Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Спиридонов, Об эллиптической бета-функции, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 1, 181–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm374>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 17:14:18

ОБ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ БЕТА-ФУНКЦИИ

В. П. Спиридонов

Бета-функция $\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta)$, $\operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Re} \beta > 0$, и ее различные q -аналоги играют важную роль в теории ортогональных полиномов и биортогональных рациональных функций (БРФ). В частности, в [1] вычислен q -бета-интеграл, эквивалентный условию нормировки непрерывной весовой функции некоторого семейства БРФ, выражающегося через q -гипергеометрические ряды [2]. Конечномерный класс таких БРФ с дискретной мерой был рассмотрен в [3]. Недавно в [4] были построены эллиптические аналоги БРФ Вильсона. В настоящей заметке доказывается эллиптическое обобщение q -бета-интеграла работ [1], [2], предложенное в [5].

Пусть $p, q \in \mathbb{C}$ и $|p| \leq |q| < 1$. Обозначим

$$(a; p)_{\infty} = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - ap^n), \quad (a; p)_s = \frac{(a; p)_{\infty}}{(ap^s; p)_{\infty}}, \quad (a_1, \dots, a_k; p)_{\infty} = (a_1; p)_{\infty} \cdots (a_k; p)_{\infty}.$$

Определим тэта-функцию Якоби как $\theta(z; p) = (z, pz^{-1}; p)_{\infty}$. Она обладает свойствами $\theta(pz; p) = \theta(z^{-1}; p) = -z^{-1}\theta(z; p)$. Эллиптическая гамма-функция $\Gamma(z; p, q)$ определяется с помощью двойных бесконечных произведений [6]:

$$\Gamma(z; p, q) = \prod_{j,k=0}^{\infty} \frac{1 - z^{-1}p^{j+1}q^{k+1}}{1 - zp^jq^k}, \quad \Gamma(z; 0, q) = \frac{1}{(z; q)_{\infty}}. \quad (1)$$

Она удовлетворяет уравнениям $\Gamma(qz; p, q) = \theta(z; p)\Gamma(z; p, q)$, $\Gamma(pz; p, q) = \theta(z; q)\Gamma(z; p, q)$, которые в определенных пределах сводятся к уравнению для стандартной гамма-функции. Обозначим как $\theta(a_1, \dots, a_k; p)$ и $\Gamma(a_1, \dots, a_k; p, q)$ произведения тэта- и гамма-функций от аргументов $a_1, \dots, a_k$ соответственно.

ТЕОРЕМА 1. *Эллиптическое расширение контурного q -бета-интеграла работ [1], [2], или эллиптическая бета-функция, имеет вид*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_T \Delta(z) \frac{dz}{z} = \frac{2 \prod_{0 \leq m < s \leq 4} \Gamma(t_m t_s; p, q)}{(q; q)_{\infty} (p; p)_{\infty} \prod_{m=0}^4 \Gamma(At_m^{-1}; p, q)}, \quad (2)$$

где $A = \prod_{m=0}^4 t_m$ и

$$\Delta(z) = \frac{\prod_{m=0}^4 \Gamma(z t_m, z^{-1} t_m; p, q)}{\Gamma(z^2, z^{-2}, zA, z^{-1}A; p, q)}. \quad (3)$$

Здесь T обозначает единичную окружность на $\mathbb{C}$, ориентированную против часовой стрелки, а комплексные параметры $t_m \in \mathcal{D}$, где область $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^5$ определяется условиями $|t_m| < 1$, $|pq| < |A|$.

Для доказательства (2) воспользуемся методом функциональных уравнений, примененным в [7] для вычисления q -бета-интеграла [1], [2], получающегося из (2) при $p = 0$. Для общего положения параметров p, q и t_m функция $\Delta(z)$ содержит внутри T только простые полюсы, находящиеся в точках $\pm p^{(j+1)/2} q^{(k+1)/2}$, $t_m p^j q^k$, $A^{-1} p^{j+1} q^{k+1}$ при $j, k \in \mathbb{N}$. Аналитичность $\Delta(z)$ позволяет заменить T на любой контур C , охватывающий тот же параметрический набор полюсов. При этом значение интеграла не меняется, даже если часть указанных полюсов будет лежать вне T . Обозначим через $f_{l,r}(t_0, t_1)$ левую и правую части (2) как функции выделенных параметров t_0, t_1 .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-01-00299).

ТЕОРЕМА 2. Функции $f_{l,r}(t_0, t_1)$ удовлетворяют q -разностному уравнению

$$t_1 \theta(t_1 A, t_1^{-1} A; p) f_{l,r}(qt_0, t_1) - t_0 \theta(t_0 A, t_0^{-1} A; p) f_{l,r}(t_0, qt_1) = t_1 \theta(t_0 t_1^{-1}, t_0 t_1; p) f_{l,r}(t_0, t_1) \quad (4)$$

и уравнению, получающемуся из него перестановкой p и q . При этом параметры t_m ограничены только условием несингулярности функций $f_{l,r}$, входящих в уравнения.

