Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. К. Шейнман, Алгебры Кричевера–Новикова и уравнения автодуальности на римановых поверхностях, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 1, 185–186

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm376>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 14:30:53

АЛГЕБРЫ КРИЧЕВЕРА–НОВИКОВА И УРАВНЕНИЯ АВТОДУАЛЬНОСТИ НА РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

О. К. ШЕЙНМАН

Рассмотрим аффинную алгебру Кричевера–Новикова, действие группы калибровочных преобразований в двойственном к ней пространстве и орбиты этого действия. Для алгебр серии $\mathfrak{gl}$ мы связываем с каждой орбитой систему инвариантов Хитчина и систему инвариантов Тюринга, и показываем, что они образуют полную систему инвариантов рассматриваемого действия. Для произвольной аффинной алгебры Кричевера–Новикова мы связываем с каждой орбитой серию представлений этой алгебры. В обеих конструкциях существенно используется теорема Дональдсона о представлении плоской связности на римановой поверхности в виде $d + A + \phi + \phi^*$, где (A, ϕ) – решение уравнений автодуальности [1], [2].

Возьмем аффинную алгебру Кричевера–Новикова $\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}(\Sigma, P_{\pm}) \oplus \mathbb{C}c$, где Σ – компактная алгебраическая кривая над $\mathbb{C}$ с двумя отмеченными точками $P_{\pm}$ (genus $\Sigma > 0$), $\mathcal{A}(\Sigma, P_{\pm})$ – алгебра мероморфных функций на Σ , регулярных вне точек $P_{\pm}$, $\mathfrak{g}$ – комплексная редуктивная алгебра Ли, c – генератор центра. Двойственное пространство $\widehat{\mathfrak{g}}^*$ можно отождествить с пространством операторов вида $bd + \omega$ в пространстве сечений l -мерного тривиального расслоения на Σ , где ω – мероморфная, регулярная вне точек $P_{\pm}$ $\mathfrak{g}^*$ -значная 1-форма на Σ , $b \in \mathbb{C}$. Голоморфные вне $P_{\pm}$ отображения $\Sigma \rightarrow \exp \mathfrak{g}$ с операцией поточечного умножения образуют группу, обозначаемую ниже G . Группа G действует на $\widehat{\mathfrak{g}}^*$ с помощью калибровочных преобразований: $\omega \mapsto g\omega g^{-1} - b \cdot dg \cdot g^{-1}$, $b \mapsto b$. Пространство орбит общего положения, лежащих в инвариантной аффинной гиперплоскости $b = \text{const}$ ($b \neq 0$) в $\widehat{\mathfrak{g}}^*$, находится во взаимно однозначном соответствии с пространством классов эквивалентности представлений $\tau: \pi_1(\Sigma \setminus P_{\pm}) \rightarrow \exp \mathfrak{g}$ таких, что $\tau(\gamma)$ – полупростой элемент, где γ – контур, соответствующий обходу отмеченной точки, скажем, P_+ . Соответствие между орбитами и представлениями установлено в [3], обратное соответствие при условии полупростоты $\tau(\gamma)$ вытекает, например, из предложения 1.5.2 в [4]. Согласно [4] представлению τ и паре доминантных весов алгебры $\mathfrak{g}$ в отмеченных точках соответствуют гладкое векторное расслоение на Σ и плоская связность ∇ в нем, имеющая логарифмические особенности в точках $P_{\pm}$. Зададим в точке P_+ произвольный доминантный вес $\lambda_+ = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l$), а в точке P_- – доминантный вес вида $(*, 0, \dots, 0)$ или $(0, \dots, 0, *)$ таким образом, чтобы степень расслоения, построенного в силу конструкции [4], была равна gl ($g = \text{genus}(\Sigma)$). Вес λ_- однозначно определяется этим условием, весом λ_+ и представлением τ . Полученное расслоение обозначим $B_{\lambda, \tau}$. Согласно теореме Дональдсона [1], [2] ∇ калибровочно эквивалентна связности вида $d + A + \phi + \phi^*$, где (A, ϕ) – решение уравнений автодуальности $d_A'' \phi = 0$, $F(A) + [\phi, \phi^*] = 0$, $F(A)$ – кривизна связности A , * в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(l)$ – эрмитово сопряжение, $d + A = d_A' + d_A''$ – стандартное представление связности в комплексных координатах и форма связности A не имеет особенностей в отмеченных точках. Зададим на $B_{\lambda, \tau}$ комплексную структуру с d_A'' в качестве $\bar{\partial}$ -оператора. Согласно [2] расслоение $B_{\lambda, \tau}$ с указанной комплексной структурой является голоморфным расслоением над Σ (таким образом, в частности, $\phi \in \Omega^{1,0}(\Sigma \setminus P_{\pm})$, $\phi^* \in \Omega^{0,1}(\Sigma \setminus P_{\pm})$ и обе эти формы восстанавливаются по каноническому виду связности). Построенное голоморфное расслоение $B_{\lambda, \tau}$ имеет ранг l и степень gl . Мы будем предполагать, что $B_{\lambda, \tau}$ находится в общем положении в следующем смысле. Согласно [5] пространство мероморфных сечений расслоения общего положения на римановой поверхности, голоморфных вне отмеченных точек $P_{\pm}$, изоморфно пространству $\mathcal{F}$ мероморфных вектор-функций $f = (f_1, \dots, f_l)^T$ на той же римановой поверхности, голоморфных вне точек $P_{\pm}$ и дивизора $D = \sum_{i=1}^{gl} \gamma_i$ степени gl , в точках последнего имеющих не более чем простые полюса и удовлетворяющих соотношениям

$$(\text{res}_{\gamma_i} f_j) \alpha_{ik} = (\text{res}_{\gamma_i} f_k) \alpha_{ij}, \quad i = 1, \dots, gl, \quad j = 1, \dots, l,$$

где α_{ik} – константы. Точки дивизора D и числа α_{ik} называются параметрами Тюринга расслоения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00198).

