Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Исковских, Бирациональная жесткость гиперповерхностей Фано в рамках теории Мори, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 2, 3–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm382>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 18:00:27

УДК 512.76

БИРАЦИОНАЛЬНАЯ ЖЕСТКОСТЬ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ ФАНО В РАМКАХ ТЕОРИИ МОРИ

В. А. ИСКОВСКИХ

Обзор отражает современное состояние теории Мори и ее лог-версии. Основной упор делается на приложении теории лог-пар к бирациональной геометрии многообразий отрицательной размерности Кодаиры (также известных как близкие к рациональным; хотя также известно, что многие из них обладают бирациональной жесткостью, обсуждаемой в обзоре и более свойственной общему типу, чем рациональным многообразиям), а именно, к программе Саркисова факторизации бирациональных отображений моделей Мори, являющихся расслоениями Мори при указанных ограничениях. В частности, приводится новое доказательство бирациональной жесткости неособой трехмерной квартики (теоремы Исковских–Манина, дающей нерациональность такой квартики) и еще одной антиканонической гиперповерхности во взвешенном проективном пространстве (из списка Корти–Пухликова–Рида). Излагаются также результаты И. Чельцова о бирациональной жесткости гладких гиперповерхностей степени N в $\mathbb{P}^N$ для $4 \leq N \leq 8$ с использованием теоремы В. Шокурова о связности.

Библиография: 62 названия.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Глава I. Некоторые сведения из теории Мори	4
§ 1. Конус кривых	5
§ 2. Допустимые особенности	9
§ 3. Обзор ПММ и лог-ПММ: основные теоремы и гипотезы	22
Глава II. Факторизация бирациональных отображений между Мори расслоенными пространствами	41
§ 1. Программа Саркисова	42
§ 2. Обрыв алгоритма разложения на элементарные линки	54
§ 3. Приложения: бирациональная жесткость некоторых 3-мерных ги- перповерхностей Фано	58
Глава III. О бирациональной жесткости гиперповерхностей степени N в $\mathbb{P}^N$	71
§ 1. Предварительные сведения	71
§ 2. Основные утверждения и следствия из них	74
§ 3. Доказательство теоремы А	77
Список литературы	84

Введение

Настоящие записки – это краткий отчет о цикле лекций, который автор прочитал в последние два года на механико-математическом факультете МГУ. Общее содержание цикла – теория Мори и ее приложения к бирациональной геометрии Мори расслоенных пространств. Центральное место занимает так называемая программа Саркисова о факторизации бирациональных отображений между Мори расслоенными пространствами на элементарные линки. Это осуществляется согласно Корти [7] в рамках лог-программы минимальных моделей. Другое важное приложение лог-программы минимальных моделей – это результаты Чельцова [4], [5] о бирациональной жесткости гладких гиперповерхностей степени N в $\mathbb{P}^N$, $4 \leq N \leq 8$.

Статья состоит из трех глав. В главе I дан краткий обзор программы минимальных моделей Мори и лог-программы минимальных моделей, начиная с определения и свойств допустимых особенностей. Глава II посвящена изложению результатов Корти [7] по программе Саркисова. В качестве приложений этих результатов приведено доказательство жесткости гладкой 3-мерной кватрики и разобран с этой точки зрения один из 95 случаев (по работе Корти–Пухликова–Рида [9]) квазигладких 3-мерных гиперповерхностей Фано во взвешенных проективных пространствах.

В главе III обсуждаются результаты Пухликова [49] и Чельцова [4], [5] о бирациональной жесткости гладких гиперповерхностей степени N в $\mathbb{P}^N$, $N \geq 4$. Следуя Чельцову [5], приводится доказательство бирациональной сверхжесткости таких гиперповерхностей для $4 \leq N \leq 8$. Описываются также все структуры K -тривиальных расслоений на них.

Ввиду ограниченности объема в эти записки не вошли результаты приложения программы Саркисова к расслоениям на коники (см. [16]) и к Дель Пеццо расслоениям (см. [8]).

Глава I. Некоторые сведения из теории Мори

В этой главе мы изложим кратко элементы теории Мори минимальных моделей алгебраических многообразий. В современной трактовке – это бирациональная теория пар (X, D) , где X – алгебраическое многообразие и D – дивизор с рациональными коэффициентами. Первоначально Мори, Рид, Кавамата, Коллар, Шокуров и др. работали с $D = 0$ с целью развить теорию минимальных моделей многомерных алгебраических многообразий, обобщающую классическую теорию минимальных моделей алгебраических поверхностей. Однако вскоре обнаружилось, что кроме категории Мори пар $(X, 0)$ и его программы минимальных моделей (сокращенно ПММ) очень важной для приложений оказалась более общая категория лог-пар (X, D) и лог-программа минимальных моделей (сокращенно лог-ПММ). Лог-ПММ оказалась глубоко содержательной даже в случае поверхностей, где обычная ПММ совпадает с классической теорией минимальных моделей. Замечательное наблюдение состоит в том, что в обеих программах основные теоремы и гипотезы формулируются и доказываются практически одинаково; разница только в характере допустимых особенностей: ПММ работает в категории Мори нормальных проективных многообразий с $\mathbb{Q}$ -факториальными терминальными особенностями, а лог-ПММ – в категории пар (X, D) с $\mathbb{Q}$ -факториальными лог-терминальными особенностями (см. §§ 2 и 3).

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-01132) и INTAS-OPEN (грант № 97-2072).

В статье используются стандартные обозначения:

$\mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел;

$\mathbb{N}$ – натуральные числа;

$\mathbb{Q}$ – поле рациональных чисел;

$\mathbb{R}$ – поле вещественных чисел;

$\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел;

$\forall m \gg 0$ обозначает “для всех достаточно больших целых m ”;

$0 < \varepsilon \ll 1$ обозначает достаточно малое вещественное или рациональное число.

Основное поле в этом обзоре предполагается полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

§ 1. Конус кривых

1.1. Пусть X – неприводимое нормальное проективное многообразие размерности n . Напомним следующие обозначения.

$Z_r(X)$ – группа r -мерных циклов на X , т.е. свободная абелева группа, порожденная замкнутыми неприводимыми подмногообразиями размерности r , $0 \leq r \leq n-1$. В частности, $Z_{n-1}(X)$ – группа дивизоров Вейля на X , $\text{Div}(X)$ – группа дивизоров Картье на X ; существует естественное вложение (так как X нормально)

$$\text{Div}(X) \hookrightarrow Z_{n-1}(X),$$

образ которого состоит из тех дивизоров, которые локально в окрестности каждой точки могут быть заданы одним уравнением (иначе говоря, образ состоит из локально главных дивизоров).

Элементы $Z_{n-1}(X) \otimes \mathbb{Q}$ называются $\mathbb{Q}$ -дивизорами ($\mathbb{Q}$ – это поле рациональных чисел). $\mathbb{Q}$ -дивизор Вейля D называется $\mathbb{Q}$ -Картье, если $mD \in \text{Div}(X)$ для некоторого целого числа m . Простейший пример $\mathbb{Q}$ -Картье дивизора – это образующая прямая на квадратичном конусе в $\mathbb{P}^3$: в вершине конуса она не может быть задана одним уравнением, в то время как удвоенная она высекается касательной плоскостью.

$\text{Pic}(X)$ обозначает, как обычно, группу Пикара классов дивизоров Картье относительно линейной эквивалентности: $\text{Pic}(X) = \text{Div}(X)/(\text{mod } \sim)$. Эта группа естественно изоморфна группе обратимых пучков (или, равносильно, линейных расслоений) на X с точностью до изоморфизма.

$\mathbb{Q}$ -Картье дивизор $D \in \text{Div}(X) \otimes \mathbb{Q}$ называется *big* (в русской литературе иногда используется термин *объемный*), если $h^0(X, \mathcal{O}_X(mD)) > \text{const} \cdot m^n$ для достаточно больших $m \gg 0$ таких, что $mD \in \text{Div}(X)$.

$\mathbb{Q}$ -Картье дивизор $D \in \text{Div}(X) \otimes \mathbb{Q}$ называется *nef* (*численно эффективный*), если $D \cdot C \geq 0$ для любой кривой $C \subset X$. Пересечение определяется как рациональное число следующим образом: пусть $m \in \mathbb{Z}$ – такое целое число, что $mD \in \text{Div}(X)$, тогда

$$D \cdot C := \frac{1}{m} \deg(\mathcal{O}_X(mD) | C).$$

Для любого обратимого пучка $L \in \text{Pic}(X)$ степень $\deg(L | C)$ определяется как $\deg \nu^* L$, где $\nu: \overline{C} \rightarrow C$ – нормализация кривой C .

Циклы $z_1, z_2 \in Z_1(X)$ называются *численно эквивалентными* (что записывается в виде $z_1 \equiv z_2$), если $L \cdot z_1 = L \cdot z_2$ для всех $L \in \text{Pic}(X)$. По двойственности можно определить численную эквивалентность в группе $\text{Pic}(X)$. Спаривание

$$\text{Pic}(X) \times Z_1(X) \rightarrow \mathbb{Z}$$

индуцирует совершенное спаривание

$$N^1(X) \times N_1(X) \rightarrow \mathbb{R},$$

где $N^1(X) := \text{Pic}(X) \otimes \mathbb{R}/(\text{mod } \equiv)$ и $N_1(X) := Z_1(X) \otimes \mathbb{R}/(\text{mod } \equiv)$, $\mathbb{R}$ – поле вещественных чисел. Для $\text{Pic}(X) \otimes \mathbb{Q}/(\text{mod } \equiv)$ используется обозначение $N_{\mathbb{Q}}^1(X)$. Отметим, что для проективного многообразия X размерность $\dim_{\mathbb{R}} N^1(X) = \dim_{\mathbb{R}} N_1(X) = \rho < \infty$ – это число Пикара (ранг группы Нерона–Севери $NS(X)$).

Канонический дивизор K_X определяется как дивизор Вейля следующим образом. Пусть ω – рациональная дифференциальная n -форма на X , $X^0 \subset X$ – подмножество неособых точек в X , $K_{X^0} = (\omega^0)$ – дивизор формы $\omega^0 = \omega|_{X^0}$ и K_X – продолжение K_{X^0} на X ; оно однозначно ввиду нормальности X и открытости в топологии Зариского X^0 в X . Соответствующий пучок $\mathcal{O}_X(K_X)$ – рефлексивный пучок ранга 1, который локально свободен тогда и только тогда, когда $K_X \in \text{Div}(X)$ (см., например [50]). Класс дивизоров K_X называется *каноническим классом* и обозначается обычно так же.

Многообразие X называется *горенштейновым*, если K_X – дивизор Картье. Если $mK_X \in \text{Div}(X)$ для некоторого целого m , то X называется $\mathbb{Q}$ -горенштейновым. Для точки $x \in X$ наименьшее целое m_x такое, что $m_x K_X$ локально главный, называется *локальным индексом горенштейновости* в точке x , $\text{НОК}\{m_x \mid x \in X\}$ называется *глобальным индексом горенштейновости* на X .

1.2. ПРИМЕР. Пусть $F_4 \subset \mathbb{P}^5$ – поверхность Веронезе, т.е. образ плоскости $\mathbb{P}^2$ в $\mathbb{P}^5$ при отображении полной линейной системой коник $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)|$, и пусть $X \subset \mathbb{P}^6$ – конус над F_4 . Тогда $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}H$, где H – гиперплоское сечение. Обозначим через $G \subset X$ дивизор Вейля – конус над образом прямой $l \subset \mathbb{P}^2$ в F_4 . Тогда $-K_X = 3G \notin \text{Div}(X)$, так что особенность в вершине конуса X не горенштейнова. Но $2K_X = -6G = -3H \in \text{Div}(X)$, что означает $\mathbb{Q}$ -горенштейновость X индекса 2. Отметим, что локально вблизи вершины конус X может быть представлен как фактор $\mathbb{C}^3/\tau$, где τ – инволюция $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$. Выражение $(dx \wedge dy \wedge dz)^{\otimes 2} = (dx^2 \wedge dy^2 \wedge dz^2)^{\otimes 2} / 64x^2y^2z^2$ определяет 2-каноническую форму на X . Если $f: \bar{X} \rightarrow X$ – раздутие вершины $P \in X$ и $E = f^{-1}(P) \simeq \mathbb{P}^2$ – исключительный дивизор, то $\bar{X}$ неособо и $K_{\bar{X}} = f^*K_X + \frac{1}{2}E$.

1.3. Многообразие X называется $\mathbb{Q}$ -факториальным, если $Z_{n-1}(X) \otimes \mathbb{Q} = \text{Div}(X) \otimes \mathbb{Q}$, иначе говоря, если всякий дивизор Вейля является $\mathbb{Q}$ -Картье дивизором.

Для любого $\mathbb{Q}$ -дивизора $D = \sum d_i D_i$ следующие обозначения общеприняты:

$\lceil D \rceil := \sum \lceil d_i \rceil D_i$ – верхняя целая часть;

$\lfloor D \rfloor := \sum \lfloor d_i \rfloor D_i$ – нижняя (обычная) целая часть;

$\{D\} := \sum \{d_i\} D_i$ – дробная часть;

где для любого вещественного числа $d \in \mathbb{R}$ символ $\lceil d \rceil$ обозначает наименьшее целое число $\geq d$, $\lfloor d \rfloor$ – наибольшее целое $\leq d$, $\{d\} = d - \lfloor d \rfloor$ – дробная часть.

1.4. Определим теперь важнейшее понятие теории – конус эффективных 1-циклов. Цикл $z = \sum n_i z_i \in Z_1(X)$ называется *эффективным*, если $n_i \geq 0 \ \forall i$. Напомним следующие стандартные обозначения (см. [30], [6]):

$$N(X) := Z_1(X) \otimes \mathbb{R}/(\text{mod } \equiv) = N_1(X);$$

$NE(X)$ – наименьший выпуклый конус в $N(X) \simeq \mathbb{R}^{\rho(X)}$, содержащий все эффективные 1-циклы;

$\overline{NE}(X)$ – конус Мори, т.е. замыкание $NE(X) \subset N(X)$ в обычной вещественной топологии;

$\rho(X) := \operatorname{rk} NS(X) = \dim_{\mathbb{R}} N(X) = \dim_{\mathbb{R}} N^1(X)$ – число Пикара.

Отметим, что nef $\mathbb{Q}$ -Картье дивизор D является big, если и только если $D^n > 0$ (индекс самопересечения $\mathbb{Q}$ -Картье дивизора определен как рациональное число).

Следующий результат играет важную роль в теории Мори.

1.5. ТЕОРЕМА (критерий обильности Клеймана [34]). *Картье $\mathbb{Q}$ -дивизор D на многообразии X обилен тогда и только тогда, когда $D \cdot z > 0$ для всех $z \in \overline{NE}(X) \setminus \{0\}$ (иначе говоря, D – положительная линейная функция на $\overline{NE}(X) \setminus \{0\}$).*

Результаты о структуре конуса $\overline{NE}(X)$ будут приведены в §3, после того как в §2 будут определены допустимые особенности. А теперь определим ключевое понятие теории минимальных моделей – экстремальный луч.

Пусть, как и раньше, X – нормальное проективное многообразие. Предположим, что канонический дивизор $\mathbb{Q}$ -Картье. Напомним стандартные обозначения:

$\overline{NE}(X)_{K_X \geq 0} = \{z \in \overline{NE}(X) \mid K_X \cdot z \geq 0\}$ – положительная часть конуса Мори;

$\overline{NE}(X)_{K_X < 0} = \overline{NE}(X) - \overline{NE}(X)_{K_X \geq 0}$ – отрицательная часть конуса Мори;

для nef-дивизора $L \in \operatorname{Pic}(X) \otimes \mathbb{Q}$ $L^\perp = \{z \in N_1(X) \mid L \cdot z = 0\}$ обозначает опорную гиперплоскость к $\overline{NE}(X)$ в $N(X)$.

1.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ [6]. Полупрямая $R \in \overline{NE}(X)_{K_X < 0}$ вида

$$R = \overline{NE}(X) \cap L^\perp$$

для некоторого nef-дивизора $L \in \operatorname{Pic}(X) \otimes \mathbb{Q}$ называется *экстремальным лучом*; R является экстремальным в обычном смысле: если $z_1 + z_2 \in R$, $z_1, z_2 \in \overline{NE}(X)$, то $z_1 \in R$ и $z_2 \in R$, т.е. R лежит на границе $\overline{NE}(X)$ (по условию в отрицательной части конуса Мори, т.е. $K_X \cdot z < 0 \ \forall z \in R \setminus \{0\}$).

Отметим, что для существования экстремального луча необходимо, чтобы K_X не был численно эффективным, т.е. $\overline{NE}(X)_{K_X < 0} \neq \emptyset$. С каждым экстремальным лучом R связано *экстремальное стягивание*, т.е. проективный морфизм $\varphi = \varphi_R: X \rightarrow Y$ на нормальное многообразие Y , обладающий следующими свойствами (см., например, [6]):

- (i) $\varphi_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$, т.е. слои φ_R связны;
- (ii) неприводимая кривая $C \subset X$ отображается в точку $\iff [C] \in R$, где $[C]$ – класс численной эквивалентности C ;
- (iii) имеет место точная последовательность $0 \rightarrow \operatorname{Pic}(Y) \rightarrow \operatorname{Pic}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$, где последняя стрелка не нулевая, в частности, $\rho(X) = \rho(Y) + 1$.

Классификация экстремальных лучей и соответствующих экстремальных стягиваний для неособых проективных поверхностей и 3-мерных многообразий была получена Мори.

1.7. ТЕОРЕМА [44]. (i) На неособой поверхности X всякий экстремальный луч имеет вид $R_l = \mathbb{R}_+[l]$, где $[l]$ – класс кривой l в $\overline{NE}(X)$, и кривая l одна из следующих:

- а) l – (-1) -кривая на X и φ_R – стягивание l ;
- б) l – слой $\mathbb{P}^1$ -расслоения $\varphi_R: X \rightarrow Y$ над неособой кривой Y ;
- с) l – прямая на $\mathbb{P}^2$ и $\varphi_R: \mathbb{P}^2 \rightarrow pt$ – стягивание в точку.

(ii) На неособом 3-мерном проективном многообразии X всякий экстремальный луч имеет вид $R_l = \mathbb{R}_+[l]$, где $[l]$ – класс неособой рациональной кривой l в $\overline{NE}(X)$, и возможны только следующие случаи.

а) R_l не численно эффективен. В этом случае $\varphi_R: X \rightarrow Y$ – дивизориальное стягивание неприводимого исключительного дивизора E на кривую или в точку в Y . Возможные типы экстремальных лучей в этой ситуации указаны в таблице 1.1, где $\mu(R)$ – длина экстремального луча (т.е. $\mu(R) = \min\{-K_X \cdot C \mid C \text{ – кривая, } [C] \in R\}$).

ТАБЛИЦА 1.1

Тип R	φ и E	$\mu(R)$	кривая l
E1	$\varphi(E)$ – гладкая кривая и Y – гладкое многообразие	1	слой линейчатой поверхности $E \rightarrow \varphi(E)$
E2	$\varphi(E)$ – точка, Y неособо, $E \simeq \mathbb{P}^2$ и $\mathcal{O}_E(E) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$	2	прямая на $E \simeq \mathbb{P}^2$
E3	$\varphi(E)$ – обыкновенная двойная точка на Y , $E \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ и $\mathcal{O}_E(E) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(-1, -1)$	1	$pt \times \mathbb{P}^1$ или $\mathbb{P}^1 \times pt$ на $E \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$
E4	$\varphi(E)$ – двойная горенштейнова точка на Y , E – квадратичный конус в $\mathbb{P}^3$ и $\mathcal{O}_E(E) \simeq \mathcal{O}_E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)$	1	образующая прямая на конусе $E \subset \mathbb{P}^3$
E5	$\varphi(E)$ – четырехкратная негоренштейнова точка на Y , $E \simeq \mathbb{P}^2$ и $\mathcal{O}_E(E) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)$, как в вершине конуса над поверхностью Веронезе	1	прямая на $E \simeq \mathbb{P}^2$

б) R численно эффективен. В этом случае $\varphi_R: X \rightarrow Y$ – стягивание расслоенного типа (иначе говоря, относительная модель Фано), т.е. $\dim Y < \dim X$, $-K_X$ относительно φ_R -обилён, Y неособо, имеются только следующие возможности:

$\dim Y = 0$: в этом случае $\varphi_R: X \rightarrow pt$ – стягивание в точку; X – многообразие Фано, $\text{Pic } X \simeq \mathbb{Z}H$, $-K_X \sim rH$ обилён, $Hl = 1$ и $\mu(R) = r$, $r = 1, 2, 3, 4$;

$\dim Y = 1$:

ТАБЛИЦА 1.2

Тип R	φ	$\mu(R)$	кривая l
D1	общий слой $\varphi: X \rightarrow Y$ – поверхность Дель Пеццо степени d , $1 \leq d \leq 6$; все слои неприводимы	1	прямая в слое
D2	общий слой $\varphi: X \rightarrow Y$ – неособая квадрака в $\mathbb{P}^3$; особые слои – квадратичные конусы	2	прямая в слое
D3	$\varphi: X \rightarrow Y$ – $\mathbb{P}^2$ -расслоение (всегда локально тривиальное)	3	прямая в слое

$\dim Y = 2$:

Таблица 1.3

Тип R	φ	$\mu(R)$	кривая l
C1	$\varphi: X \rightarrow Y$ – расслоение на коники над неособой поверхностью Y ; есть вырожденные слои	1	неприводимая компонента приводимого слоя
C2	$\varphi: X \rightarrow Y$ – расслоение на коники без вырождений над неособой поверхностью Y	2	слой

1.8. ЗАМЕЧАНИЯ. (i) В случаях E1–E5, C1, D1–D3 последовательность

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(Y) \xrightarrow{\varphi^*} \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{(\cdot, l)} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

точна. В случае C2 это верно, если только $\varphi: X \rightarrow Y$ – $\mathbb{P}^1$ -расслоение, т.е. $\varphi: X \rightarrow Y$ локально тривиально в топологии Зариского.

(ii) В случаях E3–E5 особенность $\varphi(E)$ на Y можно локально записать в виде:

E3: $xy - zt = 0$ – невырожденная квадратичная (горенштейнова) особенность;

E4: $xy - z^2 - t^3 = 0$ – вырожденная квадратичная (горенштейнова) особенность;

E5: факторособенность $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2(1, 1, 1)$, где $\mathbb{Z}_2(1, 1, 1)$ – циклическая группа 2-го порядка, действующая по формуле $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$; это терминальная факторособенность типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ (см. 2.16, § 2) индекса горенштейновости 2, точно такая, как в примере 1.2.

(iii) В случаях E1–E5 морфизм φ бирационален и стягивает дивизор E (это *экстремальное дивизориальное стягивание*); в остальных случаях $\varphi: X \rightarrow Y$ – морфизм со связными слоями ненулевой размерности, $\dim Y < \dim X$ (это *экстремальное стягивание расслоенного типа*). Как мы увидим ниже (см. 3.12.2, § 3), на особых 3-мерных многообразиях с терминальными особенностями возможны также экстремальные бирациональные стягивания $\varphi_R: X \rightarrow Y$, стягивающие не дивизор, а только кривые (это *малые экстремальные стягивания флипового типа*). Отметим, что в более широкой лог-ПММ экстремальные стягивания лог-флипового типа в категории пар (X, D) возможны, когда даже X неособо (см. § 3).

На неособых многообразиях размерности ≥ 4 малые экстремальные стягивания также возможны в обычной ПММ (см. 3.12.2, § 3).

