Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Шепп, А. Н. Ширяев, Русский опцион в условиях возможного “замораживания” цен, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 1, 187–188

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm377>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 12:18:41

РУССКИЙ ОПЦИОН В УСЛОВИЯХ ВОЗМОЖНОГО “ЗАМОРАЖИВАНИЯ” ЦЕН

Л. А. ШЕПП, А. Н. ШИРЯЕВ

1. Модель производного финансового инструмента “Русский опцион”, введенного авторами, [1], [2], и относящегося к классу опционов (-пут, put option) с последствием и дисконтированием, описывается следующим образом.

Пусть цены $X = (X_t)_{t \geq 0}$ некоторого финансового актива задаются геометрическим броуновским движением

$$X_t = x \exp\left(\sigma B_t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где $B = (B_t)_{t \geq 0}$ – стандартное броуновское движение, $x > 0$, $\sigma > 0$, процентная ставка $r \geq 0$.

Обозначим $S_t = s \vee \max_{u \leq t} X_u$, $0 < x \leq s$, и положим для $\lambda > 0$

$$V^*(x, s) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}} E_{x,s} e^{-(\lambda+r)\tau} S_\tau, \quad (2)$$

где $\mathfrak{M}$ есть класс конечных ($P_{x,s}$ -п.н.) моментов остановки τ (относительно потока σ -алгебр, порожденных броуновским движением), $E_{x,s}$ – усреднение по мере $P_{x,s}$ – распределению вероятностей процесса $(X, S) = (X_t, S_t)_{t \geq 0}$ при $X_0 = x$, $S_0 = s$.

Нахождение функции (цены) $V^*(x, s)$ и соответствующего оптимального момента остановки τ^* , на котором в (2) достигается значение $V^*(x, s)$, представляет интерес в связи с расчетами рациональной (справедливой) цены, которую должен заплатить покупатель за приобретение опциона (Американского типа) с платежной функцией $f_\tau = \max_{u \leq \tau} S_u$, когда опцион предъявляется (покупателем) к исполнению в момент времени τ . (См. подробнее [3; гл. I, § 1с; гл. VIII, § 2d].)

В [1], [2] был получен следующий результат.

Пусть $A = 1 - 2r/\sigma^2$, $B = 2(\lambda + r)/\sigma^2$, и пусть $\gamma_k = A/2 + (-1)^k \sqrt{(A/2)^2 + B}$, $k = 1, 2$, – два решения ($\gamma_1 < 0$, $\gamma_2 > 1$) квадратного уравнения $\gamma^2 - A\gamma - B = 0$. Обозначим

$$\theta = \left(\frac{1 - \gamma_1^{-1}}{1 - \gamma_2^{-1}} \right)^{1/(\gamma_2 - \gamma_1)} \quad (> 1) \quad (3)$$

и $g^*(s) = s/\theta$, $0 < x \leq s$. Тогда цена $V^*(x, s)$ и оптимальный момент остановки τ^* определяются формулами

$$V^*(x, s) = \begin{cases} \frac{s}{\gamma_2 - \gamma_1} \left[\gamma_2 \left(\frac{x}{g^*(s)} \right)^{\gamma_1} - \gamma_1 \left(\frac{x}{g^*(s)} \right)^{\gamma_2} \right], & g^*(s) < x \leq s, \\ s, & x \leq g^*(s), \end{cases} \quad (4)$$

и

$$\tau^* = \inf\{t : X_t \leq g^*(S_t)\}. \quad (5)$$

(См. рис. 1, где $C^* = \{(x, s) : s/\theta < x \leq s\}$ – область продолжения наблюдений и $D^* = \{(x, s) : x \leq s/\theta\}$ – область остановки наблюдений.)

2. Цель настоящей заметки – рассмотреть некоторую интересную с нашей точки зрения модификацию “Русского опциона”. Читатель сразу увидит, что предлагаемая модификация имеет простую финансово-экономическую интерпретацию, связанную с возможным “замораживанием” цен, дефолтом, банкротством и т. п. С точки зрения общей теории оптимальных правил остановки речь будет идти о задаче с ограничением на допустимый класс моментов остановки.

Пусть $T_\varepsilon = \inf\{t \geq 0 : X_t \leq \varepsilon\}$, $\mathfrak{M}_\varepsilon = \{\tau \in \mathfrak{M} : \tau \leq T_\varepsilon\}$ – класс моментов остановки из $\mathfrak{M}$, меньших или равных T_ε . Положим для $\lambda > 0$

$$V_\varepsilon^*(x, s) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_\varepsilon} E_{x,s} e^{-(r+\lambda)\tau} S_\tau. \quad (6)$$

Ясно, что $V_\varepsilon^*(x, s) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}} E_{x,s} e^{-(r+\lambda)\tau} S_\tau I(\tau \leq T_\varepsilon)$. Если ввести “остановленный” процесс $X_t^\varepsilon = X_{t \wedge T_\varepsilon}$, который можно интерпретировать как процесс, описывающий “замороженные” цены, то видим, что $V_\varepsilon^*(x, s) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}} E_{x,s} e^{-(r+\lambda)\tau} S_\tau^\varepsilon$, где $S_\tau^\varepsilon = s \vee \max_{u \leq t} X_u^\varepsilon$.

