Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Е. Скурихин, Когомологии и размерность квазиупорядоченных множеств,
УМН, 2001, том 56, выпуск 1, 179–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm373>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 13:08:40

КОГОМОЛОГИИ И РАЗМЕРНОСТЬ КВАЗИУПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ

Е. Е. Скурихин

Целью работы является доказательство изоморфности кохомологий Александрова–Чеха и Гротендика для предпучков множеств на топологизированной категории, удовлетворяющих условию типа паракомпактности. Частными случаями формулируемых результатов являются теоремы об изоморфизме обычных, а также нормальных кохомологий Александрова–Чеха и Гротендика топологических пространств [1]–[3] и соответствующий результат о равномерных пространствах.

Показывается, что ограничения на размерность d_τ влекут обращение в нуль кохомологий Гротендика. При этом размерность d_τ определяется по аналогии с размерностью Лебега топологических пространств и размерностью Исебелла равномерных пространств, которые, как и нормальная размерность, являются частными случаями d_τ . В качестве следствий получаются результаты об обращении в 0 пучковых кохомологий на конечномерных топологических и равномерных пространствах.

Обозначения и термины содержатся в работах [4], [5]. Пусть (K, τ) – сайт, $U \in \text{Ob}(\widehat{K})$. Полагаем $0 = 0_U = [\emptyset]_\tau^U$. Если не оговорено противное, то через λ обозначается каноническая топология на $K_{U, \tau}$, так что $\alpha = \{U_i \in K_U \mid i \in I\} \in \lambda(U) \Leftrightarrow \alpha \in \tau(U)$ и все U_i τ -замкнуты в U .

Будем говорить, что выполняется условие $(*)$ (соответственно $(**)$), если $\forall \alpha = \{U_i \in K_{U, \tau} \mid i \in I\} \in \tau(U) \exists \gamma' = \{C'_j \in (K_{U, \tau})^0 \mid j \in J\}$ – такое τ -локально конечное в U семейство, что $\bigvee \{C'_j \mid j \in J\} = 0'$, и $\forall j \in J \exists i \in I: U_i \supset^\tau C'_j$ в U (соответственно, если выполняется условие $(*)$ и в α вписывается τ -локально конечное в U τ -покрытие).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть (K, τ) – сайт, $U \in \text{Ob}(\widehat{K})$, $\mathcal{B}$ – абелев предпучок на $\widehat{K}$. Напомним, что $\check{H}_\tau^n(U, \mathcal{B}) = \text{colim}\{H^n(\alpha, \mathcal{B}) \mid \alpha = \{f_i: D_i \rightarrow U \mid i \in I\} \in \tau(U)\}$, где $(f_i: D_i \rightarrow U) \in \text{Hom}_{\widehat{K}}(D_i, U)$, $H^n(\alpha, \mathcal{B})$ вычисляется через коцепи Александрова–Чеха, а равенство $\alpha = \{f_i: D_i \rightarrow U \mid i \in I\} \in \tau(U)$ означает, что $\bigcup \{f_i(D_i) \mid i \in I\}$ τ -плотно в U . В частности, если $\mathcal{A} \in \mathcal{P}_K$, $\widehat{\mathcal{A}}$ – предпучок на $K_{U, \tau}$, задаваемый равенством $\widehat{\mathcal{A}}(E) = \text{Hom}_{\widehat{K}}(E, \mathcal{A})$, то $\check{H}_\lambda^n(U, \widehat{\mathcal{A}}) = \text{colim}\{H^n(\alpha, \widehat{\mathcal{A}}) \mid \alpha \in \lambda(U)\}$.

Если $\mathcal{A} \in \mathcal{P}_K$, $\widehat{\mathcal{A}}$ – предпучок на $\widehat{K}$, задаваемый равенством $\widehat{\mathcal{A}}(D) = \text{Hom}_{\widehat{K}}(D, \mathcal{A})$, то в тех случаях, когда это не приводит к недоразумениям, пишем $H^n(\alpha, \mathcal{A})$ вместо $H^n(\alpha, \widehat{\mathcal{A}})$ и обозначаем $\check{H}_\lambda^n(U, \mathcal{A}) = \text{colim}\{H^n(\alpha, \mathcal{A}^{0'}) \mid \alpha = \{U_i \in K_U \mid i \in I\} \in \tau(U)\}$.