§ 2. Допустимые особенности

2.1. В лог-программе минимальных моделей (лог-ПММ) изучаются особенности пар (X, D) , где X – нормальное многообразие, а D – некоторый $\mathbb{Q}$ -дивизор; при этом, как обычно, при $D = 0$ мы получаем информацию об особенностях X , а при $D \neq 0$ – информацию об особенностях как X , так и D (что является содержательным, если даже X неособо). Характеристиками особенностей пары являются *дискрепантности* – рациональные числа, измеряющие отклонение лог-канонического дивизора $K_Z + D_Z$ на лог-разрешении $f: Z \rightarrow X$, где $D_Z = f_*^{-1}(D)$ – собственный прообраз дивизора D на Z , от полного прообраза $f^*(K_X + D)$ на X . Так как полный прообраз хорошо определен (как дивизор) только для дивизоров Картье, то всегда предполагается,

что $K_X + D$ является $\mathbb{Q}$ -Картье дивизором. *Лог-разрешение* определяется как проективный бирациональный морфизм $f: Z \rightarrow X$ такой, что Z неособо и объединение $(\bigcup D_{Z,i}) \cup (\bigcup E_j)$ всех компонент $\mathbb{Q}$ -дивизора $D_Z = f_*^{-1}(D)$ и всех исключительных дивизоров E_j является дивизором с нормальными пересечениями.

2.1.1. Предположим, что $K_X + D$ есть $\mathbb{Q}$ -дивизор Картье, т.е. $m(K_X + D)$ – дивизор Картье для некоторого целого m . Для любого собственного бирационального морфизма $f: Y \rightarrow X$ из нормального многообразия Y (в частности, для лог-разрешения) можно записать

$$m(K_Y + D_Y) = f^*(m(K_X + D)) + \sum (ma_i)E_i,$$

где $D_Y = f_*^{-1}(D)$ – собственный прообраз D на Y , $a_i \in \mathbb{Q}$ такие, что $ma_i \in \mathbb{Z}$, E_i – исключительные дивизоры. После деления на m обычно это записывается в виде $\mathbb{Q}$ -эквивалентности

$$K_Y + D_Y \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + D) + \sum_E a(E, X, D)E. \quad (2.1)$$

Часто вместо $\mathbb{Q}$ -эквивалентности используется более сильная численная эквивалентность “ $\equiv$ ”.

Рациональные числа $a(E, X, D)$ называются *дискрепантностями* пары (X, D) . Понятие дискрепантности естественно распространяется на все простые дивизоры, а не только на исключительные. Если $D = \sum d_i D_i$, $d_i \in \mathbb{Q}$, D_i – неприводимые компоненты, перепишем (2.1) в виде

$$K_Y \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + D) + \sum_E a(E, X, D)E + \sum (-d_i)D_{Y,i},$$

где $D_{Y,i} = f_*^{-1}(D_i)$ – собственные прообразы D_i на Y . Тогда по определению $a(D_{Y,i}, X, D) = a(D_i, X, D) = -d_i$; для всех других простых дивизоров на Y , отличных от $\{D_{Y,i}, E_j\}$, дискрепантность равна 0.

2.1.2. Набор рациональных чисел $\{a(E, X, D)\}$ зависит, конечно, от бирационального морфизма $Y \rightarrow X$ но каждое из этих чисел зависит только от собственного образа или прообраза дивизора E на Y' для другого бирационального морфизма $Y' \rightarrow X$, т.е. если $E' \subset Y'$ – бирациональный образ E на Y' , то $a(E', X, D) = a(E, X, D)$. Более инвариантное описание получается, если рассматривать дискретные (дивизориальные) нормирования ранга 1 поля функций $\mathbb{C}(X)$. Всякое такое нормирование v реализуется как нормирование, связанное с дивизором $E \subset Y$ для некоторого бирационального морфизма (возможно, тождественного изоморфизма) $f: Y \rightarrow X$. Замыкание образа $f(E)$ в X называется *центром* нормирования v (или E) на X и обозначается как $C(v, X)$ или $C(E, X)$.

Таким образом, определена функция

$$(\cdot, X, D): \{\text{дивизориальные нормирования поля } \mathbb{C}(X)\} \rightarrow \mathbb{Q}$$

для нормирований с непустым центром на X (если X полное, то всякое нормирование имеет центр).

2.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ [37]. Для пары (X, D) , как выше, определим инварианты – *дискрепантность* $\text{disc}(X, D)$ и *тотальную дискрепантность* $\text{tdisc}(X, D)$:

$$\text{disc}(X, D) := \inf_E \{a(E, X, D) \mid E \text{ – исключительные дивизоры} \\ \text{с непустыми центрами на } X\};$$

$$\text{tdisc}(X, D) := \inf_E \{a(E, X, D) \mid E \text{ пробегает все дивизоры поля } \mathbb{C}(X) \\ \text{с непустыми центрами на } X\}.$$

Легко проверяются следующие свойства этих инвариантов [37].

(i) Пусть $E \subset X$ – дивизор, отличный от D_i , тогда $a(E, X, D) = 0$, так что $\text{tdisc}(X, D) \leq 0$.

(ii) Пусть E – исключительный дивизор раздутья подмногообразия коразмерности 2, не лежащего в $\text{Sign } X \cup \text{Supp } D$ (объединении подмногообразия особенностей и носителя дивизора D), тогда $a(E, X, D) = 1$, так что $\text{disc}(X, D) \leq 1$.

(iii) Пусть X неособо, тогда $K_Y = f^*(K_X) + \sum a_i E_i$, $a_i > 0$, E_i – исключительные, так что $\text{disc}(X, 0) = 1$.

(iv) Инварианты $\text{disc}(X, D)$ и $\text{tdisc}(X, D)$ могут принимать только следующие значения:

$$\begin{aligned} -1 \leq \text{disc}(X, D) \leq 1 \quad \text{или} \quad \text{disc}(X, D) = -\infty, \\ -1 \leq \text{tdisc}(X, D) \leq 0 \quad \text{или} \quad \text{tdisc}(X, D) = -\infty. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Действительно, верхние границы уже указаны в (ii) и (i); если же $\text{disc}(X, D) < -1$ (соответственно $\text{tdisc}(X, D) < -1$), то существует последовательность раздутий X такая, что $a(E_i, X, D) \rightarrow -\infty$ (см., например, [6; п. 6.3]).

Отсюда видно, что указанные инварианты имеют количественное выражение только для ограниченного класса особенностей пар (X, D) (см. определение 2.3); для большинства особенностей эти инварианты равны $-\infty$.

(v) Если K_X и D_i являются $\mathbb{Q}$ -Картье, то для $D' = \sum d'_i D_i$ с $d'_i \geq d_i \forall i$ справедливо неравенство $\text{disc}(X, D') \leq \text{disc}(X, D)$.

2.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть X – нормальное многообразие и $D = \sum d_i D_i$ – $\mathbb{Q}$ -дивизор (не обязательно эффективный) такой, что $K_X + D$ есть $\mathbb{Q}$ -Картье. Пара (X, D) (или просто X , если $D = 0$) называется:

терминальный (term)	$\Longleftrightarrow$	$a(E, X, D) > 0 \quad \forall$ исключительного E ;
канонической (can)		$a(E, X, D) \geq 0 \quad \forall$ исключительного E ;
Кавамата лог-терминальной (klt)		$a(E, X, D) > -1 \quad \forall$ исключительного E и $\lfloor D \rfloor \leq 0$;
чисто лог-терминальной (plt)		$a(E, X, D) > -1 \quad \forall$ исключительного E ;
лог-терминальной (lt)		$a(E, X, D) > -1$ для всех исключительных E на некотором лог-разрешении;
дивизориально		$a(E, X, D) > -1$ для всех исключительных E на некотором лог-разрешении, исключительное множество которого состоит из дивизоров или $\emptyset$;
лог-терминальной (dlt)		
лог-канонической (lc)		$a(E, X, D) \geq -1 \quad \forall$ исключительного E .

Отметим, что можно определить klt также условием $\text{tdisc}(X, D) > -1$; условия для lc-, term-, can-, klt- и plt-особенностей достаточно проверить на каком-нибудь одном лог-разрешении, тогда они будут выполняться для всех разрешений (см. [37]). Понятие lt шире, чем plt (и, в частности, klt); например, пара (X, D) с $X = \mathbb{P}^2$ и $D = l_1 + l_2$, l_1, l_2 – различные прямые на $\mathbb{P}^2$, lt, но не plt (эта пара также lc). На $\mathbb{Q}$ -факториальном многообразии понятия lt и dlt совпадают и если $d_i < 1 \ \forall i$, то они совпадают также и с klt, в частности, для случая $D = 0$ (см. [38], [42]).

Терминальные $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности на $X = (X, 0)$ сохраняются при дивизориальных экстремальных стягиваниях и флипах, т.е. они замкнуты относительно применения ПММ. Категория проективных многообразий с такими особенностями обычно называется *категорией Мори* (см. [6], [42] и §3).

Аналогично, лог-терминальные $\mathbb{Q}$ -факториальные и klt $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности замкнуты относительно применения лог-ПММ (см. [30], [42] и §3 ниже).

Следующий результат характеризует особенности $X = (X, 0)$ в двумерном случае.

2.4. ТЕОРЕМА (см., например, [37], [42]). *Пусть $P \in X$ – росток нормальной двумерной особенности над $\mathbb{C}$. Тогда точка $P \in X$*

$$\begin{aligned} \text{term} &\iff \text{гладкая}; \\ \text{can} &\iff \mathbb{C}^2 / (G \subset SL(2, \mathbb{C}) - \text{конечная подгруппа}); \\ \text{lt} = \text{dlt} = \text{klt} &\iff \mathbb{C}^2 / (G \subset GL(2, \mathbb{C}) - \text{конечная подгруппа}); \\ \text{lc} &\iff \text{простая эллиптическая, параболическая, гладкая, а также} \\ &\quad \text{факторы таких особенностей по конечным группам.} \end{aligned}$$

Напомним, что особенность называется простой эллиптической, если при ее минимальном разрешении вклеивается гладкая кривая рода 1, и параболической, если при ее минимальном разрешении вклеивается приводимая кривая рода 1, составленная из неособых рациональных кривых, образующих комбинаторный цикл (“колесо”).

Двумерные канонические особенности – это в точности двойные рациональные, они же дувалевские, они же рациональные гиперповерхностные, локально задаваемые уравнениями вида:

$$\begin{aligned} A_n: \quad &x^2 + y^2 + z^{n+1} = 0, \quad n \geq 1; \\ D_n: \quad &x^2 + y^2 z + z^{n-1} = 0, \quad n \geq 4; \\ E_6: \quad &x^2 + y^3 + z^4 = 0; \\ E_7: \quad &x^2 + y^3 + yz^3 = 0; \\ E_8: \quad &x^2 + y^3 + z^5 = 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 обозначают графы исключительных (-2) -кривых для минимальных разрешений (см., например, [42]).

2.5. ПРИМЕРЫ [37; ш. 3.8, 3.9]. (i) Пусть Y – гладкое многообразие и $E \subset Y$ – гладкий дивизор с нормальным пучком $\mathcal{N}$. Если $\mathcal{N}^{-1}$ обилен, то E может быть стянуто в точку (по крайней мере в категории аналитических пространств). Пусть $f: Y \rightarrow X$ – это стягивание. Тогда K_X есть $\mathbb{Q}$ -Картье тогда и только тогда, когда K_E

и $\mathcal{N}$ линейно зависимы в $\text{Pic}(E)$. В этом случае $K_Y \equiv f^*(K_X) + aE$ и $K_E \equiv (1+a)\mathcal{N}$, так что

- а) если K_E обилён, то $a < -1$ и X не lc;
- б) если $K_E = 0$, то $a = -1$ и X lc;
- с) если $-K_E$ обилён, то E – многообразие Фано и имеются три возможности:
 - с') $K_E < \mathcal{N} < 0$, тогда $a > 0$ и X терминально; существует не так много многообразий Фано с этим свойством;
 - с'') $K_E = \mathcal{N}$, тогда $a = 0$ и X канонично; для каждого многообразия Фано получается только один пример;
 - с''') $\mathcal{N} < K_E$, тогда $-1 < a < 0$ и X лог-терминально; для каждого многообразия Фано возникает бесконечно много случаев.

(ii) Пусть X – гладкое многообразие и $D \subset X$ – целый дивизор, тогда все дискретности – целые числа и

- а) (X, D) терминально $\iff D = 0$;
- б) (X, D) канонично $\iff D$ приведен, нормален и имеет только рациональные особенности (см. [37; пп. 7.9, 11.1], а также 2.13, 2.14 ниже);
- с) если $\dim X = 2$, то (X, D) lc $\iff D$ – дивизор с нормальными пересечениями; в общем случае условия lc вряд ли поддаются описанию;
- д) $\dim X = n$ и D – $\mathbb{Q}$ -дивизор, $x \in X$ – точка, тогда (X, D) терминально в x (соответственно can, plt, lc) $\implies \text{mult}_x D < n - 1$ (соответственно $\leq n - 1, < n, \leq n$); обратное не верно.

Следующие утверждения непосредственно следуют из определений.

2.6. ПРЕДЛОЖЕНИЕ [37; п. 3.10]. (i) Пусть $f: Y \rightarrow X$ – проективный бирациональный морфизм, запишем $K_Y + D^Y \equiv f^*(K_X + D)$, тогда:

- а) $a(E, X, D) = a(E, Y, D^Y)$ для всех дивизоров поля $\mathbb{C}(X)$;
- б) (X, D) klt (соответственно lc) $\iff (Y, D^Y)$ klt (соответственно lc);
- с) (X, D) plt $\iff (Y, D^Y)$ plt и $a(E, X, D) > -1$ для каждого исключительного дивизора E морфизма f ;
- д) (X, D) term (соответственно can) $\iff (Y, D^Y)$ term (соответственно can) и $a(E, X, D) > 0$ (соответственно ≥ 0) для каждого исключительного дивизора морфизма f .

2.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ [37; 3.11]. Пусть X – гладкое многообразие, $\sum D_i$ – дивизор с нормальными пересечениями и $D = \sum d_i D_i$, $d_i \leq 1 \ \forall i$, – $\mathbb{Q}$ -дивизор (субграница в определении Шокурова [60]). Пусть $x \in X$ – точка (не обязательно замкнутая, т.е. может быть общей точкой любого неприводимого подмногообразия), E – дивизор поля $\mathbb{C}(X)$ с центром $C(E, X) = x$. Тогда:

- а) $a(E, X, D) \geq \text{codim}(x, X) - 1 - \sum_{D_j \ni x} d_j$;
- б) $\text{tdisc}(X, D) = \min\{0, d_i\}$;
- с) $\text{disc}(X, D) = \min\{1, 1 - d_i, 1 - d_i - d_j \mid D_i \cap D_j \neq \emptyset\}$.

2.8. СЛЕДСТВИЕ (см. [37; п. 3.12]). В условиях предложения 2.7 имеем: пара $(X, \sum d_i D_i)$

$$\begin{array}{l|l} \begin{array}{l} \text{терминальна} \\ \text{канонична} \\ \text{klt} \\ \text{lt} = \text{dlt} = \text{plt} \\ \text{lc} \end{array} & \iff \begin{array}{l} d_i < 1 \text{ и } d_i + d_j < 1, \text{ если } D_i \cap D_j \neq \emptyset; \\ d \leq 1 \text{ и } d_i + d_j \leq 1, \text{ если } D_i \cap D_j \neq \emptyset; \\ d_i < 1; \\ d_i \leq 1 \text{ и } d_i + d_j < 2, \text{ если } D_i \cap D_j \neq \emptyset; \\ d_i \leq 1. \end{array} \end{array}$$

СЛЕДСТВИЕ (см. [37; п. 3.13]). Пусть (X, D) – пара, $D = \sum d_i D_i$ и $f: Y \rightarrow X$ – лог-разрешение особенностей (т.е. f – проективный бирациональный морфизм, Y неособо и $\text{Exc}(f) \cup \text{Supp}(D_Y)$ – дивизор с нормальными пересечениями). Пусть $\{E_j\}$ – множество исключительных дивизоров морфизма f . Тогда

$$(X, D) \text{ lc} \iff \min\{a(E_j, X, D), -d_i\} \geq -1,$$

и если $(X, D) \text{ lc}$, тогда справедливы следующие утверждения:

- а) $\text{tdisc}(X, D) = \min\{a(E_j, X, D), -d_i\}$;
- б) $\text{disc}(X, D) = \min\{a(E_j, X, D), 1\}$;
- в) если $\text{Supp } D_Y$ – гладкий дивизор, то $\text{disc}(X, D) = \min\{a(E_j, X, D), 1 - d_i\}$, где $D_Y = f_*^{-1}(D)$ – собственный прообраз D на Y .

2.10. ГИПОТЕЗЫ. (i) (Шокуров [60]). Пусть X – нормальное многообразие, D – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор, $x \in X$ – замкнутая точка. Предположим, что $(K_X + D)$ – $\mathbb{Q}$ -дивизор Картье, тогда

$$\inf_E \{a(E, X, D) \mid C(E, X) = x\} \leq \dim X - 1$$

и равенство достигается тогда и только тогда, когда x – неособая точка на X и $x \notin \text{Supp}(D)$.

Эта гипотеза доказана для $\dim X \leq 3$ Д. Маркушевичем.

Для индукции по размерности очень важна следующая гипотеза, связывающая дискрепантности пары (X, D) и ее ограничения на дивизор $S \subset X$.

(ii) (Шокуров [60], см. также [38], [37]). Пусть X – нормальное многообразие, S – нормальный дивизор Картье и $B = \sum b_i B_i$ – $\mathbb{Q}$ -дивизор. Предположим, что $\mathbb{Q}$ -дивизор $(K_X + S + B)$ $\mathbb{Q}$ -Картье, тогда

$$\text{tdisc}(S, B \mid S) = \text{disc}(X, S + B \mid C(E, X) \cap S \neq \emptyset),$$

где в правой части рассматриваются только те дискрепантности, центры дивизоров которых пересекают S .

2.10.1. ЗАМЕЧАНИЯ. (i) [37; п. 7.1]. Проблему связи дискрепантностей на X и S можно сформулировать в двух вариантах для пар (X, B) и $(X, S + B)$, $S \notin \text{Supp}(B)$:

- а) если $(S, B \mid S) \text{ lc}$, будет ли $(X, S + B) \text{ lc}$?
- б) если $(S, B \mid S) \text{ lc}$, будет ли $(X, S + B) \text{ lc}$?

Нетрудно показать (см. [37; п. 7.1.3]), что на самом деле эти два вопроса эквивалентны.

(ii). Гипотеза 2.10 (ii) может быть поставлена также и в случае, когда $S \subset X$ – дивизор Вейля, но тогда возникают дополнительные трудности из-за того, что обычная формула присоединения в этом случае не действует: в формуле $(K_X + S) \mid S = K_S + \text{Diff}$ появляется дополнительное слагаемое – $\mathbb{Q}$ -дивизор Diff , называемый *дифференц* (см. [38; гл. 16, 17]).

(iii). В [38; п. 17.2] показано, что гипотеза 2.10 (ii) следует из лог-ПММ. Так как лог-ПММ завершена в размерностях ≤ 3 (см. § 3), то гипотеза верна в этих размерностях. С другой стороны, эта гипотеза очень полезна в доказательстве лог-ПММ и во многих приложениях, поэтому важно найти ее доказательство, не зависящее от лог-ПММ.

Остановимся теперь на некоторых результатах, связанных с гипотезой 2.10 (ii).

Легко доказывается импликация в одну сторону.

2.10.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ [34; п. 7.3.2]. *В условиях гипотезы 2.10 (ii) справедливо неравенство*

$$\text{tdisc}(S, B \mid S) \geq \text{disc}(X, S + B).$$

Следующий результат – *теорема Шокурова о связности* – используется для доказательства гипотезы 2.10 (ii), когда одна из сторон klt или lc. Этот результат интересен также и сам по себе: он будет использован в главах II и III ниже.

2.11. ТЕОРЕМА (Шокуров [60], Коллар [37], [38]). *Пусть X – нормальное многообразие и $D = \sum d_i D_i$ – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на X такой, что $(K_X + D)$ – $\mathbb{Q}$ -Картье. Пусть $f: Y \rightarrow X$ – лог-разрешение пары (X, D) . Запишем*

$$K_Y \equiv f^*(K_X + D) + \sum e_i E_i$$

и положим $A = \sum_{i: e_i > -1} e_i E_i$, $F = -\sum_{i: e_i \leq -1} e_i E_i$. Тогда $\text{Supp}(F) = \text{Supp}(\lfloor F \rfloor)$ связан в окрестности любого слоя f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (см. [37; п. 7.4]). По определению

$$\lceil A \rceil - \lfloor F \rfloor = K_Y + (-f^*(K_X + D)) + \{-A\} + \{F\},$$

где $\lceil H \rceil$, $\lfloor H \rfloor$, $\{H\}$ обозначают, как обычно, верхнюю, нижнюю и дробную часть $\mathbb{Q}$ -дивизора H . По относительной версии теоремы обращения в нуль Каваматы–Фивега (см. 3.3.1 ниже), имеем $R^1 f_* \mathcal{O}_Y(\lceil A \rceil - \lfloor F \rfloor) = 0$. Применяя f_* к точной последовательности пучков

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Y(\lceil A \rceil - \lfloor F \rfloor) \rightarrow \mathcal{O}_Y(\lceil A \rceil) \rightarrow \mathcal{O}_{\lfloor F \rfloor}(\lceil A \rceil) \rightarrow 0,$$

получаем, что отображение $f_* \mathcal{O}_Y(\lceil A \rceil) \rightarrow f_* \mathcal{O}_{\lfloor F \rfloor}(\lceil A \rceil)$ сюръективно.

Пусть E_j – неприводимая компонента A , тогда E_j либо исключительный дивизор, либо собственный прообраз некоторого D_i с $d_i < 1$, стало быть, дивизор $\Gamma A^\top$ полностью исключительный и, следовательно, $f_*\mathcal{O}_Y(\Gamma A^\top) = \mathcal{O}_X$. Предположим, что $\perp F \perp$ имеет по меньшей мере две компоненты связности: $\perp F \perp = F_1 \sqcup F_2$ в окрестности $f^{-1}(x)$ для некоторой точки $x \in X$. Тогда

$$f_*\mathcal{O}_{\perp F \perp}(\Gamma A^\top)_{(x)} \simeq f_*\mathcal{O}_{F_1}(\Gamma A^\top)_{(x)} \oplus f_*\mathcal{O}_{F_2}(\Gamma A^\top)_{(x)}$$

и ни одно из слагаемых не нулевое. Таким образом, $f_*\mathcal{O}_{\perp F \perp}(\Gamma A^\top)_{(x)}$ не может быть фактором циклического модуля $\mathcal{O}_{X,x} \simeq f_*\mathcal{O}_Y(\Gamma A^\top)_{(x)}$. Противоречие.

Вот первое следствие этого результата.

2.12. ТЕОРЕМА (обращение присоединения, Шокуров [60], Коллар [37; п. 7.5], Коллари др. [38]). *В условиях гипотезы 2.10 (ii) справедливы следующие утверждения:*

- (i) $(X, S + B) \text{ plt}$ *вблизи* $S \iff (S, B \mid S) \text{ klt}$;
- (ii) *предположим дополнительно, что B – $\mathbb{Q}$ -Картье и $S \text{ klt}$, тогда*

$$(X, S + B) \text{ lc} \text{ вблизи } S \iff (S, B \mid S) \text{ lc}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (см. [37; п. 7.5]). В обоих случаях импликация $\implies$ следует из 2.10.2. Обратно, для доказательства (i) рассмотрим лог-разрешение $f: Y \rightarrow X$ и запишем, как в 2.11,

$$K_Y \equiv f^*(K_X + S + B) + A - F.$$

Пусть $S' = f_*^{-1}(S)$ – собственный прообраз и $F = S' + F'$. По обычной формуле присоединения

$$K_{S'} = f^*(K_S + B \mid S) + (A - F') \mid S'.$$

Ясно, что $(X, S + B) \text{ plt}$ тогда и только тогда, когда $F' = \emptyset$, и $(S, B \mid S) \text{ plt}$ тогда и только тогда, когда $F' \cap S' = \emptyset$. По 2.11 $S' \cup F'$ связно, следовательно, $F' = \emptyset \iff F' \cap S' = \emptyset$, это доказывает (i).

Далее, из определения видно, что

$$\begin{aligned} (X, S + B) \text{ lc} &\iff (X, S + cB) \text{ plt} \text{ для } c < 1; \\ (S, B \mid S) \text{ lc} &\iff (S, cB \mid S) \text{ klt} \text{ для } c < 1. \end{aligned}$$

Таким образом, (ii) следует из (i).

Другой важный частный случай гипотезы 2.10 (ii) дает следующая теорема.

