Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Фишкин, Аналог теоремы Мизюровича–Пшителицкого для нескольких отображений, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 1, 183–184

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm375>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 06:10:30

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ МИЗЮРЕВИЧА–ПШИТИЦКОГО ДЛЯ НЕСКОЛЬКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

А. Ю. Фишкин

В этой работе рассматривается топологическая энтропия для действия нескольких непрерывных отображений метрического компакта, введенная А. Буфетовым [1], [2]. Для случая компактного гладкого ориентируемого многообразия и C^1 -гладких отображений доказывается нижняя оценка для энтропии.

Обозначим через W_m множество конечных слов в алфавите $\{1, 2, \dots, m\}$. Для слова $w = w_1 w_2 \dots w_n \in W_m$ обозначим через $|w|$ его длину n , а через $w^{(k)} = w_1 w_2 \dots w_k$ его начало длины $k \leq n$.

Пусть X – метрический компакт, d – расстояние на X , и пусть $f_1, f_2, \dots, f_m$ – непрерывные отображения X в себя, порождающие полугруппу $\langle f_1, f_2, \dots, f_m \rangle$ относительно композиции. Если $w \in W_m$ и $|w| = n$, то положим $f_w = f_{w_n} \circ \dots \circ f_{w_1}$ и $f_\lambda = \text{id}_X$ для пустого слова λ . Сопоставим слову w метрику на X по формуле:

$$d_w(x_1, x_2) = \max_{0 \leq k < |w|} d(f_{w^{(k)}}(x_1), f_{w^{(k)}}(x_2)).$$

Обозначим через $N(w, \varepsilon)$ максимальное число точек в ε -разделенном множестве (парные расстояния между точками которого больше ε) в X с метрикой d_w и положим

$$N(n, \varepsilon) = \frac{1}{m^n} \sum_{w \in W_m, |w|=n} N(w, \varepsilon).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Топологическая энтропия полугруппы $\langle f_1, f_2, \dots, f_m \rangle$ задается формулой:

$$h(f_1, \dots, f_m) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(n, \varepsilon)}{n}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Это определение введено А.И. Буфетовым [1], [2]. Другое определение для энтропии полугруппового действия было введено Фридлендом [3]. Ее свойства изучены в [3], [4].

Следующая теорема обобщает теорему Мизюревича–Пштитцкого [5] на случай полугруппового действия. Доказательство следует [6].

ТЕОРЕМА. Пусть X – гладкое компактное ориентируемое многообразие, $f_i: X \rightarrow X$, $i = 1, \dots, m$, – C^1 -гладкие отображения. Тогда

$$h(f_1, \dots, f_m) \geq \log \frac{|\deg f_1| + |\deg f_2| + \dots + |\deg f_m|}{m}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае растягивающих отображений неравенство в теореме обращается в равенство (см. [2]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем форму объема Ω на X и число $\alpha \in (0, 1)$. Пусть $L_i = \sup_{x \in X} |Jf_i(x)|$, где Jf – якобиан относительно формы Ω . Положим $L = \max_{i=1}^m L_i$, $l = L^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$ и $B_i = \{x \in X \mid |Jf_i(x)| \geq l\}$, $i = 1, \dots, m$. Отображение $f_i|_{B_i}$ является локальным диффеоморфизмом. Для любого i выберем конечное покрытие B_i открытыми множествами, на каждом из которых f_i инъективно. Обозначим через δ_i число Лебега покрытия множества B_i (любой шар радиуса δ_i в B_i целиком содержится в некотором элементе покрытия) и положим $\delta = \min_{i=1}^m \delta_i$.

Если на точку $x \in B_i$ действует отображение f_i , то назовем такую ситуацию “хорошим скачком”.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-00455) и CRDF.

Зафиксируем целое $n > 0$ и возьмем $w \in W_m$, $|w| = n$. Рассмотрим множество A , состоящее из тех точек $x \in X$, для которых среди скачков $f_{w(i)}(x) \rightarrow f_{w(i+1)}(x)$, $i = 0, \dots, n-1$, не более чем αn хороших. Если $x \in A$, то

$$|Jf_w(x)| = |Jf_{w_n}(f_{w(n-1)}(x))Jf_{w_{n-1}}(f_{w(n-2)}(x)) \cdots Jf_{w_1}(x)| < L^{\alpha n} l^{(1-\alpha)n} = 1,$$

следовательно, $\text{vol } f_w A < \text{vol } X$. По теореме Сарда, существует регулярное значение $x \in X \setminus f_w A$ для отображения f_w , которое мы зафиксируем.

Построим большое (w, δ) -разделенное множество.