ЛЕММА 2. Пусть (K, τ) – сайт, $U \in \text{Ob}(\widehat{K})$. Тогда

- 1) $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{S}_\tau, \check{H}_\lambda^n(U, \mathcal{A}) = \check{H}_\lambda^n(U, \widehat{\mathcal{A}})$;
- 2) если K квазиупорядоченное множество, то
 - a) $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{S}_\tau \quad H_\tau^n(U, \mathcal{A}) = H_\lambda^n(U, \widehat{\mathcal{A}})$;
 - b) $\forall \mathcal{B}$ – абелева предпучка на $\widehat{K} \quad \check{H}_\tau^n(U, \mathcal{B}) = \text{colim}\{H^n(\alpha, \mathcal{B}) \mid \alpha = \{U_i \in K_U \mid i \in I\} \in \tau(U)\}$;
 - c) $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{P}_K \quad \check{H}_\lambda^n(U, \mathcal{A}) = \check{H}_\tau^n(U, \widehat{\mathcal{C}})$, где $\mathcal{C} = \mathcal{A}^{0'}$, и $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{S}_\tau \quad \check{H}_\lambda^n(U, \mathcal{A}) = \check{H}_\lambda^n(U, \widehat{\mathcal{A}})$.

ЛЕММА 3. Пусть (K, τ) – сайт, $U \in \text{Ob}(\widehat{K})$ и выполняется условие $(*)$.

- 1) Пусть $\mathcal{B}$ – U - τ -локально нулевой предпучок на K_U , т.е. $\forall V \in K_U, \forall s \in \mathcal{B}(V), \exists \{T_i \in K_U \mid i \in I\} \in \tau(V): s|_{T_i} = 0 \forall i \in I, \delta = \{W_i \in K_U \mid i \in I\} \in \tau(U)$ – τ -локально конечно в $U, c \in C^n(\delta, \mathcal{A})$, т.е. $c = \{c_s \in \mathcal{B}(W_s) \mid s \in I^{n+1}\}, W_s = \bigcap \{W_i \mid i \in s\}$, и предположим, что $\forall s \in I^{n+1}, \forall A \subset W_s$ из того, что $[A]_\tau = 0_U$, следует, что $c_s|_A = 0$. Тогда $\exists \varepsilon \in \tau(U)$ и отображение φ вписывания ε в δ , такие, что $\varphi^*c = 0$.
- 2) Пусть $\mathcal{B}$ – λ -нулевой предпучок на $K_{U, \tau}$, т.е. $\forall V \in K_{U, \tau}, \forall s \in \mathcal{B}(V), \exists \{T_i \in K_{U, \tau} \mid i \in I\} \in \tau(V): s|_{T_i} = 0 \forall i \in I$. Пусть $\alpha = \{U_i \in K_{U, \tau} \mid i \in I\} \in \tau(U)$ – τ -локально

конечно в U , $c \in C^n(\alpha, \mathcal{A})$, т.е. $c = \{c_s \in \mathcal{B}(U_s) \mid s \in I^{n+1}\}$, $U_s = \bigcap \{U_i \mid i \in s\}$, и предположим, что $\forall s \in I^{n+1} c_s|_{0_U} = 0$. Тогда $\exists \varepsilon \in \lambda(U)$ и отображение φ вписывания ε в δ , такие, что $\varphi^*c = 0$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть (K, τ) – сайт, $U \in \text{Ob}(\widehat{K})$ и выполняется условие (**). Тогда

- 1) $\forall \mathcal{B}$ – λ -пучка на $K_{U, \tau}$, $\forall n \geq 0$ $H_\lambda^n(U, \mathcal{B}) = \check{H}_\lambda^n(U, \mathcal{B})$;
- 2) $\forall u: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ – λ -изоморфизма предпучков на $K_{U, \tau}$ таких, что $\mathcal{A}(0_U) = \mathcal{B}(0_U) = 0$, $\forall n \geq 0$ $\check{H}_\lambda^n(U, \mathcal{A}) \rightarrow \check{H}_\lambda^n(U, \mathcal{B})$ является изоморфизмом;
- 3) если K квазиупорядоченное множество, то
 - a) $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{S}_\tau$, $\forall n \geq 0$ $\check{H}_\tau^n(U, \widehat{\mathcal{A}}) = \check{H}_\lambda^n(U, \mathcal{A}) = H_\lambda^n(U, \widehat{\mathcal{A}}) = H_\tau^n(U, \mathcal{A})$;
 - b) если $A \in K_U$ и $\forall \mathcal{F} \in \mathcal{S}_\tau$ – инъективно, $\forall k \geq 1$ $H_\tau^k(U, \mathcal{F}_{A'}) = 0$ и $\mathcal{F}$ – U -($0'$, A')-мягок, то $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{S}_\tau$ $\text{colim}\{H_\tau^n(V, \mathcal{A}) \mid V \supset A' \text{ в } U\} = \check{H}_\lambda^n(U, \mathcal{A}_{A'})$ при $n \geq 0$; если при этом $U \in K_1$, то перечисленные условия на инъективные пучки могут быть опущены, так как они следуют из (**).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть (K, τ) – сайт, $U \in \text{Ob}(\widehat{K})$, $A \in \widehat{K}_{U, \tau}$. A' -кратностью семейства $\alpha = \{U_i \in K_U \mid i \in I\}$ назовем наибольшее число m , удовлетворяющее условию: $\forall \sigma \subset I$ из того, что мощность σ больше m , следует, что $\bigcap \{U_i \mid i \in \sigma\} \subset A$. Кратностью $\alpha = \{U_i \in K_U \mid i \in I\}$ назовем $0'_U$ -кратность. Положим $d_\tau U \leq m \Leftrightarrow$ в любое τ -покрытие U можно вписать τ -покрытие U кратности $\leq m+1$, и $d_\tau^U A' \leq m \Leftrightarrow$ в любое τ -покрытие U можно вписать τ -покрытие U A' -кратности $\leq m+1$. Очевидно, $d_\tau^U 0' = d_\tau U$.

