Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Ружанский, Оценки для интегральных операторов Фурье с комплекснозначными фазовыми функциями, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 1, 177–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm372>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 17:16:46

ОЦЕНКИ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ФУРЬЕ С КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫМИ ФАЗОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ

М. В. Ружанский

В статье даются точные L^p -оценки для интегральных операторов Фурье с комплекснозначными фазовыми функциями. Приведенные результаты влекут известные L^p -свойства интегральных операторов Фурье с вещественными фазовыми функциями, полученные в [1]. Они также содержат результаты [2] о том, что интегральные операторы Фурье нулевого порядка с комплекснозначными фазовыми функциями непрерывны в L^2 . Несколько иной подход к непрерывности в L^2 разработан в [3] и [4].

Для вещественного многообразия M через $\widetilde{M}$ мы будем обозначать его комплексификацию. Заметим, что свойство аналитичности здесь не требуется, достаточно брать почти аналитические расширения (см. [5] или [3] для технических подробностей). Пусть X и Y — гладкие n -мерные многообразия. Через $C \subset (T^*X \setminus 0) \times (T^*Y \setminus 0)$ обозначим комплексное положительное однородное каноническое соотношение. Примем терминологию [5] и [3], хотя заметим, что для нас будет существенно определение в терминах производящей фазовой функции, приведенное ниже. Через $T \in I^\mu(X \times Y, C')$ обозначим интегральный оператор Фурье порядка μ . Это означает, что с точностью до гладких членов T является интегральным оператором с ядром

$$A(x, y) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\Phi(x, y, \theta)} a(x, y, \theta) d\theta, \quad (1)$$

где a — символ порядка $\mu + (n - N)/2$ и Φ — гладкая невырожденная фазовая функция положительного типа. Под символьным классом S^m мы будем понимать класс $S_{1,0}^m$. В общем, $a(x, y, \theta) \in S_{\rho, 1-\rho}^m$, $1/2 \leq \rho \leq 1$, означает, что это гладкая функция, удовлетворяющая

$$|\partial_{x,y}^\alpha \partial_\theta^\beta a| \leq C_{\alpha\beta} (1 + |\theta|)^{m - \rho|\beta| + (1-\rho)|\alpha|}.$$

Рассматривая разбиения единицы, мы можем предполагать, что функция a в (1) имеет компактный носитель по x и y . Описанные операторы были введены и впервые изучены в [6], [2], и их основные свойства можно найти в [5] или [3]. Напомним, что для канонического множества $V \subset \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ гладкая в V функция $\Phi = \Phi(x, y, \theta)$ называется невырожденной фазовой функцией положительного типа, если

- (а) Φ не имеет критических точек;
- (б) Φ положительно однородна по θ ;
- (с) векторы $d(\partial\Phi/\partial\theta_1), \dots, d(\partial\Phi/\partial\theta_N)$ линейно независимы над $\mathbb{C}$ на множестве $\{(x, y, \theta) \in V : \Phi'_\theta = 0\}$;
- (д) $\text{Im } \Phi(x, y, \theta) \geq 0$ в V .

Волновые фронты соответствующих операторов T будут положительными лагранжевыми многообразиями в $T^*(\widetilde{X \times Y})$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $C \subset (T^*X \setminus 0) \times (T^*Y \setminus 0)$ — гладкое положительное однородное каноническое соотношение, замкнутое в $T^*(\widetilde{X \times Y}) \setminus 0$. Предположим, что стандартные проекции из C в $T^*\widetilde{X} \setminus 0$ и $T^*\widetilde{Y} \setminus 0$ комплексно диффеоморфны. Пусть $\mu = -(n-1)|1/p - 1/2|$ и $1 < p < \infty$. Тогда операторы из $I^\mu(X \times Y, C')$ непрерывны из $L_{\text{comp}}^p(Y)$ в $L_{\text{loc}}^p(X)$.

Результат теоремы 1 точен, если, например, $\text{Im } \Phi = 0$ и оператор T эллиптический. В этом случае T не непрерывен в L^p , если $\mu > -(n-1)|1/p - 1/2|$ (см. [1] и обзорную статью [7] для случая вещественных фазовых функций).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условие, что проекции комплексно диффеоморфны, можно существенно ослабить. Во-первых, по теореме о производящей функции всегда можно предположить, что $N = n$. Тогда утверждение теоремы 1 остается справедливым, если вместо условия на проекции предположить, что существует $\lambda \in \mathbb{C}$ такое, что

$$\det \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} (\text{Re } \Phi + \lambda \text{Im } \Phi)(x, y, \theta) \neq 0 \quad (2)$$

для всех (x, y, θ) в носителе символа a в (1).