2.13. ТЕОРЕМА (Стивенс [61], Коллар [37; п. 7.9]). *Пусть X – нормальное многообразие с обратимым дуализирующим пучком ω_X , $S \subset X$ – дивизор Картье. Тогда*

$$S \text{ can} \iff (X, S) \text{ can вблизи } S.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (см. [37; п. 7.9]). По 2.10.2 если (X, S) канонично, то и S канонично. Обратно, пусть $f: Y \rightarrow X$ – лог-разрешение пары (X, S) и $T = f_*^{-1}(S)$ – собственный прообраз S . Рассмотрим точные последовательности

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \omega_Y \longrightarrow \omega_Y(T) \longrightarrow \omega_T \longrightarrow 0, \\ 0 &\longrightarrow \omega_X \longrightarrow \omega_X(S) \xrightarrow{r} \omega_S \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Опуская первую точную последовательность на X , получаем диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & f_*\omega_Y & \longrightarrow & f_*\omega_Y(T) & \longrightarrow & f_*\omega_T \longrightarrow R^1f_*\omega_Y = 0 \\ & & \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \omega_X & \longrightarrow & \omega_X(S) & \xrightarrow{r} & \omega_S & \longrightarrow & 0 \end{array}.$$

Так как отображение $f_*\omega_Y \rightarrow \omega_X$ – вложение ($f_*\omega_Y$ не имеет кручений и $R^1f_*\omega_Y = 0$ по относительной теореме обращения в нуль 3.3.1, ниже), то $f_*\omega_Y(T) \rightarrow f_*(\omega_Y \otimes f^*\mathcal{O}_X(S)) = f_*\omega_Y \otimes \mathcal{O}_X(S) \rightarrow \omega_X(S)$ также вложение и γ – изоморфизм, так как S канонично. Следовательно, $r \circ \beta$ сюръективно и по лемме Накаямы β само сюръективно в окрестности S , т.е. β – изоморфизм вблизи S . Так как пучок $\omega_X(S)$ локально свободен и β – изоморфизм, то имеется отображение $f^*\omega_X(S) \rightarrow \omega_Y(T)$, т.е. $\omega_Y(T) = f^*\omega_X(S) \otimes \mathcal{O}_Y(E)$ для некоторого эффективного дивизора E на Y . В обычной записи $K_Y + T = f^*(K_X + S) + E$, что означает каноничность (X, S) вблизи S .

В дополнение к этой теореме упомянем о следующем глубоком результате, относящемся к вопросу о рациональности, полученном Элликком, Фленнером, Фуджитой и доказанном в общем виде в [30]. Коллар [37] несколько упростил доказательство.

2.14. ТЕОРЕМА [37; п. 11.1]. Пусть X – нормальное многообразие.

- (i) Предположим, что ω_X локально свободен. Тогда X имеет рациональные особенности, если и только если X имеет канонические особенности.
- (ii) Предположим, что пара (X, D) klt, тогда X имеет рациональные особенности.

Напомним, что многообразие X имеет только рациональные особенности, если для разрешения $f: Y \rightarrow X$ с $f_*\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X$ выполняется условие $R^i f_*\mathcal{O}_X = 0 \ \forall i > 0$.

2.14.1. ЗАМЕЧАНИЕ. Если ω_X не локально свободен, то понятия каноничности и рациональности особенностей перестают быть эквивалентными. Большинство рациональных особенностей не klt и даже не lc. Например, нормальная 2-мерная особенность klt $\iff$ факторособенность по конечной подгруппе $G \subset GL(2, \mathbb{C})$, см. 2.4, но существует много 2-мерных рациональных особенностей, которые не являются факторособенностями (см. [2]).

2.15. Приведем теперь краткий обзор классификации 3-мерных терминальных особенностей. Канонические и терминальные особенности для 3-мерных многообразий были впервые определены и изучались в работах М. Рида в конце 70-х годов (см. [50], [52]). Канонические особенности характеризовались как особенности, возникающие на канонических моделях многообразий общего типа $X_{\text{can}} = \text{Proj} \bigoplus_{m \geq 0} H^0(X, mK_X)$,

когда каноническое кольцо $R(X) = \bigoplus_{m \geq 0} H^0(X, mK_X)$ конечно порождено как $\mathbb{C}$ -алгебра, терминальные – как допустимые особенности, возникающие в обычной ПММ, начинающейся с неособых многообразий.

Несколько позднее усилиями Рида, Уайта, Моррисона, Стивенса, В. Данилова, М. Фрумкина, Мори, Шеферд-Баррона, Коллара 3-мерные терминальные особенности были полностью изучены. Полная классификация была получена Мори [45], результаты подытожены в заключительном обзоре Рида [52].

Начнем с некоторых основных определений.

2.15.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ. (i) Трехмерная гиперповерхностная (т.е. локально заданная одним уравнением) особенность $P \in X : (F = 0) \subset \mathbb{C}^4$,

$$F(x, y, z, t) = f(x, y, z) + tg(x, y, z, t) = 0,$$

где $f(x, y, z) = 0$ – уравнение 2-мерной канонической особенности A, D, E в (2.3), g – произвольный многочлен, называется *cDV-особенностью* (или *cDV-точкой*, если особенность изолированная). Таким образом, cDV-особенности – это в точности 3-мерные особенности, гиперплоские сечения которых суть 2-мерные канонические (дювалевские) особенности. С другой стороны, это 1-параметрические деформации дювалевских особенностей.

(ii) Бирациональный морфизм $f: Y \rightarrow X$, $K_X \in \text{Pic}(X) \otimes \mathbb{Q}$, нормальных многообразий называется *крепантным*, если $K_Y = f^*(K_X)$.

Отметим, что различие в определениях канонических и терминальных особенностей только в том, что канонические особенности могут иметь нулевые дискрепантности в некоторых исключительных дивизорах. Поэтому естественно возникает вопрос о возможности частичного крепантного разрешения канонических особенностей. Вот некоторые первоначальные результаты о 3-мерных канонических и терминальных особенностях.

2.15.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ [52]. (i) Пусть $P \in X$ – каноническая горештейнова 3-мерная особенность, тогда существует частичное крепантное разрешение $f: Y \rightarrow X$ такое, что Y имеет не более чем cDV-особенности.

(ii) Трехмерные терминальные особенности – это изолированные (нульмерные) точки.

(iii) Трехмерная изолированная рациональная горештейнова особенность терминальна тогда и только тогда, когда она cDV-точка.

Отметим, например, что изолированность 3-мерных терминальных особенностей есть следствие того, что двумерные терминальные – это только неособые точки. Отсюда получается также и более общее утверждение, что n -мерные терминальные особенности имеют коразмерность ≥ 2 .

2.16. Чтобы сформулировать окончательные результаты классификации 3-мерных терминальных особенностей, определим сначала *циклические факторособенности*. Обозначим, как обычно, через μ_r циклическую группу корней r -й степени из 1; выбор первообразного корня ε задает изоморфизм $\mu_r \simeq \mathbb{Z}_r = \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$. Действие μ_r на $\mathbb{C}^n$ диагонализуемо, и в собственных относительно этого действия координатах его можно записать в виде:

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (\varepsilon^{a_1} x_1, \dots, \varepsilon^{a_n} x_n), \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}.$$

Всегда предполагается, что действие μ_r на $\mathbb{C}^n$ свободно в коразмерности 1 (нет “квазиотражений”, см. §3), т.е. $(a_1, \dots, a_n) = 1$. Циклическая факторособенность $X = \mathbb{C}^n / \mu_r = \mathbb{C}^n / \mathbb{Z}_r(a_1, \dots, a_n)$ обозначается, следуя Риду, как $\frac{1}{r}(a_1, \dots, a_n)$.

Аналогично если $Q \in Y : (F = 0) \subset \mathbb{C}^{n+1}$ – гиперповерхностная нормальная особенность с действием μ_r и $P \in X = Y / \mu_r$. Действие μ_r продолжается до действия на $\mathbb{C}^{n+1}$ (как действие на касательном пространстве особенности Q), и можно считать это действие диагональным

$$(x_0, \dots, x_n) \mapsto (\varepsilon^{a_0} x_0, \dots, \varepsilon^{a_n} x_n), \quad \varepsilon \in \mu_r.$$

Так как Y неподвижно при этом действии, то F является собственной функцией

$$F \mapsto \varepsilon^e F.$$

Символ $\frac{1}{r}(a_0, \dots, a_n; e)$ обозначает тип *гипер-факторособенности* P .

Пусть $s = \text{Res}_Y \frac{dx_0 \wedge \dots \wedge dx_n}{F} = \frac{dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n}{\partial F / \partial x_0} \in \omega_Y$ – стандартная образующая, т.е. базисный элемент $\mathcal{O}_{Y,y}$ -модуля $\omega_{Y,y}$ в любой неособой точке $y \in Y$ (выраженная в соответствующих локальных координатах), и, стало быть, s – регулярная дифференциальная форма и в Q . Значит, $\omega_Y = \mathcal{O}_Y \cdot s$, так что для любого сечения $t \in \omega_Y$ можно записать $t = f \cdot s$ для некоторой функции $f \in \mathbb{C}(X)$ такой, что f – регулярна в каждой неособой точке $y \in Y$ и ввиду нормальности Y регулярна всюду на Y . Группа μ_r действует на s по формуле

$$s \mapsto \varepsilon^c s, \quad c = a_0 + \dots + a_n - e.$$

Предположение, что “ μ_r действует свободно в коразмерности 1 на Y ” означает, что для любого делителя $d \mid r$

$$\#\{i \mid d \text{ делит } a_i, i = 0, \dots, n\} \leq n - 1$$

(см. [52; 4, гл. II]).

Следующие результаты принадлежат Риду.

2.17. ТЕОРЕМА [52]. (i) *Всякая терминальная 3-мерная особенность $P \in X$ имеет вид Y / μ_r , где $Q \in Y$ – изолированная cDV-точка (или неособая точка), μ_r действует на Y свободно вне точки Q и $s \rightarrow \varepsilon s$ (в предыдущих обозначениях).*

(ii) *Пусть X – 3-мерное многообразие с каноническими особенностями, тогда существует крепантное частичное разрешение $f: Y \rightarrow X$, где Y имеет только терминальные особенности.*

Дальнейшее изучение связано, прежде всего, с выяснением условий, при которых фактор $\mathbb{C}^3 / \mu_r$ является каноническим и терминальным. Общий критерий каноничности и терминальности Риды гласит: факторособенность $X = \mathbb{C}^n / \mu_r$ типа $\frac{1}{r}(a_1, \dots, a_n)$ терминальна (соответственно канонична) тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^n \overline{ka_i} > r, \quad k = 1, \dots, r-1,$$

(соответственно $\geq r$), где $\overline{}$ обозначает наименьший вычет по mod r . По-другому это можно переформулировать следующим образом: при всяком выборе первообразного корня $\zeta \in \mu_r$ если $\varepsilon^{a_i} = \zeta^{b_i}$, то $\sum_{i=1}^n b_i > r$ (соответственно $\geq r$).

Этот критерий не очень удобен ввиду большого объема вычислений для его проверки. В размерности 3 удобный критерий терминальности был получен усилиями Уайта, Моррисона, Стивенса, Данилова и Фрумкина.

2.18. ТЕОРЕМА. *Трехмерная циклическая факторособенность $X = \mathbb{C}^3/\mu_r$ терминальна, если и только если она имеет вид $\frac{1}{r}(1, a, -a)$, $(a, r) = 1$.*

(Доказательство лучше всего изложено в [52].)

Полная классификация 3-мерных терминальных особенностей было завершено Мори [45] (см. также [52]).

2.19. ТЕОРЕМА. (i) *Пусть $P \in X = (Q \in Y) \mid \mu_r$ – терминальная особенность (см. 2.17 (i)), где $r > 1$ и $Q \in Y$ – особая cDV-точка. Тогда P принадлежит одному из следующих шести семейств (m_Q – максимальный идеал точки $Q \in Y$):*

№	r	тип	F	условия
1	> 1	$\frac{1}{r}(a, -a, 1, 0; 0)$	$xy + g(z^r, t)$	$g \in m_Q^2$, $(a, r) = 1$
2	4	$\frac{1}{4}(1, 1, 3, 2; 2)$	$xy + z^2 + g(t)$ или $x^2 + z^2 + g(y, t)$	$g \in m_Q^3$, $g \in m_Q^3$
3	2	$\frac{1}{2}(0, 1, 1, 1; 0)$	$x^2 + y^2 + g(z, t)$	$g \in m_Q^4$
4	3	$\frac{1}{3}(0, 2, 1, 1; 0)$	$x^2 + y^3 + z^3 + t^3$, $x^2 + y^3 + z^2 t + yg(z, t) + h(z, t)$, $x^2 + y^3 + z^3 + yg(z, t) + h(z, t)$	$g \in m_Q^4$, $h \in m_Q^6$, $g \in m_Q^4$, $h \in m_Q^6$
5	2	$\frac{1}{2}(1, 0, 1, 1; 0)$	$x^2 + y^3 + yzt + g(z, t)$, $x^2 + yzt + y^n + g(z, t)$, $x^2 + yz^2 + y^n + g(z, t)$	$g \in m_Q^4$, $g \in m_Q^4$, $n \geq 4$, $g \in m_Q^4$, $n \geq 3$
6	2	$\frac{1}{2}(1, 0, 1, 1; 0)$	$x^2 + y^3 + yg(z, t) + h(z, t)$	$g, h \in m_Q^4$, $h_4 \neq 0$

(ii) *Каждая из особенностей 1–6 терминальна, если только она изолирована (Мори, Коллар, Шеферд-Баррон).*

Отметим, что важным следствием этой классификации является то, что всякая 3-мерная терминальная особенность $P \in X$ обладает Q -сглаживанием, т.е. 1-параметрическим семейством деформаций X_z (полученным в результате деформации F в его собственном пространстве) таким, что все особые точки $P_i \in X_t$ вблизи нулевого слоя являются циклическими факторами $\mathbb{C}^3/\mu_r$. Это оказалось полезным во многих вычислительных вопросах, связанных с терминальными особенностями, например, в формуле для кратных родов типа формулы Римана–Роха для 3-мерных многообразий с каноническими особенностями (см. [52]).

2.20. В заключение этого параграфа обсудим еще один важный инвариант особенностей пар – это так называемый *лог-канонический порог*. Мы знаем, что если пара (X, D) не lc, то ее глобальная дискрепантность равна $-\infty$ (например, если $\mathbb{Q}$ -дивизор D содержит компоненты кратности > 1). Оказывается, что можно определить некоторый инвариант, который будет контролировать ситуацию и в этом случае.

2.20.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть (X, Δ) – lc-пара, $Z \subset X$ – замкнутая подсхема и D – эффективный $\mathbb{Q}$ -Картье $\mathbb{Q}$ -дивизор. *Лог-каноническим порогом* (или *lc-порогом*) дивизора D вдоль Z на (X, Δ) называется число

$$c_Z(X, \Delta, D) := \sup\{c \mid (X, \Delta + cD) \text{ lc на открытой окрестности } Z \subset X\}.$$

Обычно $\Delta = 0$, в таком случае пишем $c_Z(X, D)$ или просто $c_Z(D)$ вместо $c_Z(X, 0, D)$. Перечислим некоторые простые свойства.

2.20.2. ЛЕММА [37]. *Имеем:*

- (i) $c_Z(X, \Delta, D) \geq 0$ и $c_Z(X, \Delta, D) = +\infty \iff D = 0$;
- (ii) $c_Z(X, \Delta, D) = \inf_{P \in Z} c_P(X, \Delta, D)$, P – замкнутая точка Z ;
- (iii) если D – целый дивизор (Вейля), то $c_Z(X, \Delta, D) \leq 1$.

Следующий результат позволяет вычислять или оценивать лог-канонический порог в конкретных ситуациях.

2.20.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ [37]. (i) В предыдущих обозначениях пусть $f: Y \rightarrow X$ – собственный бирациональный морфизм. Запишем

$$K_Y \equiv f^*(K_X + \Delta) + \sum a_i E_i, \quad f^*D = \sum b_i E_i,$$

тогда $c_Z(X, \Delta, D) \leq \min_{i: f(E_i) \cap Z \neq \emptyset} \{(a_i + 1)/b_i\}$.

(ii) Если $f: Y \rightarrow X$ – лог разрешение, то неравенство в (i) превращается в равенство, в частности, $c_Z(X, \Delta, D) \in \mathbb{Q}$.

Лог-канонический порог оказался очень тонким инвариантом особенностей пар, который используется в различных ситуациях, например, в доказательстве существования лог-флипа (Шокуров [60]). Следующая гипотеза имеет первостепенное значение. Обозначим через T_n следующее подмножество в $\mathbb{R}$ для фиксированной размерности n :

$$T_n := \{c_x(X, D) \mid x \in X \text{ klt-точка, } \dim X = n, D \text{ – эффективный дивизор Вейля}\}.$$

Согласно 2.20.2 и 2.20.3 имеем $T_n \subset (0, 1] \cap \mathbb{Q}$.

2.20.4. ГИПОТЕЗА (Шокуров [60]). Для каждого n множество T_n удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепочек, иначе говоря, всякое непустое подмножество в T_n имеет верхнюю грань в T_n .

Сам Шокуров доказал эту гипотезу для поверхностей, используя этот факт для доказательства существования 3-мерного лог-флипа. Позднее Алексеев [1] доказал ее в 3-мерном случае. Общий случай пока остается открытым. Доказанное утверждение гипотезы для T_3 будет использовано в следующей главе в рамках так называемой программы Саркисова факторизации бирациональных отображений 3-мерных Мори расслоений.

§ 3. Обзор ПММ и лог-ПММ: основные теоремы и гипотезы

3.1. В классической ситуации, когда X – гладкая проективная поверхность, если K_X не численно эффективен, то либо на X существует (-1) -кривая, либо X является $\mathbb{P}^1$ -расслоением над гладкой кривой. Стягивая (-1) -кривые, мы приходим либо к минимальной модели, либо к относительно минимальной модели, т.е. $\mathbb{P}^1$ -расслоению, либо, наконец, к плоскости $\mathbb{P}^2$.

Согласно замечательной идее Мори в произвольной размерности тоже можно установить стягивания (обобщающие стягивания (-1) -кривых на поверхности) экстремальных лучей в отрицательной части конуса $\overline{NE}(X)$, которые вместе с бирациональными перестройками-флипами в конечном итоге приведут либо к многообразию с численно эффективным каноническим классом – минимальной модели, либо к Мори расслоению $X \rightarrow S$ с относительно обильным $-K_X$. Для этого, как уже отмечалось, придется расширить категорию неособых проективных многообразий до категории Мори проективных $\mathbb{Q}$ -факториальных многообразий с терминальными особенностями.

При реализации этой идеи в работах многих математиков было замечено, что используемые методы пригодны и в более общей ситуации, когда вместо канонического дивизора K_X рассматривается лог-канонический дивизор $K_X + D$ с *граничным дивизором* (или простой *границей*) $D = \sum d_i D_i$, $0 \leq d_i \leq 1$, $d_i \in \mathbb{Q}$. (Приставка лог-возникла при изучении открытых многообразий с помощью дифференциальных форм с логарифмическими полюсами на границе в теории Иитаки.) Более общая лог-ПММ работает в лог-категории пар (X, D) , где X – проективное $\mathbb{Q}$ -факториальное многообразие с границей D и лог-терминальными особенностями. Если категория Мори – это наименьшая категория, содержащая неособые проективные многообразия и замкнутая относительно операций обычной ПММ, то лог-категория – это наименьшая категория, содержащая неособые лог-пары (X, D) (где X – неособое проективное многообразие с границей D такой, что $\text{Supp}(D)$ – дивизор с нормальными пересечениями), замкнутая относительно операций лог-ПММ.

3.2. Пусть (X, D) – $\mathbb{Q}$ -факториальная лог-терминальная пара с граничным дивизором $D = \sum d_i D_i$, $0 \leq d_i \leq 1$, $d_i \in \mathbb{Q}$. Если $K_X + D$ nef, то (X, D) называется *лог-минимальной моделью*. Если же $K_X + D$ не nef, то по теореме о конусе 3.10 существует $(K_X + D)$ -отрицательный экстремальный луч R . По теореме о стягивании существует экстремальное стягивание $\varphi_R = \varphi: X \rightarrow Y$ на нормальное проективное многообразие Y одного из следующих трех типов:

- (i) *дивизориальное стягивание* – бирациональный морфизм, исключительное множество $\text{Exc}(\varphi)$ которого является неприводимым дивизором;
- (ii) *малое экстремальное стягивание* (или *стягивание лог-флипового типа*) – бирациональный морфизм, исключительное множество которого имеет коразмерность ≥ 2 ;
- (iii) *экстремальное стягивание расслоенного типа* – морфизм $\varphi: X \rightarrow Y$ со связными слоями (т.е. $\varphi_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$), Y – нормальное проективное, $\dim Y < \dim X$, все кривые F в слоях φ численно пропорциональны и $(K_X + D)F < 0$.

В случае (i) Y – $\mathbb{Q}$ -факториально и пара $(Y, D_Y) := (Y, \varphi_* D)$ лог-терминальна, $\rho(Y) = \rho(X) - 1$, $-(K_X + D)$ относительно φ -обилён; так что если $(K_Y + D_Y)$ не nef, то алгоритм лог-ПММ может быть продолжен, если же $(K_Y + D_Y)$ nef, то $(Y, D_Y)_{\min}$ –

лог-минимальная модель и алгоритм закончен.

Если $D = 0$ и X терминально, то $Y = (Y, 0)$ $\mathbb{Q}$ -факториально и терминально, и если K_Y не nef, то алгоритм может быть продолжен в обычной ПММ.

В случае (ii) лог-канонический дивизор $K_Y + D_Y$ не является $\mathbb{Q}$ -дивизором Картье (т.е. Y уже не $\mathbb{Q}$ -факториально); в этом случае для продолжения алгоритма нужны теоремы о существовании и обрыве *лог-флипов* (обычных флипов в категории Мори, если $D = 0$) (см. гипотезы 3.14, 3.15).

В случае (iii) алгоритм лог-ПММ (обычной ПММ, если $D = 0$ и X терминально) считается законченным и пара (X, D) вместе с морфизмом $\varphi: X \rightarrow Y$ называется *лог-Мори расслоенным пространством* (если $D = 0$ и X терминально, то просто *Мори расслоенным пространством*).

Теоремы о конусе и о стягивании выводятся из следующих теорем: о свободе присоединенной линейной системы (см. 3.7), теоремы Шокурова о необращении в нуль (см. 3.8), теоремы о рациональности и ограниченности знаменателя (см. 3.9). Метод доказательства этих теорем – индукция по размерности, основное техническое средство – теорема Каваматы–Фивега об обращении в нуль.

3.3. ТЕОРЕМА (обращения в нуль Каваматы–Фивега [22], [62], [6], [37], [30], [40]). Пусть X – неособое проективное многообразие, $D = \sum d_i D_i$, $0 \leq d_i < 1$, – $\mathbb{Q}$ -дивизор с нормальными пересечениями, A – nef- и big- $\mathbb{Q}$ -дивизор такой, что $K_X + D + A$ – целый дивизор. Тогда

$$H^i(X, K_X + D + A) = 0 \quad \forall i > 0.$$

Эта теорема обобщает классическую теорему Кодaira об обращении в нуль (случай $D = 0$, A – целый обильный дивизор). Наиболее общая форма теорем об обращении в нуль, включающая в себя теорему Каваматы–Фивега, теорему Коллара об инъективности и относительный вариант – теорему об обращении в нуль, имеет следующий вид.