Пункты 1) и 2) нижеследующей леммы доказываются непосредственно, а 3) получается из рассуждений работы Серра [6].

ЛЕММА 6. Пусть (K, τ) – сайт, $U \in \text{Ob}(\widehat{K})$, $A \in \widehat{K}_{U, \tau}$.

- 1) A' -кратность $\alpha = \{U_i \in K_U \mid i \in I\}$ равна A' -кратности $[\alpha] = \{[U_i]_\tau^U \in K_{U, \tau} \mid i \in I\}$;
- 2) $d_\tau^U A' = d_\lambda^U A'$, в частности, $d_\tau U = d_\lambda U$;
- 3) $\forall \alpha = \{U_i \in K_U \mid i \in I\}$ A' -кратности $\leq m+1$, $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{P}_K$ $H^n(\alpha, \mathcal{A}_{A'}) = 0$ при $n > m$. В частности, $\forall \alpha = \{U_i \in K_U \mid i \in I\}$ кратности $\leq m+1$, $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{P}_K$ такого, что $\mathcal{A}^0 = 0$, $H^n(\alpha, \mathcal{A}) = 0$ при $n > m$.

Комбинируя сформулированные выше результаты, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 7. Пусть (K, τ) – сайт, $U \in \text{Ob}(\widehat{K})$, $A \in \widehat{K}_{U, \tau}$. Тогда:

- 1) Если $d_\tau^U A' \leq m$, то $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{P}_K$ $\check{H}_\lambda^n(U, \mathcal{A}_{A'}) = 0$, а если $\mathcal{A}^A = 0$, то $\check{H}_\lambda^n(U, \widehat{\mathcal{A}}) = 0$ при $n > m$. В частности, $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{S}_\tau$, $\forall n > m$ $\check{H}_\lambda^n(U, \mathcal{A}_{A'}) = 0$.
- 2) Если $d_\tau U \leq m$, $\mathcal{A} \in \mathcal{P}_K$, то $\check{H}_\lambda^n(U, \mathcal{A}) = 0$, а если $\mathcal{A}^0 = 0$, то $\check{H}_\lambda^n(U, \widehat{\mathcal{A}}) = 0$ при $n > m$.
- 3) Пусть K – квазиупорядоченное множество и выполняется условие (**).
 - a) Если $d_\tau^U A' \leq m$, то $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{S}_\tau$ $H_\lambda^n(U, \mathcal{A}_{A'}) = H_\tau^n(U, \mathcal{A}_{A'}) = 0$ при $n > m$. Если при этом $U \in K_1$, то $\text{colim}\{H_\tau^n(V, \mathcal{A}) \mid V \supset A' \text{ в } U\} = 0$ при $n > m$.
 - b) Если $d_\tau U \leq m$, то $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{S}_\tau$ $H_\lambda^n(U, \mathcal{A}) = H_\tau^n(U, \mathcal{A}) = 0$ при $n > m$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. Годеман. Гомологическая алгебра и теория пучков. М.: ИЛ, 1961. [2] Е. Е. Скурихин // УМН. 1980. Т. 35. № 3. С. 224–226. [3] Е. Е. Скурихин. Пучковые когомологии и полные брауэровы решетки. Владивосток: Дальнаука, 1993. [4] Е. Е. Скурихин // УМН. 1998. Т. 53. № 6. С. 263–264. [5] Е. Е. Скурихин // УМН. 1999. Т. 54. № 2. С. 187–188. [6] J.-P. Serre // Ann. of Math. 1955. Т. 61. С. 197–278.