В других функциональных пространствах имеем:

ТЕОРЕМА 3. Пусть условия теоремы 1 или условия (2) на C выполнены. Возьмем $T \in I^0(X \times Y, C')$. Тогда

- (i) T непрерывен из $(L^p_{\alpha+(n-1)/|1/p-1/2|})_{\text{comp}}(Y)$ в $(L^p_{\alpha})_{\text{loc}}(X)$ для любых $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$;
- (ii) T непрерывен из $\text{Lip}(\alpha + (n-1)/2)_{\text{comp}}(Y)$ в $\text{Lip}(\alpha)_{\text{loc}}(X)$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$;
- (iii) T непрерывен из $(L^2_{\alpha+n(1/2-1/q)})_{\text{comp}}(Y)$ в $(L^q_{\alpha})_{\text{loc}}(X)$ для любых $\alpha \in \mathbb{R}$ и $2 \leq q$.

Теорема 1 получается методом комплексной интерполяции между L^2 -непрерывностью операторов нулевого порядка и следующим результатом, в котором H^1 означает пространство Харди первого порядка.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $C \subset (T^*X \setminus 0) \times (T^*X \setminus \tilde{0})$ – гладкое положительное однородное каноническое соотношение, удовлетворяющее условиям теоремы 1. Пусть $T \in I^{-(n-1)/2}(X \times Y, C')$ – интегральный оператор Фурье с ядром (1). Тогда T непрерывен из H^1 в L^1 .

Как и в замечании 2, в теореме 4 условие диффеоморфности проекций можно заменить на условие (2).

Одним из приложений полученных результатов являются поточечные по времени L^p -оценки для решений псевдодифференциальной задачи Коши следующего типа. Пусть $A = A(x, D_x)$ – эллиптический псевдодифференциальный оператор первого порядка в пространстве полуплотностей на X , $D_x = -i\partial_x$. Предположим, что принципиальный символ σ_A оператора A вещественный и неотрицательный. Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} D_t v + A(x, D_x) v = 0, \\ v(0, x) = f(x). \end{cases} \quad (3)$$

В [8] показано, что фундаментальное решение для поставленной задачи Коши дается интегральным оператором Фурье с комплекснозначной фазовой функцией. Для этой фазовой функции выполняются условия теоремы 1. Поэтому получаем:

ТЕОРЕМА 5. Пусть $1 < p < \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$, и пусть функция $f \in L^p_{\alpha+(n-1)|1/p-1/2|}$ имеет компактный носитель. Тогда для каждого значения t решение v задачи Коши (3) удовлетворяет $v(t, \cdot) \in L^p_{\alpha}$. Кроме того, для каждого $T > 0$ существует константа C_T такая, что выполнено

$$\|v(t, \cdot)\|_{L^p_{\alpha}} \leq C_T \|f\|_{L^p_{\alpha+(n-1)|1/p-1/2|}}, \quad t \in [-T, T].$$

В соответствии с теоремой 3 получаем оценки в других функциональных пространствах. Результат находит также применения в некоторых граничных задачах, в задаче с косой производной и в проблемах характеристики проекций на ядро и коядро псевдодифференциальных операторов с неинволютивной характеристикой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Seeger, C. D. Sogge, T. M. Stein // Ann. of Math. (2). 1991. V. 134. P. 231–251.
- [2] A. Melin, J. Sjöstrand // Comm. Partial Differential Equations. 1976. V. 1. P. 313–400.
- [3] Л. Хёрмандер. Анализ линейных дифференциальных операторов частными производными. Т. II, IV. М.: Мир, 1968–1988. [4] L. Hörmander // Ark. Mat. 1983. V. 21. P. 283–307.
- [5] Ю. В. Егоров // Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Фунд. напр. Т. 33. М.: ВИНТИ, 1988. [6] A. Melin, J. Sjöstrand // Lecture Notes in Math. 1975. V. 459. P. 120–223.
- [7] М. В. Ружанский // УМН. 2000. Т. 55. № 1. С. 99–170. [8] A. Laptev, Yu. Safarov, D. Vassiliev // Comm. Pure Appl. Math. 1994. V. 47. P. 1411–1456.