3.3.1. ТЕОРЕМА [37], [30]. Пусть X – нормальное полное многообразие, N – рефлексивный пучок ранга 1 на X вида $N \equiv K_X + D + M$, где M – $\mathbb{Q}$ -Картье $\mathbb{Q}$ -дивизор, и пара (X, D) klt. Тогда

(i) (глобальный вариант) если M nef и big, то

$$H^i(X, N) = 0 \quad \forall i > 0;$$

(ii) (теорема инъективности Коллара) если M nef и D, E – эффективные дивизоры Вейля такие, что $D + E \equiv tM$ для некоторого целого $t > 0$, то отображение

$$H^j(X, N) \rightarrow H^j(X, N(D))$$

инъективно для $j \geq 0$;

(iii) (относительный вариант) если $f: X \rightarrow Y$ – сюръективный морфизм с общим слоем X_η , M – f -nef и $M|_{X_\eta}$ big, то

$$R^j f_*(N) = 0 \quad \forall j > 0$$

- (отметим, что если f конечен в общей точке, например, бирационален, то $M \mid X_\eta$ всегда big);
- (iv) (отсутствие кручений) пусть $f: X \rightarrow Y$ – сюръективный морфизм, предположим, что $M \equiv f^*M_Y$, где M_Y – $\mathbb{Q}$ -Картье $\mathbb{Q}$ -дивизор на Y , тогда

$$R^j f_*(N) \text{ не имеет кручений для } j \geq 0.$$

Отметим, что классическая теорема Грауэрта–Рименшнайдера является частным случаем (iii), когда X неособо и $N = K_X$.

3.3.2. ЗАМЕЧАНИЕ. Часто теорема 3.3 используется в следующей эквивалентной формулировке: пусть A nef- и big- $\mathbb{Q}$ -дивизор, дробная часть которого $\{A\} = \lceil A \rceil - A$ имеет носитель с нормальными пересечениями, тогда $H^i(X, K_X + \lceil A \rceil) = 0 \ \forall i > 0$.

Доказательство следующего результата дает представление о методах доказательств основных теорем: о свободе присоединенной линейной системы, о необращении в нуль, о рациональности и ограниченности знаменателей.

3.4. ТЕОРЕМА [42]. Пусть X – неособое проективное многообразие и A – обильный целый дивизор на X . Предположим, что для замкнутой точки $x \in X$ и целого числа $m > 0$ существует эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $B \equiv mA$ такой, что $(K_X + B) \mid U \setminus \{x\}$ лог-каноничен в окрестности $U \setminus \{x\}$ точки x и не лог-каноничен в x . Тогда линейная система $|K_X + B|$ свободна в точке x , т.е. существует сечение $s \in H^0(X, K_X + mA)$ такое, что $s(x) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (см. [42; 6.1.1]). Прежде всего очертим план доказательства. Построим бирациональный морфизм $f: Y \rightarrow X$ из неособого проективного многообразия Y и рассмотрим точную последовательность пучков

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Y(f^*(K_X + mA) - F) \rightarrow \mathcal{O}_Y(f^*(K_X + mA)) \rightarrow \mathcal{O}_F(f^*(K_X + mA)) \rightarrow 0,$$

где F – приведенный дивизор с $f(F) = x$.

По теореме об обращении в нуль 3.3 $H^1(Y, \mathcal{O}_Y(f^*(K_X + mA) - F)) = 0$. Следовательно, возникает коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} H^0(Y, \mathcal{O}_Y(f^*(K_X + mA))) & \longrightarrow & H^0(F, \mathcal{O}_F(f^*(K_X + mA))) & \longrightarrow & 0 \\ \parallel & & \parallel & & \\ H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X + mA)) & \longrightarrow & H^0(F, \mathcal{O}_F) & \longrightarrow & 0 \end{array},$$

где $H^0(F, \mathcal{O}_F) \neq 0$, стало быть, существует $s \in H^0(X, K_X + mA)$ такое, что $s(x) \neq 0$.

Шаг 1. Рассмотрим лог-разрешение $f: Y \rightarrow X$ для пары (X, B) . Имеем

$$K_Y \equiv f^*(K_X + B) + \sum a_i E_i - f_*^{-1}(B) = f^*(K_X + B) + \sum a_j F_j,$$

где $\sum F_j = f_*^{-1}(\text{Supp } B) + \sum E_i$ – дивизор с нормальными пересечениями. По условию лог-каноничности $(K_X + B)$ на $U \setminus \{x\}$ и не лог-каноничности его в x

$$\sum_{a_j < -1} a_j F_j = \sum_{\substack{a_j < -1 \\ f(F_j) = x}} a_j F_j + \sum_{\substack{a_j < -1 \\ f(F_j) \neq x}} a_j F_j.$$

Шаг 2. Конструкция приведенного дивизора F . Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $K_X + B - \varepsilon B$ был в точности лог-каноничен в x , тогда

$$K_Y \equiv f^*(K_X + B - \varepsilon B) + \sum b_j F_j = f^*(K_X + B - \varepsilon B) - F + \sum_{b_j > -1} b_j F_j + \sum_{\substack{b_j \leq -1 \\ f(F_j) \not\ni x}} b_j F_j,$$

где F – приведенный дивизор с $f(F) = x$ (иначе говоря, $(1 - \varepsilon)$ – лог-канонический порог пары (X, B) в точке x , дивизор F связан по 2.11).

Прибавляя $f^*(\varepsilon B)$, получаем

$$K_Y + f^*(\varepsilon B) \equiv f^*(K_X + B) - F + \sum_{b_j > -1} b_j F_j + \sum_{\substack{b_j \leq -1 \\ f(F_j) \not\ni x}} b_j F_j$$

или

$$f^*(\varepsilon B) \equiv f^*(K_X + B) - F + \dots - K_Y.$$

Теперь, так как εB обилён, то $f^*(\varepsilon B)$ nef и big и, пользуясь критерием обильности Клеймана 1.5, добавим к нему $-\sum \delta_j F_j$ с $0 < \delta_j \ll 1$ для исключительных дивизоров F_j так, чтобы $\mathbb{Q}$ -дивизор

$$\begin{aligned} f^*(\varepsilon B) - \sum \delta_j F_j &\equiv f^*(K_X + mA) - F - \sum_{F_j \subset F} \delta_j F_j + \sum_{b_j - \delta_j > -1} (b_j - \delta_j) F_j \\ &\quad + \sum_{\substack{b_j - \delta_j \leq -1 \\ f(F_j) \not\ni x}} (b_j - \delta_j) F_j - K_Y \end{aligned}$$

стал обильным. Обозначим правую часть через R . Это $\mathbb{Q}$ -дивизор, носитель дробной части которого – дивизор с нормальными пересечениями. Верхняя целая часть от него равна

$$\lceil R \rceil = f^*(K_X + mA) - F + E - G - K_Y,$$

где $f(G) \not\ni x$ и E – эффективный исключительный дивизор для f .

Шаг 3. Применение теоремы обращения в нуль. Рассмотрим точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \mathcal{O}_Y(f^*(K_X + mA) + E - F - G) \rightarrow \mathcal{O}_Y(f^*(K_X + mA) + E) \\ &\rightarrow \mathcal{O}_{F \sqcup G}(f^*(K_X + mA) + E) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

По теореме 3.3 (см. также 3.3.2)

$$0 = H^1(Y, K_Y + \lceil R \rceil) = H^1(Y, f^*(K_X + mA) + E - F - G),$$

так что когомологическая последовательность

$$H^0(Y, f^*(K_X + mA) + E) \rightarrow H^0(F, E|_F) \oplus H^0(G, f^*(K_X + mA) + E) \rightarrow 0$$

точна. Так как дивизор E эффективен и не имеет общих компонент с F , то

$$0 \neq H^0(F, \mathcal{O}_F) \subset H^0(F, E|_F).$$

Следовательно, $\exists s \in H^0(Y, f^*(K_X + mA) + E) \simeq H^0(X, K_X + mA)$, $s(x) \neq 0$. Теорема доказана.

3.4.1. ЗАМЕЧАНИЯ. (i) Добавление $\mathbb{Q}$ -дивизора $-\sum \delta_j F_j$ здесь не было обязательным: можно было сразу применить теорему 3.3. Мы сделали это специально, чтобы продемонстрировать новый технический прием, который постоянно используется в этой теории.

(ii) Гипотеза Фуджиты (см., например, [37]) утверждает, что на неособом проективном многообразии X с обильным целым дивизором A линейная система $|K_X + mA|$ свободна (т.е. не имеет базисных точек и неподвижных компонент) при $m \geq \dim X + 1$ и очень обильна при $m \geq \dim X + 2$. Из теоремы 3.4 легко следует первое утверждение гипотезы Фуджиты для обильного дивизора A такого, что линейная система $|A|$ свободна (см. [42; 6.1.2]). Эта же идея концентрации большой кратности в точке $x \in X$ для $\mathbb{Q}$ -дивизора $B \equiv mA$ и выделения исключительного дивизора F используется в попытках общего доказательства гипотезы Фуджиты [37; п. 5].

3.5. По теореме о конусе 3.10 лог-отрицательная часть конуса $\overline{NE}(X)_{K_X + D < 0}$ порождена экстремальными лучами $R_l = \overline{NE}(X) \cap L^\perp$ для некоторых эффективных дивизоров Картье L . Так как $L \geq 0$ на $\overline{NE}(X)$ и обращается в нуль только на R_l , то естественно ожидать, что стягивание экстремального луча R_l осуществляется линейной системой $|mL|$ для $m \gg 0$. Стало быть, нужно доказать прежде всего, что $|mL|$ свободна. Разработанные в лог-ПММ методы позволяют доказывать отсутствие базисных точек (т.е. свободу) для присоединенных линейных систем вида $|K_X + B|$ или $|K_X + D + B|$, где B – обильный дивизор, а $D = \sum d_i D_i$, $0 \leq d_i < 1$, так чтобы можно было воспользоваться теоремой обращения в нуль на лог-разрешении. Эти методы аналогичны методу доказательства теоремы 3.4.

Чтобы представить $|mL|$ в таком виде, достаточно найти целое число $a > 0$, для которого $\mathbb{Q}$ -дивизор $H = aL - (K_X + D)$ был бы обилён. Это можно сделать по критерию Клеймана 1.3, так как $L \geq 0$ на $\overline{NE}(X)$, $L = 0$ только на R_l и $(K_X + D)R_l < 0$. Тогда $mL = K_X + H + (m - a)L = K_X + B$, если $D = 0$, и $mL = K_X + D + H + (m - a)L = K_X + D + B$, где B обилён.

Мы потребовали, чтобы $0 \leq d_i < 1$, однако в основных теоремах будут участвовать лог-терминальные пары (X, D) , где $D = \sum d_i D_i$ – граница, т.е. $0 \leq d_i \leq 1$. Редукция к случаю $0 \leq d_i < 1$ осуществляется просто: так как условие обильности открыто, то $aL - (K_X + D)$ останется обильным, если слегка уменьшить D , т.е. $aL - (K_X + (1 - \varepsilon)D)$ также обилён для $0 < \varepsilon \ll 1$, пара $(X, (1 - \varepsilon)D)$ останется $\mathbb{Q}$ -факториальной с лог-терминальными особенностями.

3.5.1. Индуктивное доказательство теоремы о свободе $|mL|$ основывается на теореме Шокурова [59] о необращении в нуль, утверждающей, что линейная система $|mL|$ не пуста для $m \gg 0$. В свою очередь, для доказательства теоремы о конусе нужно:

- найти численно эффективный дивизор Картье L такой, что $L^\perp \cap \overline{NE}(X) = R_l$ – экстремальный $(K_X + D)$ -отрицательный (т.е. $(K_X + D)R_l < 0$) луч;
- доказать, что лучи R_l дискретны в полупространстве $N_1(X)_{K_X + D < 0} = \{z \in N_1(X) \mid (K_X + D)z < 0\}$ и порождают $(K_X + D)$ -отрицательную часть $\overline{NE}(X)_{K_X + D < 0}$ конуса Мори $\overline{NE}(X)$.

Для этого L ищется в виде лог-присоединенного дивизора $H + r(K_X + D)$, стартуя с некоторого обильного дивизора Картье H , где $r := \sup\{t \in \mathbb{R} \mid H + t(K_X + D) \text{ численно эффективен}\}$ (здесь, как обычно, $\mathbb{Q}$ -Картье $\mathbb{Q}$ -дивизоры рассматриваются как линейные функции на $N_1(X) \supset \overline{NE}(X)$). Возникает естественный вопрос, бу-

дет ли линейная функция $H + r(K_X + D)$ $\mathbb{Q}$ -Картье дивизором, т.е. рационально ли число r ? Положительный ответ дает теорема о рациональности 3.9. Ограниченность знаменателя рационального числа r при любом выборе обильного дивизора Картье H гарантирует дискретность экстремальных лучей. Их существование выводится из теоремы о рациональности и ограниченности знаменателя 3.9 и того факта, что базис пространства $N^1(X)$ можно выбрать из обильных дивизоров Картье: из теоремы о рациональности следует, что $H + r(K_X + D)$ является опорной гиперплоскостью к $\overline{NE}(X)$, отсекающей некоторую грань F в отрицательной части $\overline{NE}(X)_{K_X + D < 0}$; выбор обильного H в конечномерном пространстве $N^1(X)$ и теорема об ограниченности знаменателя r позволяют выбрать одномерную грань, т.е. $(K_X + D)$ – отрицательный экстремальный луч R_l (см. [6], [42]).

По теореме о стягивании 3.11 существует проективный морфизм $\varphi: X \rightarrow Y$ со связными слоями такой, что φ не изоморфизм и $\varphi(C) = \text{pt}$ (точка), если и только если $[C] \in R_l$. Следовательно, существует кривая $l \subset X$, $[l] \in R_l$ и $R_l = \mathbb{R}_+[l]$.

Отметим, что изложенный здесь когомологический подход к ПММ и лог-ПММ не дает никакой информации о кривой l . В исходной работе Мори [44] теорема о конусе (в обычной ПММ) на неособых проективных многообразиях доказывалась с помощью теории деформации кривых, где было показано, что всякий экстремальный луч $R_l = \mathbb{R}_+[l]$ порождается неособой рациональной кривой l ограниченной длины, т.е. $0 < -K_X l \leq \dim X + 1$.

Пользуясь техникой Мори в дополнение к когомологической теории, Кавамата [25] получил следующий результат.

3.6. ТЕОРЕМА (о длине экстремального луча). *Пусть (X, D) – нормальная проективная $\mathbb{Q}$ -факториальная лог-терминальная пара с границей $D = \sum d_i D_i$, $0 \leq d_i \leq 1$. Пусть $\varphi: X \rightarrow Y$ – морфизм такой, что $-(K_X + D)$ относительно φ обилён. Тогда каждая неприводимая компонента E исключительного множества $\text{Exc}(\varphi)$ покрывается рациональными кривыми l такими, что $0 < -(K_X + D)l \leq 2(\dim E - \dim \varphi(E))$, если $\varphi(l) = \text{pt}$ на Y . В частности, любой экстремальный луч $R_l = \mathbb{R}_+[l]$ для рациональной кривой l , удовлетворяющей предыдущему неравенству.*

3.6.1. ЗАМЕЧАНИЯ. (i) В качестве следствия этой теоремы немедленно получается дискретность экстремальных лучей в полупространстве $N_1(X)_{K_X + D < 0}$ (см., например, [42; п. 10.3.2]).

(ii) Другим следствием является следующее утверждение: каждая неприводимая компонента E в $\text{Exc}(\varphi)$ унилинейчатая, в частности, всякое (лог) Мори расслоенное пространство унилинейчатое. Это обобщает результат Мияоки–Мори [43].

(iii) Третьим важным следствием является теорема о рациональности и ограниченности знаменателя для численно эффективных дивизоров Картье L , т.е. для неотрицательного числа

$$r := \sup\{t \in \mathbb{R} \mid L + t(K_X + D) \text{ численно эффективен}\}$$

(если $K_X + D$ не численно эффективен) имеем $r/e = p/q$, $p, q \in \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$ и $q \leq 2e \dim X$, где $e := \min\{m \in \mathbb{N} \mid m(K_X + D) \text{ – дивизор Картье}\}$ – индекс лог-горенштейновости дивизора $K_X + D$. Теорема рациональности и ограниченности знаменателя 3.9 утверждает это только для обильных дивизоров Картье H . Эта теорема

для численно эффективных дивизоров используется в доказательстве теоремы об избыточности (в лог-варианте) для 3-мерных многообразий [32].

Теперь сформулируем основные теоремы и гипотезы, опуская доказательства из-за ограниченности объема записок.

3.7. ТЕОРЕМА (о свободе линейной системы [6], [42], [30]). Пусть (X, D) – лог-пара, как и выше, с границей $D = \sum d_i D_i$, $0 \leq d_i \leq 1$, L – численно эффективный дивизор Картье такой, что $H = aL - (K_X + D)$ обилен для некоторого $a \in \mathbb{N}$. Тогда линейная система $|mL|$ свободна для $m \gg 0$.

Утверждение остается верным и в категории Мори, т.е. когда $D = 0$ и X имеет $\mathbb{Q}$ -факториальные терминальные особенности (терминальные особенности являются, в частности, и лог-терминальными).

ИДЕЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Прежде всего, можно считать, что $d_i < 1 \ \forall i$; как уже отмечалось в п. 3.5, условие обильности открыто. Далее используется теорема Шокурова о необращении в нуль 3.8. По этой теореме для простого числа $p \gg 0$ линейная система $|pL|$ не пуста.

Пусть $f: Y \rightarrow X$ – лог-разрешение такое, что $\bigcup F_j = f_*^{-1}(D) \cup \text{Exc}(f) \cup f^{-1} \text{Bs } |pL|$ – дивизор с простыми нормальными пересечениями (т.е. все неприводимые компоненты неособы и пересекаются трансверсально), где $\text{Bs } |pL|$ обозначает базисное множество линейной системы. Тогда

$$K_Y \equiv f^*(K_X + D) + \sum a_i F_i - f_*^{-1}(D) = f^*(K_X + D) + \sum a_j F_j,$$

где $a_j > -1$ (так как $d_i < 1$), $|f^*pL| = f^*|pL| = |M| + \sum r_j F_j$, где линейная система $|M|$ не имеет базисных точек.

Рассмотрим $K_X + D + c(pL)$, где $c \in \mathbb{Q}$ – лог-канонический порог, т.е. $K_X + D + c(pL)$ в точности лог-канонично. Имеем

$$K_Y \equiv f^*(K_X + D + c(pL)) - cM + \sum (-cr_j + a_j)F_j,$$

так что $c = \min_{r_j \neq 0} \{(a_j + 1)/r_j\}$. Для $n \gg 0$ можно записать

$$f^*(aL - (K_X + D) + (p^n - a - cp)L) + cM \equiv f^*(p^n L) + \sum (-cr_j + a_j)F_j - K_Y,$$

где дивизор в левой части, очевидно, nef и big. Добавляя, как в 3.4, к обеим частям $\mathbb{Q}$ -дивизор $-\sum \delta_j F_j$, $0 < \delta_j \ll 1$, можно сделать его обильным.

Тогда обильный дивизор в правой части

$$R = f^*(p^n L) + \sum (-cr_j + a_j - \delta_j)F_j - K_Y$$

имеет верхнюю целую часть $\lceil R \rceil = f^*(p^n L) - F + E - K_Y$, где F – приведенный дивизор с $f(F) \subset \text{Bs } |pL|$ и E – исключительный для f . Небольшим изменением δ_j можно добиться, чтобы F был неприводимым: он неособ, так как разрешение f выбрано с простыми нормальными пересечениями.

Из точной последовательности

$$0 \rightarrow f^*(p^n L) - F + E \rightarrow f^*(p^n L) + E \rightarrow (f^*(p^n L) + E)|_F \rightarrow 0$$

и теоремы обращения в нуль Каваматы–Фивега получаем

$$H^0(X, p^n L) \simeq H^0(Y, f^*(p^n L) + E) \rightarrow H^0(F, (f^*(p^n L) + E)|_F) \rightarrow H^1 = 0.$$

Из теоремы о необращении в нуль 3.8 мы хотим извлечь, что $H^0(F, (f^*(p^n L) + E)|_F) \neq 0$, тогда $f(F)$ не будет содержаться в $\text{Bs } |p^n L|$, стало быть, $\text{Bs } |p^n L| \neq \text{Bs } |pL|$ и по нётеровой индукции можно считать $\text{Bs } |p^n L| = \emptyset \ \forall n \gg 0$.

Для применения теоремы 3.8 рассмотрим ограничение

$$R|_F = p^n f^*(L)|_F + E|_F - (K_F + B_F), \quad \text{где } B_F = (\textstyle\bigcap R^\top - R)|_F.$$

Так как $R|_F$ обилён, $f^*(L)|_F$ численно эффективен, $E|_F = A$ – эффективный целый дивизор и B_F – граница с нормальными пересечениями, то по теореме 3.8

$$H^0(F, (f^*(p^n L) + E)|_F) \neq 0.$$

Аналогично, для другого простого числа $q \gg 0$ линейная система $|q^{n'} L|$ свободна, стало быть, для $m \gg 0$, $m = kp^n + lq^{n'}$, $k, l \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, $l \geq 0$, свободна линейная система $|mL|$. Теорема доказана.

3.7.1. ЗАМЕЧАНИЕ. Как видно из доказательства, утверждение теоремы 3.7 останется верным, если предполагать только, что пара (X, D) klt и H nef и big (см. [30]).

3.7.2. СЛЕДСТВИЕ (теорема об избыточности (abundance) для минимальных моделей многообразий общего типа, см., например, [59], [30]). Пусть $X = X_{\min}$ – минимальная модель в категории Мори (любой размерности), где X – многообразие общего типа, т.е. кодашова размерность $\kappa(X) = \dim X$, тогда линейная система $|mK_X|$ свободна для всех достаточно делимых $m \gg 0$, в частности, каноническое кольцо $R(X) := \bigoplus H^0(X, mK_X)$ конечно порождено.

3.8. ТЕОРЕМА (Шокурова о необращении в нуль [59], [6], [42], [30]). В условиях теоремы 3.7 пусть A – эффективный целый дивизор и L – численно эффективный дивизор Картье такие, что $\mathbb{Q}$ -дивизор $H = aL + A - (K_X + D)$ обилён для некоторого $a \in \mathbb{N}$. Тогда линейная система $|mL + A|$ не пуста $\forall m \gg 0$.

ИДЕЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Случай $L \equiv 0$ очень прост. Из теоремы Каваматы–Фивега $h^0(X, mL + A) = h^0(X, A) \neq 0$. Далее обычная редукция к случаю $d_i < 1$.

Для фиксированной точки $x_0 \in X - (\text{Sing } X \cup A \cup B)$ существуют $q \in \mathbb{N}$ и эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $B \equiv qL + A - (K_X + D)$ такой, что $\text{mult}_{x_0} B \geq n + 1$, где $n = \dim X$. Это важное наблюдение Шокурова о концентрации кратности в заданной точке выводится из теоремы Римана–Роха. Действительно, так как L численно эффективен и $L \neq 0$, то $L \cdot (aL + A - (K_X + D))^{n-1} > 0$. Следовательно, для $q \gg 0$

$$(qL + A - (K_X + D))^n > (n + 1)^n.$$

Для $m \gg 0$ таких, что $m(qL + A - (K_X + D))$ – целый дивизор Картье и $H^i(X, m(qL + A - (K_X + D))) = 0 \ \forall i > 0$ (по теореме Серра), имеем

$$h^0(X, m(qL + A - (K_X + D))) > \frac{(n + 1)^n}{n!} m^n.$$

С другой стороны, для того чтобы дивизор $M \in |m(qL + A - (K_X + D))|$ имел кратность $\geq m(n+1)$ в x_0 , нужно наложить

$$\binom{m(n+1) - 1 + n}{n} = \frac{(n+1)^n}{n!} m^n + a_1 m^{n-1} + \dots$$

условий. Следовательно, для $m \gg 0$ существует M такой, что $\text{mult}_{x_0} M \geq m(n+1)$.

Тогда $B = \frac{1}{m}M \equiv qL + A - (K_X + D)$ имеет $\text{mult}_{x_0} B \geq n+1$.

Выберем лог-разрешение $f: Y \rightarrow X$ такое, что $\bigcup F_j = f_*^{-1}(D) \cup \text{Exc}(f) \cup f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ – дивизор с простыми нормальными пересечениями. Пусть $f^*B = \sum r_j F_j$ и $c \in \mathbb{Q}$ такое, что дивизор

$$K_X + D - A + cB$$

в точности лог-каноничен, т.е. c – лог-канонический порог,

$$c = \min_{r_j \neq 0} \left\{ \frac{b_j + 1}{r_j} \right\} \leq \frac{n}{n+1} < 1,$$

так как $\text{mult}_{x_0} B \geq n+1$.