Рис. 1. “Русский опцион”: D^* – область остановки, C^* – область продолжения наблюдений, $g^*(s) = s/\theta$ – граница области остановки (как функция от s) – выделена полужирным шрифтом

Рис. 2. Модифицированный “Русский опцион”: D^* – область остановки, $C_1^* \cup C_{II}^*$ – область продолжения наблюдений,

$$g_\varepsilon^*(s) = \begin{cases} \max(\varepsilon, s/\theta), & \varepsilon \leq x \leq s, \\ s, & x < \varepsilon, \end{cases}$$
– граница области остановки (как функция от s) – выделена полужирным шрифтом

Заметим, что для всякого $\varepsilon > 0$ $V_\varepsilon^*(x, s) \leq V(x, s)$. Поскольку для всех $x > \varepsilon$ и $s > \varepsilon\theta$ для момента τ_ε^* , определенного в (5), выполнено свойство $\tau_\varepsilon^* < T_\varepsilon$ ($P_{x,s}$ -п.н.), то для таких (x, s) $V_\varepsilon^*(x, s) = V(x, s)$ и момент τ_ε^* , оптимальный в задаче (2), является также оптимальным в модифицированной задаче (6).

Понятно также, что для всех $0 < x < \varepsilon$ оптимальный момент $\tau_\varepsilon^* = 0$ и в этом неинтересном случае $V_\varepsilon^*(x, s) = s$ для всех $s \geq x$.

3. Положим $g_\varepsilon^*(s) = \max(\varepsilon, s/\theta)$.

ТЕОРЕМА. В модифицированной версии “Русского опциона” оптимальный момент остановки $\tau_\varepsilon^* = \inf\{t \geq 0 : X_t \leq g_\varepsilon^*(S_t)\}$, если $\varepsilon \leq x \leq s$, и $\tau_\varepsilon^* = 0$, если $x \leq s \leq \varepsilon$.

В области остановки $D^* = D_I^* \cup D_{II}^* \cup D_{III}^*$, где $D_I^* = \{(x, s) : x \leq g^*(s), s \geq \varepsilon\theta\}$, $D_{II}^* = \{(x, s) : x \leq \varepsilon, \varepsilon \leq s \leq \varepsilon\theta\}$, $D_{III}^* = \{(x, s) : x \leq s \leq \varepsilon\}$ (см. рис. 2), цена $V_\varepsilon^*(x, s) = s$.

В области продолжения наблюдений $C_1^* = \{(x, s) : g_\varepsilon^*(s) < x < s, s \geq \varepsilon\theta\}$ цена $V_\varepsilon^*(x, s) = V^*(x, s)$, где $V^*(x, s)$ определяется формулой (4). В области продолжения наблюдений $C_{II}^* = \{(x, s) : \varepsilon < x \leq s < \varepsilon\theta\}$ $V_\varepsilon^*(x, s) = A_1(s)(x/\varepsilon)^{\gamma_1} + A_2(s)(x/\varepsilon)^{\gamma_2}$, где

$$A_1(s) = -\frac{\varepsilon}{\beta} \left[\int_{\beta \log(s/\varepsilon)}^{\beta \log \theta} \frac{e^{(\beta^{-1}+1)t}}{e^t - 1} dt - \theta \gamma_2 \right], \quad A_2(s) = \frac{\varepsilon}{\beta} \left[\int_{\beta \log(s/\varepsilon)}^{\beta \log \theta} \frac{e^{\beta^{-1}t}}{e^t - 1} dt - \theta \gamma_1 \right]$$

с $\beta = \gamma_2 - \gamma_1$.

Доказательство оптимальности момента τ_ε^* проводится с использованием “проверочных теорем”, применяемых к функции $V_\varepsilon^*(x, s)$, находимой в свою очередь из решения соответствующей задачи Стефана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. A. Shepp, A. N. Shiryaev // Ann. Appl. Probab. 1993. V. 3. №3. P. 631–640.
- [2] Л. А. Шепп, А. Н. Ширяев // Теория вероятн. и ее прим. 1994. Т. 39. №1. С. 130–149.
- [3] А. Н. Ширяев. Основы стохастической финансовой математики. М.: Фазис, 1998.

Rutgers University;
 Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
 Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
 01.12.2000