta_{1,1,i} \sum_{j=1}^{\alpha_{1i}} \theta_{1,i,1,i,j} \right) \geq 1. \quad (2)$$

Для любого $i = 1, 2, \dots, \alpha_1$ предположим выполнение следующих равенств:

$$\sum_{j=1}^{\alpha_{1i}} f(h_1^*; \theta_{1,i,1,i,j}) = \sum_{j=1}^{\alpha_{11}} f(h_1^*; \theta_{1,1,1,1,j}), \quad (3)$$

где h_1^* – решение уравнения, полученного при подстановлении уравнения (*) в (*).

Таким образом, если выполняются соотношения (2) и (3), то система уравнений (1) имеет три решения:

$$h^0 = (0; 0), \quad h^\pm = (\pm h_1^*, \pm h_2^*), \quad \text{где } h_2^* = \sum_{j=1}^{\alpha_{11}} f(h_1^*; \theta_{1,1,1,1,j}).$$

Для того чтобы функция

$$\pm h_x = \begin{cases} \pm h_1^*, & \text{если } |x| \text{ четно,} \\ \pm h_2^*, & \text{если } |x| \text{ нечетно,} \end{cases}$$

удовлетворяла условию согласования, необходимо и достаточно выполнение условий (условие на параметры θ_{xy})

$$\begin{cases} h_1^* = \sum_{y \in S(x)} f(h_2^*; \theta_{xy}), \\ h_2^* = \sum_{z \in S(y)} f(h_1^*; \theta_{yz}) \end{cases} \quad (4)$$

для $x \in K \setminus \{1; 1, i\}$, $i = 1, 2, \dots, \alpha$.

ТЕОРЕМА. Если параметры θ_{xy} , $x, y \in K$, удовлетворяют условиям (2)–(4), тогда для неоднородной модели Изинга на дереве Γ с представлением K существуют три ξ_{N_Γ} -периодические меры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. Н. Ганиходжаев // Докл. АН РУз. 1994. №4. С. 3–5. [2] Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков // ТМФ. 1997. Т. 111. №1. С. 109–117. [3] У. А. Розиков // ТМФ. 1997. Т. 112. №1. С. 170–175. [4] Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков // Матем. сб. 1999. Т. 190. №2. С. 31–42.

Принято редколлегией
01.12.2000