Далее, примерно так же, как и в доказательстве теоремы 3.7, имеет место точная последовательность

$$0 \rightarrow f^*(mL) - F + E \rightarrow f^*(mL) + E \rightarrow (f^*(mL) + E)|_F \rightarrow 0,$$

и соответствующая когомологическая последовательность

$$H^0(Y, f^*(mL) + E) \rightarrow H^0(F, (f^*(mL) + E)|_F) \rightarrow 0$$

точна. По предположению индукции $H^0(F, (f^*(mL) + E)|_F) \neq 0$, значит,

$$H^0(Y, f^*(mL) + E) \simeq H^0(X, mL + A) \neq 0,$$

что и требовалось доказать.

3.9. ТЕОРЕМА (о рациональности и ограниченности знаменателя [6], [30], [42]). Пусть, как и раньше, (X, D) – $\mathbb{Q}$ -факториальная лог-терминальная пара, $D = \sum d_i D_i$, $0 \leq d_i \leq 1$, H – обильный дивизор Картье на X . Предположим, что $(K_X + D)$ не численно эффективен, тогда положительное число

$$r := \sup\{t \in \mathbb{R} \mid H + t(K_X + D) \text{ численно эффективен}\}$$

рационально и, более того, если $r/e = p/q$, $p, q \in \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$, где $e := \min\{m \in \mathbb{N} \mid m(K_X + D) - \text{дивизор Картье}\}$ – индекс лог-горючести дивизора $K_X + D$, то $q \leq e(\dim X + 1)$.

Ясно, что утверждения остаются верными и в категории Мори, когда $D = 0$ и X – $\mathbb{Q}$ -факториально и терминально.

ИДЕЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Следующие предположения: а) r не рационально или б) $r \in \mathbb{Q}$, но $q > e(\dim X + 1)$, приводят к противоречию следующим образом. Показывается, что в этих предположениях существуют целые натуральные числа $x, y \in \mathbb{N}$ такие, что $0 < ye - xr < 1$ и $\text{Bs } |xH + ye(K_X + D)| \neq \emptyset$, следовательно, $\mathbb{Q}$ -дивизор $H + \frac{ye}{x}(K_X + D)$ численно эффективен и $r < \frac{ye}{x}$, что противоречит определению числа r . Шаги редукций:

- (1) H можно предполагать очень обильным;
- (2) в предположении а) или б) существуют $y_0 \in \mathbb{N}$ и $0 < \varepsilon \ll 1$ такие, что $\forall x, y \in \mathbb{N}$ с $y \geq y_0$ и $0 < ye - xr < 1 - \varepsilon$ $|xH + ye(K_X + D)| \neq \emptyset$;
- (3) если $\text{Bs } |xH + ye(K_X + D)| \neq \emptyset$, то найдутся $x', y' \in \mathbb{N}$ такие, что $y' \geq y_0$ и $0 < y'e - x'r < 1 - \varepsilon$ и $\text{Bs } |x'H + y'e(K_X + D)| \subset \text{Bs } |xH + ye(K_X + D)|$, но не совпадает с ним. Нётерова индукция приводит к противоречию.

Утверждения (2) и (3) доказываются тем же методом, что и теоремы 3.8 и 3.7. Кроме этих теорем и теоремы об обращении в нуль Каваматы–Фивега используется еще формула Римана–Роха для неособого d -мерного многообразия.

3.10. ТЕОРЕМА (о конусе [6], [30], [42]). Пусть, как и раньше, (X, D) – $\mathbb{Q}$ -факториальная лог-терминальная пара с границей $D = \sum d_i D_i$, $0 \leq d_i \leq 1$. Тогда

$$\overline{NE}(X) = \overline{NE}(X)_{K_X + D \geq 0} + \sum R_l,$$

где $\overline{NE}(X)_{K_X + D \leq 0} := \{z \in \overline{NE}(X) \mid (K_X + D)z \geq 0\}$ и R_l – экстремальные лучи, т.е. полупрямые в $\overline{NE}(X)_{K_X + D < 0}$ вида $R_l = \overline{NE}(X) \cap L^\perp$ для некоторого nef-дивизора Картье L .

Более того, R_l дискретны в полупространстве $N_1(X)_{K_X + D < 0}$.

Для каждого экстремального луча R_l существует кривая l такая, что $R_l = \mathbb{R}_+[l]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. Для любого nef-дивизора Картье M такого, что $\overline{NE}(X) \cap M^\perp \neq \emptyset$ и $\overline{NE}(X)_{K_X + D \geq 0} \cap M^\perp = \emptyset$, существуют $R_l \subset F_M = \overline{NE}(X) \cap M^\perp$. Цель – заменить M на nef- $\mathbb{Q}$ -дивизор $M + \varepsilon H$, где H обильный, чтобы уменьшить размерность грани F_M . Вместо $M + \varepsilon H$ можно рассматривать nef-дивизор $\nu M + H$ для больших целых ν . Положим

$$r_M(\nu, H) := \sup\{t \mid \nu M + H + t(K_X + D) - \text{nef-дивизор}\}.$$

Так как M – nef-дивизор, то $r_M(\nu, H)$ неубывающая функция по ν . Она имеет ограниченный знаменатель и ограничена сверху:

$$r_M(\nu, H) \leq \frac{H \cdot z}{-(K_X + D) \cdot z}, \quad z \in F_Z \setminus \{0\},$$

так что стабилизируется к $r_M(H)$ для $\nu \geq \nu_M(H)$. Пусть $M_{\nu(H)} = (\nu(H) + 1)M + H + r_M(H)(K_X + D)$. Тогда

$$0 \neq \overline{NE}(X) \cap M_{\nu(H)}^\perp \subset F_M.$$

Выберем базис в $N^1(X)$ из обильных дивизоров $H_1, \dots, H_\rho$, где $\rho = \dim N^1(X)$. Тогда $M_{\nu(H_i)} = 0$, $i = 1, \dots, \rho$, накладывая по крайней мере $\rho - 1$ линейно независимых условий, так что если $\dim F_M > 1$, то найдется $M_{\nu(H_i)}$ такое, что $0 \neq \overline{NE}(X) \cap M_{\nu(H_i)}^\perp \subset F_M$ и не совпадает с ним. Индукция по размерности доказывает утверждение.

Шаг 2. $\overline{NE}(X) = \overline{NE}(X)_{K_X + D \geq 0} + \overline{\sum R_l}$. Предположим, что $\overline{NE}(X)$ больше, чем правая часть, которую мы обозначим через R . Тогда существует дивизор Картье M такой, что $M > 0$ на R и $M \cdot z < 0$ для некоторого $z \in \overline{NE}(X)$. Тогда по критерию обильности Клеймана 1.3 существует положительное рациональное число a такое, что $H = h(M - a(K_X + D))$ – обильный дивизор Картье, где $h \in \mathbb{N}$ достаточно делимое число. По теореме 3.9 $L = l(H + r(K_X + D))$ – nef-дивизор Картье для некоторых r, l . Имеем по построению $R \cap L^\perp = \{0\}$. Но по шагу 1 существует $R_l \subset \overline{NE}(X) \cap L^\perp \subset R$. Противоречие.

Шаг 3. $\{R_l\}$ дискретно в полупространстве $N_1(X)_{K_X + D < 0}$. Выберем обильные дивизоры $H_1, \dots, H_{\rho-1}$, которые вместе с $K_X + D$ составляют базис $N^1(X)$. Для каждого $R_l = \overline{NE}(X) \cap L^\perp$ пусть $r_L(H_i), \nu_L(H_i), L_{\nu(H_i)}$ как в шаге 1. Тогда

$$0 \neq \overline{NE}(X) \cap L_{\nu(H_i)}^\perp = \overline{NE}(X) \cap L^\perp = R_l,$$

так что $H_i + r_L(H_i)(K_X + D) \cdot \xi = 0$ на R_l , т.е.

$$\frac{H_i \cdot \xi_l}{-(K_X + D) \cdot \xi_l} = r_L(H_i), \quad \xi_l \in R_l, \quad \xi_l \neq 0.$$

Эти числа можно рассматривать как координаты R_l на гиперплоскости $\{z \in N_1(X) \mid -(K_X + D) \cdot z = 1\}$. Так как их знаменатели ограничены, то они дискретны, значит, $\{R_l\}$ тоже дискретны.

Шаг 4. $\overline{NE}(X) = \overline{NE}(X)_{K_X + D \geq 0} + \sum R_l$, т.е. $\overline{\sum R_l} = \sum R_l$. Это следует из дискретности $\{R_l\}$.

Шаг 5. $R_l = \mathbb{R}_+[l]$ для некоторой кривой l , см. 3.5.1 и 3.6.

3.11. ТЕОРЕМА (о стягивании, [6], [30], [42]). Пусть (X, D) – пара, как и раньше, и L – nef-дивизор Картье такой, что ассоциированная с ним грань $F_L = \overline{NE}(X) \cap L^\perp$ целиком лежит в отрицательной части $\overline{NE}(X)_{K_X + D < 0}$. Тогда существует морфизм стягивания

$$\varphi = \varphi_F: X \rightarrow Y,$$

обладающий свойствами:

- (i) φ – морфизм со связными слоями на нормальное проективное многообразие Y , не являющийся изоморфизмом;
- (ii) для кривой $C \subset X$ $\varphi(C) = \text{pt} \iff [C] \in F_L$;
- (iii) для любого дивизора Картье G на X имеем $(G = \varphi^*(H))$ для некоторого дивизора Картье H $\iff (G \cdot C = 0 \ \forall C, [C] \in F_L)$; в частности, точна последовательность

$$0 \rightarrow N^1(Y) \rightarrow N^1(X) \rightarrow N^1(X/Y) \rightarrow 0,$$

а также ее двойственная

$$0 \rightarrow N_1(X/Y) \rightarrow N_1(X) \rightarrow N_1(Y) \rightarrow 0.$$

Доказательство этой теоремы немедленно следует из теоремы 3.7 о свободе линейной системы. В частности, если $D = 0$ и X терминально, то мы имеем стягивание в обычной категории Мори.

3.12. Стягивания экстремальных лучей. В 3.2 было отмечено, что стягивания экстремальных лучей бывают трех типов: дивизориальные, малые (или флиповые) и стягивания расслоенного типа. Только малые экстремальные стягивания остаются еще проблематичными (в размерностях ≥ 4) в реализации ПММ и лог-ПММ.

3.12.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ [30], [42]. Пусть $\varphi = \varphi_R: X \rightarrow Y$ – стягивание $(K_X + D)$ -отрицательного экстремального луча $R = R_l$. Тогда $\rho(Y) = \rho(X) - 1$, $-(K_X + D)$ относительно φ -обилён.

(i) Если φ – дивизориально, то исключительное множество $\text{Exc}(\varphi)$ состоит из единственного неприводимого дивизора E и Y – $\mathbb{Q}$ -факториально с лог-терминальными особенностями как лог-пара (Y, φ_*D) ; в случае, когда $D = 0$ и X терминально, Y – $\mathbb{Q}$ -факториально и терминально.

(ii) Если φ – флиповое экстремальное стягивание, тогда дивизор $(K_Y + \varphi_*D)$ не $\mathbb{Q}$ -Картье, следовательно, Y не $\mathbb{Q}$ -факториально и особенности не лог-терминальны; в случае, когда $D = 0$ и X терминально, K_Y не $\mathbb{Q}$ -Картье и Y не терминально.

(iii) Если φ – расслоенного типа, т.е. $\varphi: X \rightarrow Y$ – лог-Мори расслоенное пространство, то Y – $\mathbb{Q}$ -факториально.

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Утверждение $\rho(X) = \rho(Y) + 1$ вытекает из последней точной последовательности в 3.11, так как $\dim N_1(X/Y) = \dim N^1(X/Y) = 1$. Относительная обильность $-(K_X + D)$ следует из критерия обильности Клеймана.

(i) Если φ – дивизориально, то гиперплоскими сечениями можно свести к случаю поверхностей, тогда все стягиваемые кривые пропорциональны с отрицательным самопересечением, значит, это одна неприводимая кривая, т.е. $E = \text{Exc}(\varphi)$ неприводим. Для доказательства второго утверждения возьмем дивизор (Вейля) D на Y . Для кривой C с $[C] \in R$ имеем $EC < 0$. Тогда $(\varphi_*^{-1}(D) + rE)C = 0$, где $r = -\frac{\varphi_*^{-1}(D)C}{EC}$. Пусть d такое, что $d(\varphi_*^{-1}(D) + rE)$ – дивизор Картье. По 3.11 (iii)

$$d(\varphi_*^{-1}(D) + rE) = \varphi^*G$$

для некоторого дивизора Картье G на Y , так что

$$dD = \varphi_*d(\varphi_*^{-1}(D) + rE) = \varphi_*\varphi^*G = G.$$

Это доказывает $\mathbb{Q}$ -факториальность Y . Для доказательства лог-терминальности (Y, φ_*D) запишем $K_X + D = \varphi^*(K_Y + \varphi_*D) + aE$, $a \in \mathbb{Q}$. Для кривой $C \subset X$ с $[C] \in R$ имеем

$$0 > (K_X + D)C = \varphi^*(K_Y + \varphi_*D)C + aE \cdot C = aE \cdot C,$$

так что $a > 0$. Для всех других исключительных нормирований v с центром на X дискрепантности $a(v, Y, \varphi_*D) \geq a(v, X, D) > -1$, так что (Y, φ_*D) лог-терминальна.

Действительно, по 2.6 $a(v, Y, \varphi_* D) = a(v, X, D - aE) \geq a(v, X, D)$, причем неравенство строго тогда и только тогда, когда центр $C(v, X) \subset E$, так как $a > 0$. В категории Мори, когда $D = 0$ и X терминально, так же все ясно.

(ii) Предположим, что $(K_Y + \varphi_* D_Y)$ $\mathbb{Q}$ -Картье. Тогда так как $\text{codim} \text{Exc}(\varphi) \geq 2$, то $K_X + D = \varphi^*(K_Y + \varphi_* D)$. Для кривой $C \subset X$ с $[C] \in R$ имеем

$$(K_X + D)C = \varphi^*(K_Y + \varphi_* D)C = 0,$$

что противоречит $(K_X + D)$ -отрицательности экстремального луча R .

(iii) Пусть D – неприводимый дивизор (Вейля) на Y , тогда $D' = \text{Supp } \varphi^{-1}(D)$ – неприводимый дивизор на X (так как X – $\mathbb{Q}$ -факториально и $\rho(X/Y) = 1$). Дивизор Картье dD' не пересекается с кривыми C в слоях, т.е. $[C] \in R$, значит, по 3.11 (iii), существует дивизор Картье G на Y такой, что $dD' = \varphi^*(G)$. Ясно, что $\text{Supp } G = D$, т.е. Y $\mathbb{Q}$ -факториально.

3.12.2. ПРИМЕРЫ. (i) Классификация Мори экстремальных лучей на неособых проективных многообразиях X размерности 2 и 3 воспроизведена в теореме 1.7. В 1.8 (iii) было сказано, что на неособых 3-мерных многообразиях не существует стягиваний флипового типа. Следующий пример показывает, что стягивания флипового типа существуют на особых терминальных $\mathbb{Q}$ -факториальных 3-мерных многообразиях.

(ii) Трехмерный флип в ПММ (см. [6; п. 5.9]). Пусть $F \subset \mathbb{P}^4$ – образ геометрически линейчатой поверхности $\mathbb{F}_1$ при вложении линейной системой $|s + 2f|$, где s – исключительное сечение с $s^2 = -1$ и f – класс слоя проекции $\mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$. Пусть $Y \subset \mathbb{P}^5$ – конус над F с вершиной $P \in Y$. Имеем $K_F = -2s - 3f$ и $\theta_F(1) = s + 2f$, так что K_F не пропорционален $\theta_F(1)$ и, следовательно, $K_Y \notin \text{Pic}(Y) \otimes \mathbb{Q}$. Рассмотрим композицию $Y - P \rightarrow \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$, и пусть $X^+ \subset Y \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^1$ – замыкание графика сквозного отображения $Y - P \rightarrow \mathbb{P}^1$. Тогда бирациональное отображение $f^+ : X^+ \rightarrow Y$ обладает следующими свойствами:

- а) X^+ – неособое 3-мерное многообразие;
- б) $E^+ = (f^+)^{-1}(P) \simeq \mathbb{P}^1$ с нормальным пучком $\theta_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus \theta_{\mathbb{P}^1}(-2)$;
- в) $f^+|_{X^+ - E^+} : X^+ - E^+ \rightarrow Y - P$ – изоморфизм и $K_{X^+} \cdot E^+ = 1$, так что K_{X^+} относительно f^+ -обилен.

Далее, раздуем кривую E^+ на X^+ , затем раздуем исключительное сечение на исключительном дивизоре, изоморфном $\mathbb{F}_1$, этого раздутия. Исключительный дивизор последнего раздутия изоморфен $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$; он может быть стянут в другом направлении на неособую кривую E' в неособом многообразии X' . Образ в X' первой исключительной поверхности $\mathbb{F}_1$ будет изоморфен $\mathbb{P}^2$ с нормальным пучком $\theta_{\mathbb{P}^2}(-2)$. Теперь это $\mathbb{P}^2$ можно стянуть в особую точку как экстремальный луч типа E5 (см. таблицу 1.1) на многообразие X . Образом E' в X будет кривая $E \simeq \mathbb{P}^1$, проходящая через особую (не горенштейнову) точку на X . По формуле присоединения $K_{X'} \equiv \sigma^*(K_X) + \frac{1}{2}\mathbb{P}^2$ (см. пример 1.2). Следовательно, $K_X \cdot E = -\frac{1}{2}$, так как $K_{X'} \cdot E' = 0$. Кривая E порождает экстремальный луч на X и является единственной неприводимой кривой, принадлежащей этому экстремальному лучу. Малое стягивание его приводит к исходному многообразию Y , которое не $\mathbb{Q}$ -горенштейново.

Многообразие X в этом примере не горенштейново не случайно: имеет место общий факт – не существует малых экстремальных стягиваний на 3-мерных горенштейновых

многообразиях; это следует из теории деформации рациональных кривых согласно Мори [44], [40], [6].

(iii) *Примеры малых экстремальных стягиваний на неособых X , $\dim X = n \geq 4$.* Пусть $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(-a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(-a_r)$ – векторное расслоение на $\mathbb{P}^d$, где $a_1, \dots, a_r > 0$ – целые числа. Пусть $X = \operatorname{Spec} \bigoplus_{m \geq 0} \operatorname{Sym}^m(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(a_r))$ – тотальное пространство этого расслоения и $Y = \operatorname{Spec} \bigoplus_{m \geq 0} H^0(\mathbb{P}^d, \operatorname{Sym}^m(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(a_r)))$, где Sym^m обозначает m -ю симметрическую степень. Вложим $\mathbb{P}^d$ в X как нулевое сечение X над $\mathbb{P}^d$, тогда из-за отрицательности расслоения это сечение можно стянуть: $\varphi: X \rightarrow Y$ – такое стягивание. Нормальное расслоение к нулевому сечению совпадает с исходным векторным расслоением, так что по формуле присоединения

$$K_X \cdot l = \left(-d - 1 + \sum_{i=1}^r a_i \right),$$

где l – прямая в $\mathbb{P}^d$. Выберем d и a_i так, чтобы это пересечение было отрицательным: они существуют, если $d \leq n - 2$, где $n = d + r = \dim X$, и $n \geq 4$.

Обозначим теми же буквами X , Y неособые проективные замыкания соответствующих открытых X , Y , и $\varphi: X \rightarrow Y$, как и раньше, стягивание нулевого сечения $\mathbb{P}^d$. Пусть D_i – дивизор нулевого сечения линейного расслоения $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(-a_i)$, тогда $D_i \cdot l = -a_i < 0$. Отсюда следует, что $\mathbb{R}_+[l]$ – экстремальный луч относительно K_X и φ – его стягивание, являющееся малым экстремальным стягиванием, поскольку $\operatorname{codim}_X \operatorname{Exc}(\varphi) = \operatorname{codim}_X \mathbb{P}^d = n - d \geq 2$ (см. [42; п. 8.3.2]).

3.13. Флипы и лог-флипы. По 3.12.1 (ii) малые экстремальные стягивания выводят из категории $\mathbb{Q}$ -факториальных многообразий. Поэтому чтобы продолжить алгоритм по лог-ПММ (или по ПММ в случае, когда $D = 0$ и X терминально), который должен привести к лог-минимальной модели или лог-расслоенному пространству (к обычной минимальной модели или Мори расслоенному пространству в ПММ), нужно привлечь новую бирациональную операцию *лог-флип* (просто *флип* в обычной ПММ). В примере 3.12.2 (ii) операция флип, вернее, обратная к ней, была построена явно.

Приведем теперь определения флипа и лог-флипа.

3.13.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Пусть $\varphi: X \rightarrow Y$ – малое экстремальное стягивание относительно K_X , где X – нормальное проективное $\mathbb{Q}$ -факториальное терминальное многообразие. *Флипом* для φ называется следующая коммутативная диаграмма бирациональных отображений:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\psi} & X^+ \\ \searrow \varphi & & \swarrow \varphi^+ \\ & Y & \end{array},$$

где X^+ – нормальное проективное $\mathbb{Q}$ -факториальное терминальное многообразие, φ^+ – малый бирациональный морфизм, K_{X^+} относительно φ^+ -обилен и $\psi = (\varphi^+)^{-1} \circ \varphi$.

(ii) Пусть (X, D) – $\mathbb{Q}$ -факториальная лог-терминальная пара с границей $D = \sum d_i D_i$, $0 \leq d_i \leq 1$, и $\varphi: (X, D) \rightarrow Y$ – малое $(K_X + D)$ -экстремальное стягивание. *Лог-флипом* (или $(K_X + D)$ -*флипом*) называется следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} (X, D) & \xrightarrow{\psi} & (X^+, D^+) \\ \searrow \varphi & & \swarrow \varphi^+ \\ & Y & \end{array},$$

где (X^+, D^+) – $\mathbb{Q}$ -факториальная лог-терминальная пара с граничным дивизором D^+ – собственным образом $\psi_*(D)$ относительно бирационального отображения $\psi = (\varphi^+)^{-1} \circ \varphi$, $\varphi^+: X^+ \rightarrow Y$ – малый бирациональный морфизм и $(K_{X^+} + D^+)$ относительно φ^+ -обилеи.

3.13.2. Отметим основные свойства флипа и лог-флипа (если они существуют).

(i) Бирациональное отображение $\psi = (\varphi^+)^{-1} \circ \varphi$ является изоморфизмом вне подмногообразий коразмерности ≥ 2 .

(ii) $\rho(X) = \rho(X^+) = \rho(Y) + 1$, $Z_{n-1}(X) \otimes \mathbb{Q} \simeq Z_{n-1}(X^+) \otimes \mathbb{Q} \simeq \varphi^*(\text{Div } Y \otimes \mathbb{Q}) \oplus \mathbb{Q}K_X$, где $n = \dim X$.

(iii) *Критерий существования флипа и лог-флипа* [23], [42]. Флип (соответственно лог-флип) существует тогда и только тогда, когда $\mathcal{O}_Y$ -алгебра $R = \bigoplus_{m \geq 0} \varphi_* \mathcal{O}_X(mK_X)$ (соответственно $R_D = \bigoplus_{m \geq 0} \varphi_* \mathcal{O}_X(m(K_X + D))$) конечно порождена.

(iv) Если флип $\varphi^+: X^+ \rightarrow Y$ (соответственно лог-флип $\varphi^+: (X^+, D^+) \rightarrow Y$) существует, то он единственен, так как

$$X^+ = \text{Proj} \bigoplus_{m \geq 0} \varphi_* \mathcal{O}_X(mK_X) = \text{Proj} \bigoplus_{m \geq 0} \varphi_*^+ \mathcal{O}_{X^+}(mK_{X^+})$$

и K_{X^+} относительно φ^+ -обилеи (соответственно

$$X^+ = \text{Proj} \bigoplus_{m \geq 0} \varphi_* \mathcal{O}_X(m(K_X + D)) = \text{Proj} \bigoplus_{m \geq 0} \varphi_*^+ \mathcal{O}_{X^+}(m(K_{X^+} + D^+))$$

и $(K_{X^+} + D^+)$ относительно φ^+ -обилеи).

