Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Камловский, А. С. Кузьмин, Распределение элементов на циклах линейных рекуррентных последовательностей над кольцами Галуа, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 2, 149–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm38>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 12:40:08

**РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ
НА ЦИКЛАХ ЛИНЕЙНЫХ РЕКУРРЕНТНЫХ
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ НАД КОЛЬЦАМИ ГАЛУА**

О. В. КАМЛОВСКИЙ, А. С. КУЗЬМИН

Распределение элементов в линейных рекуррентных последовательностях (ЛРП) над кольцами Галуа изучается в работах [1]–[4], [6], [9]–[12]. В данной работе изучаются частоты появления r -грамм на циклах ЛРП над кольцами Галуа. При условии, что характеристический многочлен ЛРП является многочленом Галуа, получены оценки частот появления r -грамм на цикле ЛРП. Данные оценки улучшают результаты работ [2] и [3].

Пусть p – простое число, а t и n – натуральные числа, $R = GR(p^{tn}, p^n)$ – кольцо Галуа характеристики p^n из p^{tn} элементов [5], [7], $f(x)$ – многочлен над кольцом R степени m , $m > 1$. Всюду далее будем считать, что многочлен $f(x)$ является многочленом Галуа над кольцом R , т.е. образ $\bar{f}(x)$ многочлена $f(x)$ при действии естественного эпиморфизма $R[x] \rightarrow \bar{R}[x]$, где $\bar{R} = R/pR$, является неприводимым многочленом над полем $\bar{R}$. Как показано в работе [8], период $T(f)$ многочлена $f(x)$ равен $(q^m - 1)p^\nu/d$, где $q = p^t$, d – некоторый делитель числа $q^m - 1$, а ν – целое неотрицательное число, удовлетворяющее условиям $0 \leq \nu \leq n - 1$. Через α обозначим корень многочлена $f(x)$ в расширении $S = GR(q^{mn}, p^n)$ кольца R . Пусть $u = (u(i))_{i=0}^\infty$ – ЛРП над кольцом R с характеристическим многочленом $f(x)$, а $T(u)$ – ее период. ЛРП u , для которой выполнены условия $T(u) = T(f) = (q^m - 1)p^{n-1}$, будем называть ЛРП максимального периода над кольцом R . Пусть r – произвольное натуральное число, $s_1, s_2, \dots, s_r$ – целые неотрицательные числа, $z_1, z_2, \dots, z_r$ – элементы кольца R , $\bar{z} = (z_1, z_2, \dots, z_r)$, $\bar{s} = (s_1, s_2, \dots, s_r)$. Через $N_{\bar{z}}^{\bar{s}}(u)$ обозначим количество целых чисел $i \in [0, T(u) - 1]$, удовлетворяющих равенствам $u(i + s_j) = z_j$, $j \in \overline{1, r}$. Будем изучать отклонение частот $N_{\bar{z}}^{\bar{s}}(u)$ от величины $\omega_{\bar{z}}(u)$, которая определена следующими равенствами:

$$\omega_{\bar{z}}(u) = \begin{cases} \frac{q^{m-nr} - 1}{q^m - 1} T(u), & \text{если } \bar{z} = \bar{0}, \\ \frac{q^{m-nr}}{q^m - 1} T(u), & \text{если } \bar{z} \neq \bar{0}. \end{cases}$$

Величины $\omega_{\bar{z}}(u)/T(u)$ и $1/q^{nr}$ – “идеальная” относительная частота появления r -граммы, связаны соотношением $|\omega_{\bar{z}}(u)/T(u) - 1/q^{nr}| < p^{n-1}/T(u)$. Поэтому при фиксированных значениях q, n, r и при достаточно больших значениях периода $T(u)$ ЛРП u величины $\omega_{\bar{z}}(u)/T(u)$ и $1/q^{nr}$ можно считать равными.

ТЕОРЕМА 1. Пусть среди элементов $u(0), u(1), \dots, u(m-1)$ есть хотя бы один обратимый элемент кольца R и система элементов $\alpha^{s_1}, \alpha^{s_2}, \dots, \alpha^{s_r}$ линейно независима над кольцом R . Тогда справедливо неравенство:

$$(1) \quad |N_{\bar{z}}^{\bar{s}}(u) - \omega_{\bar{z}}(u)| \leq \frac{p^\nu ((q^{nr} p^n - 1)(q^r - 1)d - (q^r p - 1)(q^{nr} - 1))}{q^{nr} d (q^r p - 1)} q^{m/2}.$$

В частности, в условиях теоремы всегда выполнено неравенство:

$$|N_{\bar{z}}^{\bar{s}}(u) - \omega_{\bar{z}}(u)| \leq p^{\nu+n-1} q^{m/2}.$$

Из результата (1) следуют верхняя и нижняя оценки частот $N_{\bar{z}}^{\bar{s}}(u)$. При условии

$$T(u) \geq p^{2(n-1)} q^{\frac{m}{2} + nr}$$

эти оценки частоты $N_{\bar{z}}^{\bar{s}}(u)$ будут нетривиальными для всех r -грамм $\bar{z} \in R^r$.