Уравнения для $\Gamma(z; p, q)$ позволяют проверить, что функция $\Delta(z)$ (3) удовлетворяет (4) для произвольных z благодаря известному трехчленному тождеству

$$\theta(xw, x/w, yz, y/z; p) - \theta(xz, x/z, yw, y/w; p) = yw^{-1} \theta(xy, x/y, wz, w/z; p).$$

Поэтому $f_l(t_0, t_1)$ как интеграл от $\Delta(z)$ по z также удовлетворяет (4). Аналогично проверяется, что уравнение для $f_r(t_0, t_1)$ также сводится к указанному тождеству. Таким образом, остается убедиться, что $f_{l,r}$ представляют одно и то же решение (4) при $t_m \in \mathcal{D}$. Отметим, что перестановочная симметрия позволяет заменить t_0 и t_1 в уравнении (4) на произвольную пару параметров t_m .

Положим $t_2 = q^{1/2}$, $t_4 = -q^{1/2}$ и $t_1 \rightarrow 1$, $t_3 \rightarrow -1$. При этом $A \rightarrow qt_0$, $|p| < |t_0| < 1$, и равенство (2) редуцируется к $n = 0$ случаю интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{\theta(pz^2; p^2)}{\theta(zt_0, z^{-1}t_0; p)} \frac{dz}{z} = \frac{(-1)^n}{(p; p)_\infty^2 \theta(t_0^2; p^2)}, \quad |p|^{n+1} < |t_0| < |p|^n, \quad (5)$$

вычисленного в [5]. Действительно, пусть $n = 0$. Сделаем подстановку $z = e^{i\varphi}$ и найдем нулевой коэффициент разложения 2π -периодической функции $\Delta(e^{i\varphi})$ в ряд Фурье по φ . С помощью хорошо известной суммы Рамануджана для двустороннего q -гипергеометрического ряда ${}_1\psi_1$ отношение θ -функций под знаком интеграла в (5) разлагается в двойной лорановский ряд по степеням z [5]. После взятия интеграла по φ этот ряд становится однократным и представляет собой частный случай суммируемого ${}_2\psi_2$ -ряда [8]. Это приводит к (5) при $n = 0$, обобщение на $n \in \mathbb{Z}$ следует из равенства $\theta(z; p) = -z\theta(pz; p)$.

Так же, как в [7], с помощью (4) можно теперь показать, что равенство (2) выполняется для произвольных t_0 , $|p| < |t_0| < 1$, и $t_1 = q^{k_1}$, $t_2 = q^{k_2+1/2}$, $t_3 = -q^{k_3}$, $t_4 = -q^{k_4+1/2}$, где $k_i \in \mathbb{N}$, таковы, что $\sum_{i=1}^4 k_i \leq N$, N – целое число, определяемое из условия $|q^{N+1}t_0| < |p| < |q^N t_0|$.

Пусть ряд $\sum_{n=0}^\infty \delta_n(\underline{t}_m, q)p^n$ представляет собой разложение в ряд Тейлора по p разности между выражениями в левой и правой частях равенства (2). По индукции можно показать, что все $\delta_n(\underline{t}_m, q)$ удовлетворяют уравнению, получающемуся из (4) при $p = 0$, из которого вытекает, что $\delta_n = 0$. Действительно, $\delta_n = 0$ для дискретного набора параметров, указанного в предыдущем абзаце. Однако теперь функции $A^n \delta_n(\underline{t}_m, q)$ аналитичны по t_m при $|t_m| < 1$ (фактор A^n устраняет сингулярности при $t_m = 0$) и поэтому $A^n \delta_n = 0$ при любых $k_i \in \mathbb{N}$. Итак, функции $A^n \delta_n(\underline{t}_m, q)$ равны нулю для бесконечных последовательностей значений параметров t_m , сходящихся к нулю, и они аналитичны в предельной точке. Поэтому они равны нулю для произвольных t_m , $|t_m| < 1$.

Равенства $\delta_n(\underline{t}_m, q) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, при $t_m \in \mathcal{D}$, т.е. в области сходимости разложений в ряд по p обеих частей тождества (2), завершают доказательство теоремы 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] B. Nassrallah, M. Rahman // SIAM J. Math. Anal. 1985. V. 16. P. 186–197.
 [2] M. Rahman // Canad. J. Math. 1986. V. 38. P. 605–618. [3] J. A. Wilson // SIAM J. Math. Anal. 1991. V. 22. P. 1147–1155. [4] V. Spiridonov, A. Zhedanov // Comm. Math. Phys. 2000. V. 210. P. 49–83. [5] V. P. Spiridonov // Proceedings of the V International Conference on Difference Equations and Applications (Temuco, Chile, 3–7 January, 2000) (to appear). [6] S. N. M. Ruijsenaars // J. Math. Phys. 1997. V. 38. P. 1069–1146. [7] R. Askey // Ramanujan Revisited. London: Academic Press, 1988. P. 561–590. [8] W. N. Bailey // Quart. J. Math. Oxford. 1936. V. 7. P. 105–115.