Следующие понятия флопа в ПММ и лог-флопа в лог-ПММ не менее важны, чем флип и лог-флип.

3.13.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Пусть X – нормальное проективное $\mathbb{Q}$ -факторнормальное терминальное многообразие и $\varphi: X \rightarrow Y$ – малое стягивание экстремального луча R_l относительно $K_X + \varepsilon D$, где $0 < \varepsilon \ll 1$ и D – эффективный дивизор, такое, что

$$K_X \cdot l = 0 \text{ и } -D \text{ относительно } \varphi\text{-обилеи.}$$

D-флопом называется коммутативная диаграмма бирациональных отображений

$$\begin{array}{ccc}
D \subset X & \xrightarrow{\psi} & X^+ \supset D^+ \\
\searrow \varphi & & \swarrow \varphi^+ \\
& Y &
\end{array},$$

где X^+ – нормальное проективное $\mathbb{Q}$ -факториальное терминальное многообразие, φ^+ – малый бирациональный морфизм такой, что для любой кривой l^+ , стягиваемой морфизмом φ^+ ,

$$K_{X^+} \cdot l^+ = 0 \text{ и } D^+ \text{ относительно } \varphi^+ \text{-обилен,}$$

где $D^+ = \psi^* D$ – собственный образ D .

(ii) Пусть (X, D) – $\mathbb{Q}$ -факториальная лог-терминальная пара и $\varphi: (X, D) \rightarrow Y$ – малое стягивание экстремального луча R_l относительно $K_X + D + \varepsilon B$ (где $0 < \varepsilon \ll 1$, B – эффективный дивизор и пара $(X, K_X + D + \varepsilon B)$ лог-терминальна) такое, что

$$(K_X + D) \cdot l = 0 \text{ и } -B \text{ относительно } \varphi \text{-обилен,}$$

B -лог-флопом называется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
B \subset (X, D) & \xrightarrow{\psi} & (X^+, D^+) \supset B^+ \\
\searrow \varphi & & \swarrow \varphi^+ \\
& Y &
\end{array},$$

где пара (X^+, D^+) $\mathbb{Q}$ -факториальна и лог-терминальна, $\varphi^+: X^+ \rightarrow Y$ – малый бирациональный морфизм, $D^+ = \psi_* D$ – собственный образ D и для любой кривой l^+ , стягиваемой морфизмом φ^+ ,

$$(K_{X^+} + D^+) \cdot l^+ = 0 \text{ и } B^+ \text{ относительно } \varphi \text{-обилен.}$$

3.13.4. ЗАМЕЧАНИЯ. (i) Конечно, как и в 3.13.2 (i), бирациональное отображение $\psi = (\varphi^+)^{-1} \circ \varphi$ является изоморфизмом вне коразмерности 2.

(ii) Если D -флоп (соответственно B -лог-флоп) существует, то он единственен, так как $D^+ = \varphi^+ \text{-обилен}$ и $X^+ = \text{Proj } \bigoplus_{m \geq 0} \varphi_*^+(mD^+) = \text{Proj } \bigoplus_{m \geq 0} \varphi_*(-mD)$ (соответственно $X^+ = \text{Proj } \bigoplus_{m \geq 0} \varphi_*^+(mB^+) = \text{Proj } \bigoplus_{m \geq 0} \varphi_*(-mB)$).

(iii) D -флоп является в действительности лог-флипом для пары $(X, \varepsilon D)$, $0 < \varepsilon \ll 1$; аналогично, B -лог-флоп является лог-флипом для пары $(X, D + \varepsilon B)$, $0 < \varepsilon \ll 1$, так что флопы – это частные случаи лог-флипов.

(iv) Операция флоп естественно возникает в следующей ситуации: пусть X_1, X_2 – минимальные модели в ПММ размерности n , которые бирационально эквивалентны, $f: X_1 \dashrightarrow X_2$ – бирациональное отображение, тогда f – изоморфизм вне коразмерности 2 и является композицией конечной последовательности флопов, конечно, по модулю гипотезы о существовании флопов и гипотезы об обрыве флопов. Исходя из этого, доказывается [42; гл. 12] по модулю гипотезы существования и обрыва флипов, что с точностью до изоморфизма число минимальных моделей многообразий общего типа конечно. Для 3-мерных многообразий общего типа это доказано в [29]. Аналогично, лог-минимальные модели в бирациональном классе связаны последовательностью

лог-флопов опять по модулю гипотез существования и обрыва. В размерности 3 все эти гипотезы доказаны.

Следующее важное наблюдение Шокурова используется в доказательстве терминальности (соответственно лог-терминальности) X^+ при флипе и флопе (соответственно при лог-флипе и лог-флопе).

3.13.5. ЛЕММА. *В каждой диаграмме для флипа, флопа, лог-флипа и лог-флопа справедливо следующее утверждение (без предположения терминальности, соответственно лог-терминальности X^+): для всякого дискретного нормирования для дискрепантностей выполняется неравенство*

$$a(v, X^+, D^+) \geq a(v, X, D).$$

Более того,

$$a(v, X^+, D^+) > a(v, X, D)$$

тогда и только тогда, когда центр нормирования v на X содержится в $\text{Exc}(\varphi)$ (или, равносильно, центр $C(v, X^+) \subset \text{Exc}(\varphi^+)$).

Отметим, что это утверждение и доказательство утверждения 3.12.1 (i) означают, что особенности не ухудшаются при операциях в ПММ и лог-ПММ (т.е. дивизориальных стягиваниях, флипах и лог-флипах) и даже строго улучшаются, если центры нормирований содержатся в исключительных множествах соответствующих операций.

В связи с проблемой существования флипов, флопов, лог-флипов важна, как мы видели, следующая общая гипотеза.

3.13.6. ГИПОТЕЗА (о конечной порожденности канонических колец). Пусть $f: X \rightarrow Y$ – проективный морфизм из нормального $\mathbb{Q}$ -факториального терминального (соответственно лог-терминального с границей D) многообразия X на многообразии Y . Тогда каноническое кольцо

$$R := \bigoplus_{m \geq 0} f_* \mathcal{O}_X(\lfloor mK_X \rfloor)$$

(соответственно $R_D := \bigoplus_{m \geq 0} f_* \mathcal{O}_X(\lfloor m(K_X + D) \rfloor)$) конечно порождено как $\mathcal{O}_Y$ -алгебра.

Если $Y = \text{Spec } \mathbb{C}$ – точка, то это классическая гипотеза о конечной порожденности канонического кольца (доказанная для минимальных моделей общего типа, см. 3.7.2).

Теперь сформулируем основные гипотезы в ПММ и лог-ПММ.

3.14. ГИПОТЕЗА (о существовании флипа, флопа, лог-флипа и лог-флопа). (i) *Флип 3.13.1 (i) существует в категории нормальных $\mathbb{Q}$ -факториальных терминальных многообразий (т.е. в рамках ПММ).*

(ii) *Флоп 3.13.3 (i) существует в категории $\mathbb{Q}$ -факториальных терминальных многообразий.*

(iii) *Лог-флип 3.13.1 (ii) существует в категории $\mathbb{Q}$ -факториальных лог-терминальных пар (X, D) с границей D .*

3.14.1. КОММЕНТАРИЙ. Все эти гипотезы доказаны в размерности 3: гипотеза (i) впервые была доказана Мори [46] (см. также Коллар–Мори [39]); гипотеза (ii) доказана Ридом [51] (см. также [35]); гипотеза (iii) доказана Шокуровым [60] и передоказана в [38]. Гипотеза о существовании лог-флопа – это частный случай гипотезы (iii). Доказательство Мори [46] существования 3-мерного флипа использует редукцию Каваматы [23] к вопросу о существовании 3-мерного флопа посредством так называемой “гипотезы о слоне” Рида (см. [39]). Из теоремы Шокурова о существовании лог-флипа следует, в частности, другое доказательство теоремы Мори (см. [38]). Недавно Шокуров [58] доказал существование лог-флипа в размерности 4: его индуктивный подход редуцирует проблему существования лог-флипа в размерности n к существованию и обрыву лог-флипов в размерностях $< n$.

3.15. ГИПОТЕЗА (об обрыве флипов, флопов и лог-флипов). (i) *Не существует бесконечной последовательности флипов*

$$\begin{array}{ccccccc} X = X_0 \dashrightarrow X_0^+ = X_1 \dashrightarrow X_1^+ = X_2 \dashrightarrow X_2^+ \cdots X_i \dashrightarrow X_i^+ = X_{i+1} \cdots \\ \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \\ Y = Y_0 \quad Y_1 \quad Y_2 \quad \cdots \quad Y_i \end{array},$$

иначе говоря, любая последовательность флипов обрывается.

(ii) *Не существует бесконечной последовательности D -флопов для фиксированного эффективного дивизора D .*

(iii) *Не существует бесконечной последовательности лог-флипов*

$$\begin{array}{ccccccc} (X, D) = (X_0, D_0) \dashrightarrow (X_0^+, D_0^+) = (X_1, D_1) \dashrightarrow (X_1^+, D_1^+) = (X_2, D_2) \dashrightarrow (X_2^+, D_2^+) = \cdots \\ \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \\ Y = Y_0 \quad Y_1 \quad Y_2 \end{array}.$$

3.15.1. КОММЕНТАРИЙ. Все эти гипотезы доказаны в размерности 3. Гипотеза (i) доказана Шокуровым [59]; для этого им было введено понятие сложности $d(X) := \#\{v \mid a(v, X, 0) < 1, \text{ где } a(\cdot) - \text{дискрепантность и } v - \text{нормирование, исключительное над } X\}$, и показано, что при каждом флипе сложность строго убывает, т.е. $d(X) > d(X^+)$. Обрыв в размерности 4 был доказан аналогичным способом (см. [30]).

Обрыв 3-мерных лог-флопов доказан в [35]. Гипотезу (iii) для 3-мерных многообразий доказал Кавамата [27]. Как уже отмечалось, гипотезы о существовании и обрыве B -лог-флопов (для фиксированного эффективного дивизора B) – это частный случай гипотез о лог-флипе.

Прежде чем сформулировать дальнейшие гипотезы в ПММ и лог-ПММ, напомним некоторые определения.

3.16. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть X – неособое проективное многообразие. Кодайровой размерностью $\kappa(X)$ многообразия X называется целое неотрицательное число или $-\infty$, определяемое как

$$\kappa(X) := \begin{cases} \deg \operatorname{tr} \left(\bigoplus_{m \geq 0} H^0(X, mK_X) \right) - 1, & \text{если } H^0(X, mK_X) \neq 0 \\ & \text{для некоторого } m > 0, \\ -\infty & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $\deg \operatorname{tr}(Q)$ обозначает степень трансцендентности целостного кольца R (или его поля частных) над $\mathbb{C} = H^0(X, \mathcal{O}_X)$.

Аналогично определяется лог-кодаирова размерность, или размерность Иитаки (см. [13]), $\kappa(X, D)$ для пары (X, D) , где D – целый дивизор: в предыдущей формуле вместо K_X берется лог-канонический дивизор $K_X + D$.

Эквивалентно, $\kappa(X)$ можно определить также как

$$\kappa(X) := \begin{cases} \max \dim \Phi_{|mK_X|}(X), & \text{если } H^0(X, mK_X) \neq 0 \text{ для некоторого } m > 0, \\ -\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Аналогично для $\kappa(X, D)$.

3.16.1. ЗАМЕЧАНИЕ. Ясно, что кодаирова размерность является бирациональным инвариантом для неособых полных многообразий. Для особых многообразий X кодаирова размерность определяется как $\kappa(\overline{X})$, где $\overline{X}$ – разрешение особенностей на X . Аналогично, для $\mathbb{Q}$ -факториальной лог-терминальной пары (X, D) лог-кодаирова размерность определяется через лог-разрешение (см. [13], [30]).

3.17. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Многообразие X называется *линейчатым* (соответственно *унилинейчатым*), если существует бирациональное (соответственно конечное в общей точке) отображение

$$Y \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow X,$$

где $\dim Y = \dim X - 1$.

(ii) Лог-пара (X, D) с $\mathbb{Q}$ -факториальными терминальными особенностями называется *лог-линейчатой* (соответственно *лог-унилинейчатой*), если существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} (Z, D_Z) & & \\ f \downarrow & \searrow g & \\ Y \times \mathbb{P}^1 & \dashrightarrow & (X, D) \end{array}$$

бirationальных (соответственно конечных в общей точке) отображений (где f – бирациональный морфизм, Z – неособое многообразие, граничный дивизор D_Z только с нормальными пересечениями, $g^{-1}(D) + \operatorname{Exc}(g) \subset D_Z$ и $K_Z + D_Z = g^*(K_X + D) + R$ для некоторого эффективного $\mathbb{Q}$ -дивизора R) такая, что $(K_Z + D_Z) \cdot C < 0$ для собственного прообраза C общего слоя $\{y\} \times \mathbb{P}^1$.

Если все коэффициенты дивизора D_Z равны 1, то пара (X, D) называется *собственно лог-унилинейчатой*.

3.17.1. КОММЕНТАРИЙ. Используя технику деформаций Мори, Мияока и Мори [43] показали, что Мори расслоенное пространство унилинейчато. В частности, для любой точки $P \in X$ существует рациональная кривая $C \ni P$ такая, что $K_X C < 0$ (см. также [25]). Отсюда следует, что $H^0(X, \lfloor mK_X \rfloor) = 0 \ \forall m > 0$, т.е. $\kappa(X) = -\infty$.

Из результата Мияоки–Мори следует также, что лог-Мори расслоенное пространство $\varphi: X \rightarrow Y$ покрывается рациональными кривыми, следовательно, X унилинейчато (ср. 3.6.1 (ii)). Однако вопрос о лог-унилинейчатости лог-Мори расслоенных пространств оказался более трудным: в [33] доказано, что в размерности 2 все

лог-Мори расслоенные пространства (X, D) , где D – граница, собственно лог-унилинейчатый.

Для лог-Мори расслоенного пространства $(X, D) \rightarrow Y$ в любой размерности из унилинейчатости X следует, что для любой точки $P \in X$ существует рациональная кривая $C \ni P$ такая, что $(K_X + D)C < 0$; значит, $H^0(X, \mathcal{L}^m(K_X + D)) = 0 \ \forall m > 0$, т.е. $\kappa(X, D) = -\infty$.

В связи с этим возникает следующая гипотеза.

3.18. ГИПОТЕЗА. *Для минимальной модели X в ПММ (соответственно лог-минимальной модели (X, D) в лог-ПММ) выполняется неравенство*

$$\kappa(X) \geq 0 \quad (\text{соответственно } \kappa(X, D) \geq 0).$$

Эта гипотеза вытекает из более общей гипотезы об избыточности.

3.19. ГИПОТЕЗА (Abundance conjecture). *Пусть X – минимальная модель размерности n (соответственно лог-минимальная модель в лог-ПММ), тогда K_X (соответственно $K_X + D$) полубилен, т.е. линейная система $|mK_X|$ (соответственно $|m(K_X + D)|$) свободна для достаточно делимых $m \gg 0$.*

3.19.1. КОММЕНТАРИЙ. В размерности $n \leq 3$ эти гипотезы доказаны: для минимальных 3-мерных многообразий это следует из цикла работ Мияоки и Каваматы (см. [26], [38; гл. 9]); лог-случай доказан в [32]. Из 3.19 следует существование морфизма

$$\Phi = \Phi_{|mK_X|}: X \rightarrow X_{\text{can}} = \text{Proj} \oplus H^0(X, \mathcal{L}^m K_X)$$

(соответственно $\Phi = \Phi_{|m(K_X + D)|}: (X, D) \rightarrow X_{\text{лог-кан}} = \text{Proj} \oplus H^0(X, \mathcal{L}^m(K_X + D))$) из минимальной (соответственно лог-минимальной) модели на каноническую (соответственно лог-каноническую) модель. Это отображение называется *отображением Иитаки*. Основное свойство этого отображения – общий слой имеет кодаирову (соответственно лог-кодаирову) размерность 0.

Таким образом, сформулируем окончательный вывод.

3.20. ТЕОРЕМА. *В размерности $n \leq 3$ ПММ и лог-ПММ полностью установлены для многообразий над $\mathbb{C}$.*

3.20.1. ЗАМЕЧАНИЯ. (i) Обе ПММ и лог-ПММ обобщаются в относительные ПММ/ S и лог-ПММ/ S для многообразий над базой S (см. [30]). Для проективных морфизмов $\pi: X \rightarrow S$, где X – нормальное $\mathbb{Q}$ -факториальное и терминальное (соответственно для $\pi_D: (X, D) \rightarrow S$ для $\mathbb{Q}$ -факториальных лог-терминальных пар), справедлива относительная теорема 3.20 для $\dim X \leq 3$. Мы будем существенно использовать это в следующей главе II.

(ii) ПММ установлена также в категории торических многообразий произвольной размерности (см. [30], [42]).

Глава II. Факторизация бирациональных отображений между Мори расслоенными пространствами

В этой главе мы рассмотрим обобщение метода Нётера разложения бирациональных автоморфизмов плоскости в композицию квадратичных отображений. Первоначально метод был распространен на случай поверхностей над незамкнутыми полями

еще в классических работах (см. [56]) и в ряде современных работ (см. обзор [15]). Трехмерный случай изучался в работах Фано и в цикле работ [18], [14], [20]. Многомерные обобщения см. в [47], [49], [55], [20].

Однако наиболее естественное обобщение метод Нётера получил в рамках теории Мори. Это так называемая программа Саркисова (сформулированная Ридом [53] на основании [54]) факторизации заданного бирационального отображения между двумя Мори расслоенными пространствами на элементарные составляющие-линки в рамках лог-ПММ. Программа сформулирована в любой размерности, однако ее реализация доказана пока только в размерностях 2 и 3: случай размерности 2 классический (см. обзор [15]); доказательство в размерности 3 принадлежит Корти [7] (см. также [42]).

В этой главе мы воспроизведем эти 3-мерные результаты и рассмотрим некоторые приложения: приведем доказательство бирациональной жесткости гладкой 3-мерной кватрики (следуя Корти [8]) и на одном из примеров (из 95 возможных) продемонстрируем применение программы Саркисова к доказательству бирациональной жесткости 3-мерных гиперповерхностей Фано в 4-мерных взвешенных проективных пространствах (следуя [9], [8]).

§ 1. Программа Саркисова

1.1. В этом параграфе будут изучаться бирациональные отображения между 3-мерными Мори расслоениями, т.е. нормальными проективными $\mathbb{Q}$ -факториальными многообразиями X с не более чем терминальными особенностями, вместе с экстремальными стягиваниями расслоенного типа $\varphi: X \rightarrow S$. Напомним, что $\varphi: X \rightarrow S$ обладает следующими свойствами:

- (i) S – нормальное проективное, $\dim S < \dim X$ и $f_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$;
- (ii) $-K_X$ относительно φ -обилеи;
- (iii) $\rho(X) = \rho(Y) + 1$.

В размерности три – это только следующие случаи:

$\dim S = 0$: $X = \mathbb{Q}$ -Фано 3-мерное многообразие, $\text{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z}$;

$\dim S = 1$: $\varphi: X \rightarrow S$ – Дель Пеццо расслоение над неособой кривой S ;

$\dim S = 2$: $\varphi: X \rightarrow S$ – расслоение на коники (т.е. общий слой изоморфен конике в $\mathbb{P}^2$ над полем вычетов общей точки).

Отметим, что в содержательной части теории предполагается, что $S \simeq \mathbb{P}^1$ для Дель Пеццо расслоений и S – рациональная поверхность для расслоений на коники (иначе, все бирациональные отображения будут над базой S).

Пусть $\chi: X \dashrightarrow X'$,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\chi} & X' \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi' \\ S & & S' \end{array}, \quad (1.1)$$

– бирациональное отображение между двумя Мори расслоенными пространствами, не согласованное, вообще говоря, со структурами экстремальных стягиваний φ, φ' . Задача заключается в разложении χ в композицию $\Phi_n \circ \dots \circ \Phi_1$ элементарных бирациональных отображений-линков Φ_i :

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & \overset{\chi=\chi_0}{\text{---}} & & & \\
& & & \text{---} & \overset{\chi_1}{\text{---}} & \text{---} & \\
& & & \text{---} & \text{---} & \overset{\chi_2}{\text{---}} & \\
& & & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \\
X = X_0 & \xrightarrow{\Phi_1} & X_1 & \dashrightarrow & X_2 \cdots & \dashrightarrow & X_n = X' \\
\varphi \downarrow & \varphi_0 \downarrow & \varphi_1 \downarrow & & \varphi_2 \downarrow & & \varphi_n \downarrow \quad \downarrow \varphi' \\
S = S_0 & & S_1 & & S_2 \cdots & & S_n \quad S'
\end{array}$$

Рид [53] (см. также [42]) определил следующие 4 типа линков:

I:

$$\begin{array}{ccc}
X & \longleftarrow & Z \dashrightarrow X_1 \\
\downarrow & & \downarrow \\
S & \longleftarrow & S_1
\end{array},$$

где $Z \rightarrow X$ – экстремальное дивизориальное стягивание, $Z \dashrightarrow X_1$ – последовательность лог-флипов (в действительности, обычных флипов, обратных к ним и флопов), $S_1 \rightarrow S$ – морфизм нормальных проективных многообразий со связными слоями и $\rho(S_1/S) = 1$.

II:

$$\begin{array}{ccccc}
X & \longleftarrow & Z \dashrightarrow & Z' \longrightarrow & X_1 \\
\downarrow & & & & \downarrow \\
S & & \longleftarrow \sim & & S_1
\end{array},$$

где $Z \rightarrow X$ и $Z' \rightarrow X_1$ – экстремальные дивизориальные стягивания, $Z \dashrightarrow Z'$ – последовательность лог-флипов; этот линк индуцирует изоморфизм $S_1 \xrightarrow{\sim} S$.

III (линки, обратные к линкам типа I):

$$\begin{array}{ccc}
X & \dashrightarrow & Z' \longrightarrow X_1 \\
\downarrow & & \downarrow \\
S & \longrightarrow & S_1
\end{array}.$$

IV:

$$\begin{array}{ccc}
X & \dashrightarrow & X_1 \\
\downarrow & & \downarrow \\
S & \longrightarrow & T \longrightarrow S_1
\end{array},$$

где $X \dashrightarrow X_1$ – последовательность лог-флипов, $S \rightarrow T$ и $S_1 \rightarrow T$ – морфизмы нормальных проективных многообразий со связными слоями и $\rho(S/T) = \rho(S_1/T) = 1$.

Эти определения линков довольно общие, они конкретизируются в процессе разложения (раскручивания) заданного бирационального отображения $\chi: X \dashrightarrow X'$. Конечно, идеально было бы иметь полную классификацию линков в каждой фиксированной размерности. Пока это сделано только в размерности два (см. [15]); в размерности три вопрос остается открытым.

Алгоритм раскручивания начинается с задания хорошего инварианта отображения χ – его степени (т.е. тройки чисел (μ, λ, e) , упорядоченных лексикографически), который строго убывает при применении подходящего раскручивающего линка Φ . Наиболее существенная часть – это вопрос обрыва алгоритма через конечное число шагов. Пока это доказано только в размерностях 2 и 3 (см. [7] и § 2 ниже).

Для определения степени бирационального отображения χ в диаграмме (1.1) выберем обильный дивизор A' на S' и целое число μ' такие, что дивизор $H' = -\mu'K_{X'} + \varphi'^*A'$ будет очень обильным на X' (это возможно, так как $-K_{X'}$ относительно φ' -обилён). Дивизор H' фиксирован на весь процесс разложения, так что степень будет зависеть от χ и H' .