В работе [3] изучаются частотные характеристики ЛРП максимального периода над кольцом $\mathbb{Z}/p^2$. При этом для модуля отклонения частот появления элементов на цикле ЛРП от величины p^{m-1} получена верхняя оценка $p^{\frac{3m}{4} + 1}$. Правая часть неравенства (1) в этом случае равна

$(p-1)^2 p^{\frac{m}{2}}$, что существенно улучшает эту оценку. В работе [2] получены нижние оценки частот появления элементов на циклах ЛРП максимального периода над кольцом $\mathbb{Z}/p^n$. Результат (1) улучшает эти оценки при условии $m \geq 4n$. Кроме того, в некоторых случаях результат (1) улучшает известные оценки частот появления r -грамм на циклах ЛРП над конечными полями [6], [9]–[12].

Из теоремы 1 можно получить условия, при которых на цикле ЛРП и заведомо появятся все r -граммы элементов кольца R .

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть в условиях теоремы 1 дополнительно выполняется хотя бы одно из условий

- 1) $T(u) \geq p^{2(n-1)}(q^{nr} - 1)q^{m/2}$,
- 2) u – ЛРП максимального периода над кольцом R и $m \geq 2(tnr + n - 1)/t$.

Тогда среди r -грамм $(u(i + s_1), u(i + s_2), \dots, u(i + s_r))$, $i \in \overline{0, T(u) - 1}$, появятся все элементы множества R^r .

Приведем теперь нижнюю оценку для модуля отклонения частот появления r -грамм на цикле ЛРП и максимального периода от величины $T(u)/q^{nr}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть период $T(f)$ многочлена $f(x)$ равен $(q^m - 1)p^{n-1}$ и система элементов $\alpha^{s_1}, \alpha^{s_2}, \dots, \alpha^{s_r}$ линейно независима над кольцом R . Тогда найдутся ЛРП и максимального периода с характеристическим многочленом $f(x)$ и r -грамма $\bar{z} \in R^r$ такие, что:

$$\left| N_{\bar{z}}^{\bar{s}}(u) - \frac{T(u)}{q^{nr}} \right| > C(n, r, q)q^{m/2},$$

где

$$C(n, r, q) = \begin{cases} \left(\frac{(p-1)^2(n-1)}{p^3} \right)^{1/2}, & \text{если } p = q, r = 1, n > 1, \\ \left(\frac{(q^r - 1)(p-1)p^{n-2}}{q^{(n+1)r}} \right)^{1/2}, & \text{если } q^r > p, n > 1. \end{cases}$$

Из последнего результата следует, что если кольцо R не является полем, то в классе всех ЛРП максимального периода с заданным характеристическим многочленом $f(x)$ всегда найдется ЛРП, у которой частотные характеристики отличны от “идеальных” значений. Более того, этот результат показывает, что множитель $q^{m/2}$ в оценке (1), характеризующий зависимость изучаемой разности от степени m характеристического многочлена ЛРП, по-видимому, нельзя уменьшить.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Коробов Н. М. // Докл. АН СССР. 1953. Т. 88. № 4. С. 603–606. [2] Кузьмин А. С. // УМН. 1992. Т. 47. № 6. С. 213–214. [3] Kuzmin A. S., Nechaev A. A. // Proceedings of the IV Internat. Workshop “Algebr. and Combinator. Coding Theory”. Sofia: Zakrila–Novgorod, 1994. P. 132–136. [4] Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля. Т. 1, 2. М.: Мир, 1988. [5] McDonald B. R. Finite rings with identity. New York: Dekker, 1974. [6] McEliece R. J. Irreducible cyclic codes and Gauss sums // Combinatorics / ed. M. Hall, Jr. and J. H. van Lint, 1975. P. 185–202. [7] Нечаев А. А. // Дискретн. матем. 1989. Т. 1. № 4. С. 123–139. [8] Нечаев А. А. // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 3. С. 21–56. [9] Нечаев В. И. // Матем. заметки. 1972. Т. 11. № 5. С. 597–607. [10] Niederreiter H. // Probl. Control Inform. Theory. 1986. V. 15. № 1. P. 19–34. [11] Сидельников В. М. // Дискретн. матем. 1991. Т. 3. № 2. С. 87–95. [12] Шпарлинский И. Е. // Проблемы передачи информации. 1989. Т. 25. № 2. С. 46–53.

Принято редколлегией
22.01.1998