Обозначим $d_i = |\deg f_i|$. Так как x – регулярное значение для f_{w_n} , то $\{f_{w_n}^{-1}(x)\}$ содержит не менее d_{w_n} точек. Если d_{w_n} из них содержатся в B_{w_n} (назовем это “хорошим переходом”), тогда множество Q_1 состоит из d_{w_n} таких прообразов. Иначе Q_1 состоит из одного прообраза, находящегося вне B_{w_n} . Точки множества Q_1 являются регулярными значениями для $f_{w_{n-1}}$. Применим к каждой точке из Q_1 и отображению $f_{w_{n-1}}$ ту же процедуру. Тем самым, каждая точка из Q_1 даст либо $d_{w_{n-1}}$ точек из $B_{w_{n-1}}$, либо одну точку из $X \setminus B_{w_{n-1}}$. Собирая все эти точки вместе, получим Q_2 . Продолжая этот процесс, мы получим в итоге множество Q_n .

Докажем, что Q_n является (w, δ) -разделенным множеством. Действительно, пусть $y, z \in Q_n$, $y \neq z$, и y и z не являются (w, δ) -разделенными, т.е. $d(y_i, z_i) < \delta$, где $y_0 = y$, $z_0 = z$ и $y_i = f_{w(i)}(y)$, $z_i = f_{w(i)}(z)$ для $1 \leq i \leq n-1$. Очевидно $y_{n-1}, z_{n-1} \in Q_1$, и если $y_{n-1} \neq z_{n-1}$, то $y_{n-1}, z_{n-1} \in B_{w_n}$. Но поскольку $d(y_{n-1}, z_{n-1}) < \delta$, то $x = f_{w_n}(y) \neq f_{w_n}(z) = x$. Противоречие. Значит $y_{n-1} = z_{n-1}$. Аналогично получаем, что $y_{n-2} = z_{n-2}, \dots, y_0 = z_0$. Но $y \neq z$. Противоречие доказывает, что множество Q_n (w, δ) -разделенное.

Оценим мощность множества Q_n .

Можно считать, что $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_m$. Пусть k_s – число символов s в слове w ; $k_1 + \dots + k_m = n$. Пусть $i = \max\{j \mid k_1 + \dots + k_j < [\alpha n] + 1\}$.

Так как $x \in X \setminus f_w(A)$, а $Q_n \subset \{f_w^{-1}(x)\}$, то $Q_n \subset X \setminus A$, и, следовательно, для $y \in Q_n$ среди скачков $f_{w(i)}(y) \rightarrow f_{w(i+1)}(y)$, $i = 0, \dots, n-1$, имеется более чем αn хороших. Следовательно, при получении точки y произошло как минимум $[\alpha n] + 1$ хороших переходов. В результате хорошего перехода $z \rightarrow \{f_i^{-1}(z)\}$ возникает d_i точек в некотором промежуточном множестве Q_r . Отсюда легко видеть, что $\text{card}(Q_n) \geq r_w = d_1^{k_1} d_2^{k_2} \cdots d_i^{k_i} d_{i+1}^{[\alpha n] + 1 - \sum_{j=1}^i k_j}$. Поэтому

$$\begin{aligned} N(n, \delta) &\geq \text{card}(Q_n) \geq \frac{1}{m^n} \sum_{|w|=n} r_w \geq \frac{1}{m^n} \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=[\alpha n]+1} d_1^{k_1} \cdots d_m^{k_m} \\ &\geq \frac{(d_1 + \dots + d_m)^{\alpha n}}{m^n}, \end{aligned}$$

и, значит, $h(f_1, \dots, f_m) \geq \alpha \log \frac{d_1 + \dots + d_m}{m}$. Поскольку $\alpha \in (0, 1)$ – любое, то теорема доказана.

Я искренне благодарен А. И. Буфетову и Ю. С. Ильяшенко за интересные и плодотворные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Bufetov // J. Dynam. Contr. Systems. 1999. V. 5. № 1. P. 137–143. [2] А. И. Буфетов // Теория вероятн. и ее примен. 1999. Т. 44. № 3. С. 696–697. [3] S. Friedland // Ergodic theory of $\mathbb{Z}^d$ actions. Proceedings of the Warwick symposium, Warwick, UK, 1993–94 / ed. M. Pollicott et al. New York: Cambridge Univ. Press, 1996. 319–343. (Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. V. 228.) [4] W. Geller, M. Pollicott // Fund. Math. 1998. V. 157. № 2–3. P. 209–220. [5] M. Misiurewicz, F. Przytycki // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astron. Phys. 1977. V. 25. P. 573–574. [6] А. Каток, Б. Хасселблат. Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999.