1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Степень бирационального отображения χ в (1.1) относительно фиксированного Мори расслоенного пространства $\varphi': X' \rightarrow S'$ и очень обильного дивизора H' на X' определяется как тройка лексикографически упорядоченных чисел (μ, λ, e) следующим образом:*

(i) μ – это квазиэффективный порог, т.е. рациональное число такое, что $\mu K_X + H_X \equiv 0$ над S , где H_X – общий дивизор линейной системы $\mathcal{H}_X = \chi_*^{-1}\mathcal{H}_{X'}$ – собственного прообраза полной линейной системы $\mathcal{H}_{X'} = |H_{X'}|$. Иначе говоря, общий дивизор $H_X \in \mathcal{H}_X$ эквивалентен $-\mu K_X + \varphi^*A$ для некоторого дивизора A на S (не обязательно обильного и эффективного). В размерности 2 известно, что $\mu \in \frac{1}{2 \cdot 3}\mathbb{Z}$, в 3-мерном случае для расслоений на коники $\mu \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, для Дель Пеццо расслоений $\mu \in \frac{1}{2 \cdot 3}\mathbb{Z}$ и для $\mathbb{Q}$ -Фано многообразий X знаменатели μ ограничены ввиду результатов Каваматы [24] об ограниченности степени $-K_X^3$ (а значит, и индекса горенштейновости $e(X)$ для X), в [41] показано, что $e(X) \in \frac{1}{24}\mathbb{Z}$.

(ii) λ – “максимальная кратность” линейной системы $\mathcal{H}_X$. Она определяется как рациональное число, обратное к *каноническому порогу* пары (X, H_X) , т.е.

$$\frac{1}{\lambda} = \max\{c \in \mathbb{Q} \mid K_X + cH_X \text{ канонично}\}$$

(напомним, что каноничность $K_X + cH_X$ означает, что все дискрепантности $a(v, X, cH) \geq 0$ для любого дивизорного нормирования v , исключительного над X). Более явно λ можно определить следующим образом. Пусть

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ p \swarrow & & \searrow q \\ X & \xrightarrow{-X} & X' \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi' \\ S & & S' \end{array} \quad (1.2)$$

– общее лог-разрешение, т.е. W неособо, общий дивизор $H_W \in \mathcal{H}_W = q^*\mathcal{H}_{X'} = p_*^{-1}\mathcal{H}_X$ тоже неособ и $H_W + \sum E_i$ – дивизор с нормальными пересечениями, где E_i – исключительные дивизоры для p . Тогда:

$$K_W = p^*K_X - \sum a_i E_i, \quad a_i > 0, \text{ так как } X \text{ терминально,}$$

$$H_W = p^*H_X - \sum b_i E_i, \quad b_i \geq 0, \text{ так как } H_X \text{ эффективен,}$$

и $a_i - \frac{1}{\lambda}b_i \geq 0$, т.е. $\lambda = \max\{b_i/a_i\}$, и по предыдущему оно не зависит от выбора общего разрешения.

Отметим, что линейная система $\mathcal{H}_X$ не имеет неподвижных компонент и мы можем использовать лог-ПММ для пары (X, cH_X) , даже если $c > 1$, заменив пару (X, cH_X) на обычную лог-пару $(X, \sum c_j D_j)$, $0 < c_j < 1$, D_j – общие дивизоры из $\mathcal{H}_X$ с $\sum c_j = c$, и работая в $(K_X + \sum c_j D_j)$ -ПММ.

В размерности 2 λ не что иное, как максимальная кратность базисных точек в линейной системе $\mathcal{H}_X$ (см. [15]); в произвольной размерности связь λ с кратностями $\mathcal{H}_X$ более сложная (как видно из определения) даже для неособых X , тем более, когда X имеет терминальные особенности (в размерности 2 их нет).

(iii) e – целое число крепантных исключительных дивизоров. В общем, разрешение (1.2) e определяется как

$$e := \begin{cases} \#\left\{E_K \mid \frac{k_k}{a_k} = \lambda\right\}, & \text{если } \lambda > 0, \\ 0, & \text{если } \lambda = 0, \end{cases}$$

независимо от выбора общего разрешения

$$e = \begin{cases} \#\left\{E \mid a\left(E, X, \frac{1}{\lambda}H_X\right) = 0\right\}, & \text{если } \lambda > 0, \\ 0, & \text{если } \lambda = 0. \end{cases}$$

В размерности 2 e не что иное, как число базисных точек (включая бесконечно близкие) максимальной кратности λ в $\mathcal{H}_X$ и 0, если $\mathcal{H}_X$ свободна.

Главным ингредиентом в процессе факторизации χ в композицию линков является (начиная с теоремы Нётера) следующая

1.3. ТЕОРЕМА (неравенство Нётера–Фано). *Бирациональное отображение χ между двумя Мори расслоенными пространствами является изоморфизмом (с сохранением структур экстремальных стягиваний φ, φ'), если $\lambda \leq \mu$ и дивизор $K_X + \frac{1}{\mu}H_X$ численно эффективен.*

Мы отложим доказательство этой теоремы (до конца параграфа) (см. [7], а в неособом случае, например, [14], [19]). Эта теорема указывает, когда разложение χ в композицию линков закончено, т.е. приводит к изоморфизму Мори расслоенных пространств.

1.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Говорят, что пара $(X, \mathcal{H}_X)$ (или $\mathcal{H}_X$) имеет *максимальные особенности*, если $\lambda > \mu$. Исключительный дивизор $E_k \subset Z \rightarrow X$ называется *максимальной особенностью*, если $b_k = \lambda a_k > \mu a_k$ (в предыдущих обозначениях).

Подмногообразие $\Gamma \subset X$ называется *центром максимальной особенности* (или *максимальным центром*), если $\Gamma = \text{im}(E_k)$ – образ максимальной особенности E_k .

Максимальным раздутием называется экстремальное дивизориальное стягивание (относительно K_X) $(E \subset Y) \rightarrow (\Gamma \subset X)$ с $a\left(E, X, \frac{1}{\lambda}H_X\right) = 0$.

Теперь сформулируем основной результат этой главы о существовании алгоритма разложения. Как уже отмечалось, мы ограничиваемся размерностью три, хотя по модулю гипотез лог-ПММ (гипотезы 3.14, 3.15 в главе I) и гипотезы об обрыве алгоритм работает в любой размерности.

1.5. ТЕОРЕМА ([7], см. также [42; гл. 13]). *Для любого бирационального отображения χ между двумя Мори расслоенными пространствами, как в (1.2), существует конечный алгоритм разложения χ в композицию линков типа I–IV (в категории Мори 3-мерных $\mathbb{Q}$ -факториальных терминальных многообразий).*

Приведем, следуя [7] и [42], доказательство этой теоремы; причем в этом параграфе будет построен алгоритм разложения, а его конечность (обрыв) мы докажем в следующем § 2.

Предстоит рассмотреть несколько случаев.

1.6. Случай $\lambda \leq \mu$. В этом случае $K_X + \frac{1}{\mu}H_X$ канонично, и если, кроме того, $K_X + \frac{1}{\mu}H_X$ nef, то по теореме 1.3 χ – изоморфизм и раскручивать нечего.

Если $K_X + \frac{1}{\mu}H_X$ не nef, то будут найдены нормальное проективное многообразие T и морфизм со связными слоями $S \rightarrow T$ такие, что $K_X + \frac{1}{\mu}H_X$ относительно не nef над T и $\rho(X/T) = 2$. Как мы сейчас убедимся, применение относительной $\left(K + \frac{1}{\mu}H\right)$ -ПММ над T приведет к построению отвинчивающего линка типа III или IV.

Пусть R – экстремальный луч, соответствующий экстремальному стягиванию Мори $\varphi: X \rightarrow S$. Так как $K_X + \frac{1}{\mu}H_X$ не nef, то существует по крайней мере один $\left(K_X + \frac{1}{\mu}H_X\right)$ -отрицательный луч в $\overline{NE}(X)$. Выберем среди таких экстремальных лучей такой (обозначим его через P), что $R + P$ образуют 2-мерную грань F в $\overline{NE}(X)$. Грань F является $\left(K_X + \left(\frac{1}{\mu} - \varepsilon\right)H_X\right)$ -отрицательной для $0 < \varepsilon \ll 1$ (так как $K_X + \left(\frac{1}{\mu} - \varepsilon\right)H_X \equiv \varepsilon K_X + \left(\frac{1}{\mu} - \varepsilon\right)\varphi^*A$) и, следовательно, может быть стянута $\varphi_F: X \rightarrow T$ на некоторые многообразия T . Стягивание φ_F пропускается, очевидно, через $\varphi: X \rightarrow S$ и по конструкции удовлетворяет указанным выше свойствам.

Теперь применим $\left(K_X + \frac{1}{\mu}H\right)$ -ПММ над T . В итоге получим или лог-минимальную модель над T , или лог-Мори расслоенное пространство (относительно $K_X + \frac{1}{\mu}H$ над T).

1.6.1. Предположим сначала, что мы получили лог-Мори расслоенное пространство $X_1 \rightarrow S_1$ над T . Бирациональное преобразование $X \dashrightarrow X_1$ состоит из последовательности $\left(K + \frac{1}{\mu}H\right)$ -флипов и дивизориальных стягиваний.

Рассмотрим сначала случай, когда имеются $\left(K + \frac{1}{\mu}H\right)$ -отрицательные дивизориальные стягивания, и возьмем первое из них, т.е. рассмотрим часть последовательности, состоящую из $\left(K + \frac{1}{\mu}H\right)$ -флипов $X \dashrightarrow Z'$ (которых, вообще говоря, может не быть) и последующего $\left(K + \frac{1}{\mu}H\right)$ -дивизориального стягивания $Z' \rightarrow X_1$.

Имеем $\rho(X_1/T) = 1$ и $K_{X_1} + \frac{1}{\mu}H_{X_1}$ отрицательно над T (мы предположили, что $\left(K + \frac{1}{\mu}H\right)$ -ПММ над T заканчивается лог-Мори расслоенным пространством), тогда $\varphi_1: X_1 \rightarrow S_1 = T$ является $\left(K_{X_1} + \frac{1}{\mu}H_{X_1}\right)$ -экстремальным, а следовательно, и K_{X_1} -отрицательным экстремальным стягиванием, поскольку линейная система $\mathcal{H}_{X_1}$ не имеет неподвижных компонент и пересекается с кривыми в слоях лог-Мори расслоенного пространства не отрицательно. Таким образом, возникает линк типа III

$$\begin{array}{ccc} X & \dashrightarrow & Z' \longrightarrow X_1 \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi_1 \\ S & \longrightarrow & T \stackrel{=}{=} S_1 \end{array} \quad (1.3)$$

Теперь рассмотрим случай, когда последовательность целиком состоит из лог-флипов $X \dashrightarrow Z' = X_1$ и заканчивается $\left(K_{X_1} + \frac{1}{\mu}H_{X_1}\right)$ -отрицательным, следовательно (по той же причине, что и выше), и K_{X_1} -отрицательным стягиванием расслоенного типа $X_1 \rightarrow S_1$ над T . Так как $\rho(X_1/T) = \rho(X/T) = 2$, то $\rho(S_1/T) = 1$ и мы имеем линк типа IV

$$\begin{array}{ccc} X & \dashrightarrow & Z' \stackrel{=}{=} X_1 \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi_1 \\ S & \longrightarrow & T \longleftarrow S_1 \end{array} \quad (1.4)$$

В обоих случаях X_1 $\mathbb{Q}$ -факториально по общему утверждению лог-ПММ и X_1 имеет не более чем терминальные особенности. Действительно, если E – исключительный дивизор над X_1 , центр $C(E, X_1)$ которого не содержится в множестве неопределенностей бирационального отображения $X_1 \dashrightarrow X$, то $a(E, X_1, 0) = a(E, X, 0) > 0$, так как X терминально. Если $C(E, X_1)$ содержится в множестве неопределенностей, то

$$a(E, X_1, 0) \geq a\left(E, X_1, \frac{1}{\mu}H_{X_1}\right) > a\left(E, X, \frac{1}{\mu}H_X\right) \geq 0.$$

Первое неравенство следует из эффективности H_{X_1} , второе – из утверждения Шокурова 3.13.5 (см. главу I), последнее – из того, что пара $\left(X, \frac{1}{\mu}H_X\right)$ канонична.

Так как $\left(K_{X_1} + \frac{1}{\mu}H_{X_1}\right)$ отрицательно над S_1 , то в обоих случаях $\mu_1 < \mu$, т.е. $(\mu_1, \lambda_1, e_1) < (\mu, \lambda, e)$.

1.6.2. Предположим теперь, что $\left(K + \frac{1}{\mu}H\right)$ -ПММ над T приводит к относительной над T лог-минимальной модели. Опять возникают две возможности: 1) первое не флиповое стягивание дивизориально; 2) вся последовательность состоит из лог-флипов.

В первом случае имеем $X \dashrightarrow Z'$ – последовательность лог-флипов и $Z' \rightarrow X_1$ – $\left(K + \frac{1}{\mu}H\right)$ – отрицательное дивизориальное стягивание над $T = S_1$, $\rho(X_1/S_1) =$

$\rho(X_1/T) = 1$, т.е. $X_1 \rightarrow S_1 = T$ — это конец $\left(K + \frac{1}{\mu}H\right)$ -ПММ. Так как дивизор $\left(K_{X_1} + \frac{1}{\mu}H_{X_1}\right)$ относительно численно эффективен над T , то он численно относительно тривиален. Действительно, пусть $C_1 \subset X_1$ — общая кривая в слоях $X_1 \rightarrow T$ вне центра дивизориального стягивания и вне флипирующих кривых. Тогда C_1 можно рассматривать так же, как кривую на X над T . Имеем:

$$\begin{aligned} 0 &\geq \left(K_X + \frac{1}{\mu}H_X\right)C_1 = \left(K_{X_1} + \frac{1}{\mu}H_{X_1}\right)C_1 \geq 0, \\ 0 &> \left(K_X + \left(\frac{1}{\mu} - \varepsilon\right)H_X\right)C_1 = \left(K_{X_1} + \left(\frac{1}{\mu} - \varepsilon\right)H_{X_1}\right)C_1 \geq K_{X_1}C_1, \end{aligned} \quad (1.5)$$

так как $H_{X_1}C_1 > 0$ из-за общности выбора кривой C_1 , так что $\left(K_{X_1} + \frac{1}{\mu}H_{X_1}\right)C_1 = 0$. Значит, стягивание $\varphi_1: X_1 \rightarrow S_1 = T$ — K_{X_1} -отрицательное Мори расслоенное пространство. Таким образом, возникает линк типа III, как в (1.3). Как и выше, X_1 $\mathbb{Q}$ -факториально и терминально.

Пусть $\left(K + \frac{1}{\mu}H\right)$ -ПММ над T целиком состоит из последовательности лог-флипов $X \dashrightarrow Z' = X$. Из (1.5) следует, что на X_1 существует $\left(K_{X_1} + \frac{1}{\mu}H_{X_1}\right)$ -тривиальный и K_{X_1} -отрицательный экстремальный луч. Пусть $\varphi_1: X_1 \rightarrow S_1$ — стягивание этого луча и $S_1 \rightarrow T$ — индуцированный морфизм с $\rho(S_1/T) = 1$. Возникает линк типа IV, как в (1.4).

Отметим, что в обоих случаях морфизм $S \rightarrow T$, а значит, и $S_1 \rightarrow T$ во втором случае бирационален. Действительно, предположим, что морфизм $S \rightarrow T$ не бирационален, т.е. $\dim S > \dim T$. Тогда для общей кривой C_1 , как выше, $\varphi(C_1)$ — кривая на S , стало быть,

$$0 > \left(K_X + \frac{1}{\mu}H_X\right)C_1 = \left(K_{X_1} + \frac{1}{\mu}H_{X_1}\right)C_1 \geq 0.$$

Противоречие. Более того, так как $K_{X_1} + \frac{1}{\mu}H_{X_1}$ тривиален над S_1 , то в обоих случаях $\mu_1 = \mu$. В такой ситуации трудно следить за степенью (μ, λ, e) и доказывать обрыв разложения (см. следующий § 2). Пока что мы можем только утверждать, что $\lambda_1 \leq \mu = \mu_1$. Действительно, начиная с канонической пары $\left(X, \frac{1}{\mu}H_X\right)$, после применения $\left(K + \frac{1}{\mu}H\right)$ -ПММ над T мы получаем опять каноническую пару $\left(X_1, \frac{1}{\mu}H_{X_1}\right)$, так что $\lambda_1 \leq \mu_1 = \mu$. (Заметим, что произвольная каноническая пара (X, D) может перестать быть канонической при стягивании компоненты дивизора D , но в нашем случае это невозможно, поскольку H — это общие дивизоры собственных образов линейной системы $\mathcal{H}$ без неподвижных компонент.)

1.7. Случай $\lambda > \mu$. В этом случае $\mathcal{H}_X$ имеет максимальные особенности и справедливо следующее предложение.

1.7.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если пара $(X, \mathcal{H}_X)$ имеет максимальные особенности, то существует максимальное экстремальное дивизориальное стягивание $p: Z \rightarrow X$ относительно $K_X + \frac{1}{\lambda}H_X$ такое, что Z имеет $\mathbb{Q}$ -факториальные терминальные особенности. (i) $\rho(Z/X) = 1$; (ii) исключительное множество для p – это неприводимый дивизор E ; (iii) морфизм p $\left(K + \frac{1}{\lambda}H\right)$ -крепантен, т.е. $K_Z + \frac{1}{\lambda}H_Z = p^*\left(K_X + \frac{1}{\lambda}H_X\right)$. (Исключительный дивизор E – это один из максимальных (или $\left(K + \frac{1}{\lambda}H\right)$ -крепантных) дивизоров $\{E_1, \dots, E_e\}$.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем общее разрешение, как в диаграмме (1.2), и применим $\left(K + \frac{1}{\lambda}H\right)$ -ПММ над X . В результате получим относительную лог-минимальную модель $\psi: \left(Z', \frac{1}{\lambda}H_{Z'}\right) \rightarrow \left(X, \frac{1}{\lambda}H_X\right)$. Как и выше, Z' имеет $\mathbb{Q}$ -факториальные терминальные особенности и, поскольку Z' и X $\mathbb{Q}$ -факториальны, исключительным множеством для ψ будет дивизор. Применяя лемму 1.7.2, находим, что исключительное множество для ψ – это дивизор $\bigcup_{i=0}^e E_i$ и что ψ $\left(K + \frac{1}{\lambda}H\right)$ -крепантен, т.е. $K_{Z'} + \frac{1}{\lambda}H_{Z'} = \psi^*\left(K_X + \frac{1}{\lambda}H_X\right)$. Ясно, что $\rho(Z'/X) = e$.

Теперь применим обычную K -ПММ к Z' над X , концом которой является обязательно дивизориальное стягивание $p: Z \rightarrow X$, которое и есть искомое максимальное дивизориальное раздутие.

1.7.2. ЛЕММА (об отрицательности, см. [38; 2.19], а также [42]). Пусть $f: Y \rightarrow X$ – бирациональный проективный морфизм нормальных многообразий. Предположим, что $\sum a_i E_i \equiv A + B$, где $\sum a_i E_i$ – $\mathbb{Q}$ -Картье дивизор на Y , E_i – исключительные дивизоры для f , A – $\mathbb{Q}$ -Картье дивизор f -nef и B – $\mathbb{Q}$ -Картье эффективный дивизор, ни одна из компонент которого не является f -исключительной. Тогда $a_i \leq 0 \quad \forall i$.

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Переходя к гиперплоским сечениям, можно свести все к двумерному случаю, где утверждение следует из теоремы об отрицательности формы пересечения стягиваемых кривых.

Продолжим построение раскручивающих линков при $\lambda > \mu$. Запустим $\left(K + \frac{1}{\lambda}H\right)$ -ПММ над S , начиная с Z . Прежде всего, из двух априорных возможностей окончания алгоритма: относительная лог-минимальная модель над S или лог-Мори расслоенное пространство над S , исключим первую.

1.7.3. Предположим, что мы получили лог-минимальную модель. Как и раньше, предстоит рассмотреть два случая:

- 1) первое не флишное стягивание дивизориально;
- 2) все стягивания флишковые.

В зависимости от этого получаем две диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} X \xleftarrow{p} Z \dashrightarrow Z' \xrightarrow{q} X_1 & & X \xleftarrow{\quad} Z \dashrightarrow X_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \xleftarrow{\sim} & S_1 \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} X \xleftarrow{\quad} Z \dashrightarrow X_1 & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \xlongequal{\quad} & S \end{array}.$$

Возьмем общую кривую C в слоях $X \rightarrow S$ (вне $p(E)$); можно считать, что она лежит на Z вне всех флиповых кривых, так что можно рассматривать ее и как кривую на Z' .

В первом случае имеем

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left(K_{X_1} + \frac{1}{\lambda}H_{X_1}\right)q_*C = \left\{\left(K_{Z'} + \frac{1}{\lambda}H_{Z'}\right) - aE_q\right\}C \\ &\leq \left(K_X + \frac{1}{\lambda}H_X\right)C < \left(K_X + \frac{1}{\mu}H_X\right)C = 0, \end{aligned}$$

так как $a > 0$ и $\lambda > \mu$. Противоречие.

Во втором случае

$$0 \leq \left(K_{X_1} + \frac{1}{\lambda}H_{X_1}\right)C = \left(K_Z + \frac{1}{\lambda}H_Z\right)C < \left(K_X + \frac{1}{\mu}H_X\right)C = 0,$$

опять противоречие.

1.7.4. Предположим теперь, что $\left(K + \frac{1}{\lambda}H\right)$ -ПММ над S заканчивается лог-Мори расслоенным пространством $X_1 \rightarrow S_1$ над S . Опять возникают два случая, как 1) и 2) в 1.7.3. В случае 1) имеем последовательность $\left(K + \frac{1}{\lambda}H\right)$ -флипов $Z \dashrightarrow Z'$ и $\left(K + \frac{1}{\lambda}H\right)$ -отрицательное стягивание $Z' \rightarrow X_1$. Так как $\rho(X_1/S) = 1$, то $\varphi_1: X_1 \rightarrow S_1 = S$ является $\left(K_{X_1} + \frac{1}{\lambda}H_{X_1}\right)$ -отрицательным и, следовательно, K_{X_1} -отрицательным стягиванием. Как и раньше, X_1 $\mathbb{Q}$ -факториально и терминально, так что мы имеем линк типа II.

В случае 2) $\left(K + \frac{1}{\lambda}H\right)$ -ПММ над S состоит из последовательности лог-флипов над S и приводит к $\left(K_{X_1} + \frac{1}{\lambda}H_{X_1}\right)$ -отрицательному и, следовательно, K_{X_1} -отрицательному стягиванию расслоенного типа $Z' = X_1 \rightarrow S_1$. Так как $\rho(X_1/S) = \rho(Z/S) = 2$, стало быть, $\rho(S_1/S) = 1$. Здесь мы имеем линк типа I.

1.7.5. Теперь изучим поведение степени (μ, λ, e) и покажем, что в обоих случаях $\mu_1 \leq \mu$ и равенство достигается, если только либо $\dim S_1 > \dim S$, либо $\dim S_1 = \dim S$ и линк Φ_1 является “квадратом”, т.е. существует бирациональное отображение $\tau: S_1 \dashrightarrow S$, обеспечивающее коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Phi_1} & X_1 \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi_1 \\ S & \xleftarrow{\tau} & S_1 \end{array}$$

и изоморфизм общих слоев $X_\eta \dashrightarrow X_{1,\eta}$, где $\eta \in S$ — общая точка.

Запишем

$$p^*\left(K_X + \frac{1}{\mu}H_X\right) = K_Z + \frac{1}{\mu}H_Z + bE,$$

где $b > 0$, $b \in \mathbb{Q}$, поскольку $\lambda > \mu$. Возьмем общую кривую C в слоях $X_1 \rightarrow S_1$ вне неопределенностей отображения $X_1 \dashrightarrow Z$. Тогда

$$\begin{aligned} 0 &= \left(K_X + \frac{1}{\mu}H_X\right)p_*C = \left(K_Z + \frac{1}{\mu}H_Z + bE\right)C \\ &\geq \left(K_Z + \frac{1}{\mu}H_Z\right)C = \left(K_{X_1} + \frac{1}{\mu}H_{X_1}\right)C. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\mu_1 \leq \mu$. Если $\mu_1 = \mu$, то либо $\dim S_1 > \dim S$, что возможно только для линка типа I, либо $\dim S_1 = \dim S$, тогда $\tau: S_1 \rightarrow S$ – бирациональный морфизм (изоморфизм для линка типа II) и $EC_1 = 0$, что означает $\varphi_1(E_*) \neq S_1$ и $\varphi(p(E)) \neq S$, где E_* – собственный образ E на X_1 . Стало быть, $\left(K + \frac{1}{\lambda}H\right)$ -ПММ осуществляет перестройки только над $\varphi(p(E))$, значит, Φ_1 – “квадрат”.