Для построения инвариантов калибровочного действия на $\widehat{\mathfrak{g}}^*$ возьмем $\lambda = 0$. Для автодуальной пары A, ϕ известны инварианты Хитчина [6] – коэффициенты разложения $\text{tr } \phi^k$ по базисным голоморфным тензорам веса k , $k = 1, \dots, l$. Для $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(l)$ их количество, как вытекает из [6], равно $l^2(g-1) + 1$. При нетривиальном значении τ на контуре, обходящем прокол (P_+ или P_-), ϕ имеет простые в общем положении полюса в точках $P_{\pm}$, следовательно, к базисным голоморфным тензорам следует добавить тензоры, имеющие полюса в $P_{\pm}$. Таких тензоров $2l^2$ (l весов, l порядков полюсов и две точки). Учтем, что $\text{res}_{P_+} \phi + \text{res}_{P_-} \phi = 0$, поэтому коэффициенты при членах порядка l разложений Лорана тензора $\text{tr } \phi^l$ в отмеченных точках равны или отличаются лишь знаком (в зависимости от четности l). Этим один параметр элиминируется. Таким образом, мы получаем $l^2(g+1)$ обобщенных инвариантов Хитчина. Следующий набор инвариантов, зависящий от компоненты A автодуальной пары – это параметры Тюринга расслоения $B_{0,\tau}$ [5], [7]. Среди них $l^2(g-1) + 1$ независимых. Кроме того, имеется один “тривиальный” инвариант b (см. выше). В совокупности мы перечислили $2l^2g + 2$ независимых инвариантов. Легко показать, что это число совпадает с размерностью пространства орбит. Таким образом обобщенные инварианты Хитчина и инварианты Тюринга образуют полное семейство инвариантов рассматриваемого действия. Можно предположить, что инварианты Хитчина–Тюринга являются инвариантами коприсоединенного представления алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$, хотя в этом качестве не образуют полной системы.

Определим соответствие между орбитами калибровочного действия в пространстве $\widehat{\mathfrak{g}}^*$ и квазиградуированными представлениями алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$. Здесь $\mathfrak{g}$ конечномерная комплексная редуктивная алгебра Ли. Каждой орбите τ мы сопоставляем серию представлений, задаваемых парами (χ, λ) , где $\chi: \exp \mathfrak{g} \mapsto GL(l)$ – неприводимое конечномерное представление и λ – доминантный вес $\mathfrak{gl}(l)$. Применим описанную выше конструкцию расслоения к представлению $\chi_\tau = \chi \circ \tau$; полученное расслоение обозначим $B_{\lambda, \chi \circ \tau}$. Воспользуемся теперь конструкцией представления алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$ по расслоению, подробно изложенной в [8]. Рассмотрим для $B_{\lambda, \chi \circ \tau}$ введенное выше пространство мероморфных функций $\mathcal{F}$. В этом пространстве определим базис $\psi_{n,j}$, $n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq j < l$ (введенный в [9]). Компоненту $\psi_{n,j}^i$ вектор-функции $\psi_{n,j}$ зададим ее асимптотиками в точках $P_{\pm}$: $\psi_{n,j}^i = z_{\pm}^{\pm n} (\xi_{n,j,\pm}^i \pm \mathcal{O}(z_{\pm}))$, где $\xi_{n,j,\pm}^i = 1$, $\xi_{n,j,+}^i = 0$, $i > j$; $\xi_{n,j,-}^i = 0$, $i < j$, $z_{\pm}$ – локальные параметры в окрестностях точек $P_{\pm}$ соответственно. Алгебра Ли $\widehat{\mathfrak{g}}$ имеет естественное действие на $\mathcal{F}$ с нулевым центральным зарядом, которое индуцирует ее действие на символы $\psi_{n,j}^i$.

С помощью стандартной конструкции [10] на основе этого действия строится представление алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$ в пространстве полубесконечных внешних форм от $\psi_{n,j}^i$. Это представление имеет нетривиальный центральный заряд. Это представление мы и сопоставим тройке (τ, χ, λ) .

Автор благодарит Э.Б. Винберга и А.А. Болибруха за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Donaldson // Proc. Lond. Math. Soc. (3). 1987. V. 55. № 1. P. 127–131. [2] N. Hitchin // Proc. Lond. Math. Soc. (3). 1987. V. 55. № 1. P. 59–126. [3] О. К. Шейнман // Функц. анализ и его прил. 1993. Т. 27. № 4. С. 54–62. [4] А. А. Болибрух. 21-я проблема Гильберта для линейных фуксовых систем // Труды МИАН. 1994. Т. 206. [5] И. М. Кричевер, С. П. Новиков // УМН. 1980. Т. 35. № 6. С. 47–68. [6] N. Hitchin // Duke Math. J. 1987. V. 54. № 1. P. 91–114. [7] А. Н. Тюрин // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965. Т. 29. С. 657–688. [8] О. К. Шейнман // Функц. анализ и его прил. (в печати). [9] И. М. Кричевер, С. П. Новиков // УМН. 2000. Т. 55. № 3. С. 181–182. [10] V. G. Kac, A. K. Raina. Bombay Lectures on Highest Weight Representations of Infinite Dimensional Lie Algebras. Singapore: World Scientific, 1987. (Adv. Ser. Math. Phys. V. 2.)