Далее, в обоих случаях $\lambda_1 \leq \lambda$, так как пара $\left(X_1, \frac{1}{\lambda}H_{X_1}\right)$ канонична, поскольку она получается из канонической пары $\left(X, \frac{1}{\lambda}H_X\right)$ через $\left(K + \frac{1}{\lambda}H\right)$ -ПММ и $\mathcal{H}$ – линейная система без неподвижных компонент.

Если $\lambda_1 = \lambda$, тогда $e_1 < e$. Действительно, если Φ_1 – линк типа II, то $K_{Z'} + \frac{1}{\lambda}H_{Z'} = q^*\left(K_{X_1} + \frac{1}{\lambda}H_{X_1}\right) + aE_q$, $a > 0$, и отсюда следует, что исключительный дивизор E_q не крепантен (образ E на X_1 является дивизором, но не исключительным). Стало быть, $e_1 \leq e - 1 < e$. Если Φ_1 – линк типа I, то образ E на X_1 тоже дивизор и тоже не исключительный, значит, $e_1 < e$.

Таким образом, если $\lambda > \mu$, то найдется линк Φ типа I или II, уменьшающий степень $(\mu_1, \lambda_1, e_1) < (\mu, \lambda, e)$ отображения χ . Напомним, что степень состоит из неотрицательных рациональных чисел и неизвестно, ограничены ли знаменатели λ , поэтому естественно возникает вопрос об остановке алгоритма раскручивания через конечное число шагов.

1.8. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.3. мы следуем здесь изложению, данному в [42; п. 13.1]. Предположим, что $\lambda \leq \mu$ и $K_X + \frac{1}{\mu}H_X$ численно эффективен. Покажем, прежде всего, что $\mu = \mu'$. Возьмем общее разрешение, как в диаграмме (1.2). Тогда

$$K_W + \frac{1}{\mu'}H_W \equiv p^*\left(K_X + \frac{1}{\mu'}H_X\right) + \sum c_i E_i \equiv q^*\left(K_{X'} + \frac{1}{\mu'}H_{X'}\right) + \sum c'_j E'_j,$$

где E_i (соответственно E'_j) – исключительные дивизоры для p (соответственно для q). Заметим, что поскольку $\mathcal{H}_W = q^*\mathcal{H}_{X'}$ свободна и X' терминально, то $c'_j = a'_j > 0 \forall j$, где $a'_j = a(E'_j, X', 0)$ – обычные дискрепантности для канонического дивизора $K_{X'}$.

Возьмем общую кривую C в слоях X/S , не задевающую $p(E_i)$ и не содержащуюся ни в одном $p(E'_j)$, тогда ее можно рассматривать так же, как кривую на W и

$$\begin{aligned} \left(K_X + \frac{1}{\mu'} H_X\right) C &= \left(p^* \left(K_X + \frac{1}{\mu'} H_X\right) + \sum c_i E_i\right) C \\ &= \left(q^* \left(K_{X'} + \frac{1}{\mu'} H_{X'}\right) + \sum c'_j E'_j\right) C \\ &= \left(\frac{1}{\mu'} q^* \varphi'^* A' + \sum c'_j E'_j\right) C \geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\mu \geq \mu'$. Напишем аналогичные формулы с $\frac{1}{\mu}$ вместо $\frac{1}{\mu'}$:

$$K_W + \frac{1}{\mu} H_W \equiv p^* \left(K_X + \frac{1}{\mu} H_X\right) + \sum d_i E_i \equiv q^* \left(K_{X'} + \frac{1}{\mu} H_{X'}\right) + \sum d'_j E'_j,$$

где $d_i \geq 0 \ \forall i$, по предположению $\lambda \leq \mu$. Для общей кривой C' в слоях X'/S' , не задевающей $q(E'_j)$ и не содержащейся ни в одном $q(E_i)$ (можно считать ее также лежащей и на W), имеем:

$$\begin{aligned} \left(K_{X'} + \frac{1}{\mu} H_{X'}\right) C' &= \left(q^* \left(K_{X'} + \frac{1}{\mu} H_{X'}\right) + \sum d'_j E'_j\right) C' \\ &= \left(p^* \left(K_X + \frac{1}{\mu} H_X\right) + \sum d_i E_i\right) C' \geq 0, \end{aligned}$$

так как по предположению $K_X + \frac{1}{\mu} H_X$ численно эффективен. Отсюда $\mu \leq \mu'$ и, комбинируя с предыдущим неравенством $\mu \geq \mu'$, получаем $\mu = \mu'$.

Теперь покажем, что если q не изоморфизм, то существует кривая Γ на W такая, что:

$$\begin{aligned} K_W \cdot \Gamma &< 0; \\ p^* L \cdot \Gamma &= 0 \text{ для некоторого обильного дивизора } L \text{ на } X; \\ q^* M \cdot \Gamma &= 0 \text{ для некоторого обильного дивизора } M \text{ на } X. \end{aligned}$$

Действительно, предположим, что q не изоморфизм, тогда

$$K_W = q^* K_{X'} + \sum a'_j E'_j, \quad \sum a'_j E'_j = \sum c'_j E'_j \neq 0.$$

Пусть $m = \dim q(\sum a'_j E'_j)$. Возьмем неособую поверхность V на W вида

$$V = \bigcap_{i=1}^m D_i \bigcap_{j=m+1}^{\dim W - 2} B_j,$$

где $D_i \in |q^* L|$ — общие дивизоры для L , очень обильного на X' , $B_j \in |B|$ — общие дивизоры для очень обильного B на W . Для ограничений на V имеем

$$p^* \left(K_X + \frac{1}{\mu} H_X\right) | V + \sum d_i E_i | V \equiv q^* \left(K_{X'} + \frac{1}{\mu} H_{X'}\right) | V + \sum d'_j E'_j | V.$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}\sum d_i E_i \mid V &= \sum b_\alpha T_\alpha + \sum b_\beta P_\beta + \sum b_\gamma Q_\gamma, \\ \sum d'_j E'_j \mid V &= \sum b'_\alpha T_\alpha + \sum b'_\gamma Q_\gamma,\end{aligned}$$

где T_α – кривые, исключительные как для $p \mid V$, так и для $q \mid V$, P_β – исключительные для $p \mid V$, но не для $q \mid V$, и Q_γ – исключительные для $q \mid V$, но не для $p \mid V$. В этих обозначениях имеем:

$$\begin{aligned}\sum (b_\alpha - b'_\alpha) T_\alpha + \sum b_\beta P_\beta &\equiv q^* \left(K_{X'} + \frac{1}{\mu} H_{X'} \right) \mid V + \sum b'_\gamma Q_\gamma \text{ над } X; \\ \sum (b'_\alpha - b_\alpha) T_\alpha + \sum (b'_\gamma - b_\gamma) Q_\gamma &\equiv p^* \left(K_X + \frac{1}{\mu} H_X \right) \mid V + \sum b_\beta P_\beta \text{ над } X' .\end{aligned}$$

По лемме об отрицательности 1.7.2 получаем:

$$\begin{aligned}b_\alpha - b'_\alpha &\leq 0 \text{ и } b'_\beta \leq 0; \\ b'_\alpha - b_\alpha &\leq 0 \text{ и } b'_\gamma - b_\gamma \leq 0.\end{aligned}$$

Так как $b'_\beta \geq 0$, то отсюда заключаем, что $b_\alpha = b'_\alpha$ и $b'_\beta = 0$.

С другой стороны, воспользовавшись той же леммой об отрицательности, можно показать, что

$$p^* \left(K_X + \frac{1}{\mu} H_X \right) \equiv q^* \left(K_{X'} + \frac{1}{\mu} H_{X'} \right).$$

Отсюда вместе с предыдущим имеем $0 \equiv b'_\gamma$ на V . Так как $b'_\gamma \geq 0$, то отсюда следует, что $b'_\gamma = 0$. Следовательно,

$$\sum d'_j E'_j \mid V = \sum b'_\alpha T_\alpha.$$

Так как форма пересечений стягиваемых кривых отрицательна, имеем

$$\begin{aligned}0 &> \left(\sum b'_\alpha T_\alpha \right)^2 = \left(\sum d'_j E'_j \right) \left(\sum b'_\alpha T_\alpha \right) \\ &= \left(q^* K_{X'} + \sum d'_j E'_j \right) \left(\sum b'_\alpha T_\alpha \right) = K_W \sum b'_\alpha T_\alpha,\end{aligned}$$

значит, для некоторого α $K_W T_\alpha < 0$ и $p^* L \cdot T_\alpha = 0$, поскольку T_α p -исключительна. Возьмем $\Gamma = T_\alpha$.

Отсюда заключаем по теореме о конусе, что существует экстремальный луч $R \in \overline{NE}(W)$ такой, что $p^* L \cdot R = q^* M \cdot R = 0$. Стягивание R дает морфизм $W = W_0 \rightarrow W_1$. Морфизмы $p = p_0$ и $q = q_0$ пропускаются через W_1 и дают морфизмы $p_1: W_1 \rightarrow X$ и $q_1: W_1 \rightarrow X'$. Если q_1 не изоморфизм, то можно повторить предыдущие рассуждения и продолжить процесс. В конце концов мы придем к ситуации, когда $\sigma: X' \rightarrow X$ – бирациональный морфизм.

Запишем

$$\sigma^* \left(K_X + \frac{1}{\mu} H_X \right) + G \equiv K_{X'} + \frac{1}{\mu} H_{X'} = \frac{1}{\mu} \varphi'^* A'.$$

Отсюда заключаем, что $G = 0$, иначе можно найти кривую F на X' , отображаемую в точку и такую, что

$$0 > GF = \left(\sigma^* \left(K_X + \frac{1}{\mu} H_X \right) + G \right) F = \left(K_{X'} + \frac{1}{\mu} H_{X'} \right) F = \frac{1}{\mu} \varphi'^* A' \cdot F \geq 0.$$

Противоречие.

Следовательно, $\sigma^* \left(K_X + \frac{1}{\mu} H_X \right) \equiv K_{X'} + \frac{1}{\mu} H_{X'} = \frac{1}{\mu} \varphi'^* A'$. Теперь для любой точки $s \in S$ и кривой $C_s \subset (\gamma \circ \sigma)^{-1}(s)$ имеем

$$0 = \sigma^* \left(K_X + \frac{1}{\mu} H_X \right) \cdot C_s = A' \cdot \varphi'_* C_s,$$

что означает, что $\varphi'((\varphi \circ \sigma)^{-1}(s))$ – точка на S' , так как A' обилиен. Стало быть, существует морфизм $\tau: S \rightarrow S'$, делающий следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\sigma} & X' \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi' \\ S & \xrightarrow{\tau} & S' \end{array}.$$

Но так как φ' – экстремальное стягивание, то все кривые в слоях численно пропорциональным, значит, σ и τ должны быть изоморфизмами, что приводит к изоморфизму двух Мори расслоенных пространств.

§ 2. Обрыв алгоритма разложения на элементарные линки

2.1. Для обрыва процесса разложения надо показать, что степень отображения χ не может уменьшаться бесконечно много раз. Как было отмечено в 1.2, множество квазиэффективных порогов $\{\mu\}$ дискретно и положительно, множество $\{e\}$ – это множество неотрицательных целых чисел. Проблема в неконтролируемости множества $\{\lambda\}$ “кратностей” особенностей пар (X, H_X) , или множества $\left\{ \frac{1}{\lambda} \right\}$ канонических порогов. Замечательный подход к проблеме обрыва предложен Корти [7] – редукция задачи к свойству лог-канонических порогов, называемому $S_n(\text{Local})$ (см. [38]), при стабилизации квазиэффективного порога μ . В 3-мерном случае нужное утверждение из $S_3(\text{Local})$ было доказано В. Алексеевым, общий случай $n \geq 4$ остается открытым.

2.2. ТЕОРЕМА (Алексеев, [1]; см. также [38]). Пусть $\mathcal{A}$ – множество всех лог-канонических порогов для пар (X, H_X) , где X – 3-мерное $\mathbb{Q}$ -факториальное терминальное многообразие, и $\mathcal{H}_X$ – линейная система без неподвижных компонент на X . Тогда $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ не имеет точек накопления снизу, иначе говоря, в $\mathcal{A}$ выполняется условие обрыва возрастающих цепочек.

Используя этот факт, Корти [7] доказал обрыв в разложении на линки по программе Саркисова. Следуя [42], мы воспроизведем здесь это доказательство и тем самым завершим доказательство теоремы 1.5. Будем работать в обозначениях § 1.

2.3. ЛЕММА. *Не существует бесконечного числа раскручивающих линков в случае $\lambda \leq \mu$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в 1.6, при $\lambda \leq \mu$ $\left(K + \frac{1}{\mu}H\right)$ -ПММ над T приводит к линку, заканчивающемуся либо лог-Мори расслоенным пространством над T , либо лог-минимальной моделью над T . Предположим сначала, что существует бесконечная последовательность линков

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{-\Phi_i} & X_{i+1} \\ \varphi_i \downarrow & & \downarrow \varphi_{i+1} \\ S_i & & S_{i+1} \end{array},$$

заканчивающихся лог-Мори расслоенным пространством. Так как $\lambda_i \leq \mu_i$, то $\dim S_i \geq 1$ (иначе Φ_i — изоморфизм по 1.3). Если $\dim S_i = 2$ (расслоение на коники) и l — общий слой φ_i , т.е. неособая рациональная кривая, то $K_{X_i}l = -2$ и $\left(K_{X_i} + \frac{1}{\mu_i}H_{X_i}\right)l = 0$, значит, $\mu_i \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Если $\dim S_i = 1$ (Дель Пешо расслоение) и l — рациональная кривая на общем слое (поверхности Дель Пешо), то $K_{X_i}l$ равно -1 , -2 или -3 и $\mu_i \in \frac{1}{2,3}\mathbb{Z}$.

Таким образом, множество $\{\mu_i\}$ в этом случае дискретно и, так как по 1.6 λ строго убывает, то не может быть бесконечной убывающей последовательности $\dots > \mu_i > \mu_{i+1} > \dots$. Противоречие.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда $\left(K + \frac{1}{\mu}H\right)$ -ПММ поиска откручивающего линка при $\lambda \leq \mu$ заканчивается лог-минимальной моделью над T . По 1.6.2 имеем $\mu_1 = \mu$ и $\lambda_1 \leq \mu_1 = \mu$. Предположим, что существует бесконечная последовательность таких линков в раскручивании бирационального отображения $\chi: X \dashrightarrow X'$. Тогда для линков типа III имеем $\rho(X_{i+1}) = \rho(X_i) - 1$, так что их не может быть бесконечно много. Для линков типа IV $\rho(X_{i+1}) = \rho(X_i)$, так что должна существовать бесконечная последовательность $\left(K + \frac{1}{\mu}H\right)$ -флипов над T , что противоречит теореме об обрыве лог-флипов в размерности 3 (см. [27], [38]). Следует отметить только, что лог-флип над T является также и лог-флипом над $\mathbb{C}$, т.е. обычным флипом, обратным к нему, или флопом. Лемма доказана.

2.4. ЛЕММА. *Не существует бесконечной последовательности раскручивающих линков в случае $\lambda > \mu$ и при фиксированном квазиэффективном пороге μ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Главная идея Корти [7] работает именно здесь. Предположим, что существует бесконечная последовательность таких линков

$$\begin{array}{ccccccc} X = X_0 & \xrightarrow{-\Phi_0} & X_1 & \xrightarrow{-\Phi_1} & X_2 & \dashrightarrow & \dots \dashrightarrow X_i \xrightarrow{-\Phi_i} X_{i+1} \dots \\ \varphi \downarrow & & \varphi_1 \downarrow & & \varphi_2 \downarrow & & \varphi_i \downarrow \quad \varphi_{i+1} \downarrow \\ S = S_0 & \longleftarrow & S_1 & \longleftarrow & S_2 & \longleftarrow & \dots \longleftarrow S_i \longleftarrow S_{i+1} \dots \end{array}.$$

По условию $\mu_i = \mu_{i+1} \forall i$, так что по 1.7.5 либо $\dim S_{i+1} > \dim S_i$, либо $\dim S_{i+1} = \dim S_i$ и Φ_i — “квадрат”. Первый случай не может появляться бесконечное число раз,

поэтому можно считать, что для всех i имеет место второй случай. Так как “квадрат” над точкой $\text{Spec } \mathbb{C}$ – это только изоморфизм, то $\dim S_i \geq 1 \ \forall i$. Последовательность $\{\lambda_i\}$ невозрастающая, и если $\lambda_i = \lambda_{i+1}$, то $e_{i+1} < e_i$, так что можно предполагать, что последовательность λ_i не стабилизируется. Следовательно, последовательность $\{1/\lambda_i\}$ накапливается снизу к некоторому числу $\alpha \leq 1/\mu_0$ и не достигает его.

2.4.1. Пусть $p_i: Z_i \rightarrow X_i$ – максимальное дивизориальное раздутие относительно $K + \frac{1}{\lambda}H$ с исключительным дивизором E_i . Тогда $(X_i, \alpha H_{X_i})$ и $(Z_i, \alpha H_{Z_i})$ для i достаточно больших (значит, можно считать, для всех) имеют лог-канонические особенности. Действительно, пусть α_i – лог-канонический порог для (X_i, H_{X_i}) . Ясно, что $\alpha_i > 1/\lambda_i$. Если $\alpha_i < \alpha$ для бесконечно многих i , то строго возрастающая подпоследовательность $\{\alpha_i\}$ лог-канонических порогов имела бы точкой накопления число α , что противоречит теореме 2.2. То же самое относится и к $(Z_i, \alpha H_{Z_i})$. Следовательно, можно предполагать, что $\alpha_i \geq \alpha \ \forall i$, значит, $(X_i, \alpha H_{X_i})$ и $(Z_i, \alpha H_{Z_i})$ имеют лог-канонические особенности.

Отметим, что если аналог утверждения 2.2 был бы верен для множества канонических порогов пар (X, H_X) , то из него немедленно следовало бы утверждение об обрыве. Однако это неизвестно.

Каждый линк $X_i \dashrightarrow X_{i+1}$ состоит из максимального раздутия $Z_i \rightarrow X_i$ и конечного числа $\left(K + \frac{1}{\lambda_i}H\right)$ -флипов

$$Z_i = Z_i^0 \xrightarrow{t^0} Z_i^1 \xrightarrow{t^1} Z_i^2 \dashrightarrow \dots \dashrightarrow Z_i^m,$$

возможно, с последующим дивизориальным стягиванием $q_i^m: Z_i^m \rightarrow X_i^{m+1} = X_{i+1}$, в противном случае $Z_i^m = X_i^{m+1} = X_{i+1}$.

2.4.2. Покажем, что каждый шаг

$$\begin{array}{ccc} Z_i^k & \dashrightarrow & Z_i^{k+1} \\ q_i^k \searrow & & \swarrow p_i^{k+1} \\ & X_i^{k+1} & \end{array}$$

является шагом в $(K + \alpha H)$ -ПММ. Доказательство проведем индукцией по k . Так как $\alpha > 1/\lambda_i$, то

$$K_{Z_i} + \alpha H_{Z_i} = p_i^{0*}(K_{Z_i} + \alpha H_{Z_i}) - aE_i, \quad a > 0.$$

Следовательно, $(K_{Z_i^0} + \alpha H_{Z_i^0})P_i^0 > 0$, где P_i^0 – экстремальный луч, стягиваемый морфизмом p_i^0 . Заметим, что $K_{Z_i^k} + \alpha H_{Z_i^k}$ не может быть относительно численно эффективным над $S_i \ \forall k, i$. Действительно, $\alpha \leq 1/\mu_i = 1/\mu_0$ и, если $\alpha = 1/\mu_i$, тогда $K_{Z_i^k} + \alpha H_{Z_i^k} \equiv -a(E_i^k)$, $a > 0$, где E_i^k – собственный образ E_i на Z_i^k , стало быть, не численно эффективен над S_i .

Если $\alpha < 1/\mu_i$, тогда для общей кривой C_i в слоях $X_i \rightarrow S_i$, вне неопределенностей бирационального отображения $X_i \dashrightarrow Z_i^k$, имеем

$$(K_{Z_i^k} + \alpha H_{Z_i^k})C_i = (K_{X_i} + \alpha H_{X_i})C_i < \left(K_{X_i} + \frac{1}{\mu_i}H_{X_i}\right)C_i = 0.$$

Отсюда следует, что $(K_{Z_i^k} + \alpha H_{Z_i^k})Q_i^k < 0$ для некоторого другого экстремального луча Q_i^k в двумерном конусе $\overline{NE}(Z_i^k/S_i)$, порожденном $P_i^k, Q_i^k, k = 0, \dots, m-1$. Это доказывает 2.4.2, так как по предположению индукции $(K_{Z_i^k} + \alpha H_{Z_i^k})P_i^k > 0$.

Отсюда по замечанию Шокурова 3.13.5, глава I, следует, что $a(v, X, \alpha H_X) \leq a(v, X_i, \alpha H_{X_i})$ для любого геометрического дискретного нормирования v поля $k(X)$ и неравенство является строгим тогда и только тогда, когда Φ_j не изоморфизм в центре $C(v, X_j)$ для некоторого $j < i$.

2.4.3. Покажем, что пара $(X_i, \alpha H_{X_i})$ чисто лог-терминальна (plt) для $i \gg 0$ (можно считать, что для всех i). Предположим противное, т.е. для бесконечного множества индексов i $(X_i, \alpha H_{X_i})$ не plt. Поскольку по 2.4.1 $(X_i, \alpha H_{X_i})$ lc, то это предположение означает, что для любого i существует нормирование v_i поля $k(X)$ с $a(v_i, X_i, \alpha H_{X_i}) = -1$, значит, по предыдущему $a(v_i, X, \alpha H_X) = -1$ и в центре $C(v_i, X_i)$ бирациональное отображение $\Phi_{i-1} \dots \Phi_1 \Phi_0: X_0 \dashrightarrow X_i$ является изоморфизмом. Следовательно, локально в топологии Зариского локальный канонический порог сохраняется:

$$c(C(v_i, X_i), X_i, H_{X_i}) = c(C(v_i, X), X, H_X).$$

С другой стороны, по определению $1/\lambda_i \leq c(C(v_i, X_i), X_i, H_{X_i})$, и так как $K_{X_i} + \alpha H_{X_i}$ не канонично в центре $C(v_i, X_i)$, то

$$c(C(v_i, X_i), X_i, H_{X_i}) < \alpha.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\lambda_i} \leq c(C(v_i, X), X, H_X) < \alpha.$$

Но $\{1/\lambda_i\}$ не убывающая и не стабилизирующаяся последовательность, сходящаяся к α , а множество $\{c(x, X, H_X) \mid x \in X\}$ конечно. Противоречие.

Отметим, что дискретные нормирования поля $k(X)$, соответствующие исключительным дивизорам E_i , все различны. Действительно, если E_i и E_j , $i < j$, совпадают, то Z_i и Z_j изоморфны в окрестностях E_i и E_j и тогда $a(E_i, X_i, \alpha H_{X_i}) = a(E_j, X_j, \alpha H_{X_j})$. Но по 2.4.2 имеем:

$$a(E_i, X_i, \alpha H_{X_i}) < a(E_j, X_j, \alpha H_{X_j}).$$

Теперь, чтобы завершить доказательство леммы 2.4, заметим, что по 2.4.3 можно считать, что пара $(X, \alpha H_X)$ имеет только чисто лог-терминальные особенности. С другой стороны, для бесконечно многих различных E_i

$$a(E_i, X, \alpha H_X) \leq a(E_i, X_i, \alpha H_{X_i}) < 0,$$

что невозможно. Противоречие.

Осталось пояснить, почему стабилизируется последовательность квазиэффективных порогов $\{\mu_i\}$.

2.5. ЛЕММА. *Не существует бесконечной последовательности раскручивающих линков в случае $\lambda > \mu$ с нестационарным квазиэффективным порогом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует такая бесконечная последовательность, и пусть для некоторого i_0 $\dim S_{i_0} \geq 1$. Тогда для всех $i \geq i_0$ имеем $\mu_i \in \frac{1}{3!}\mathbb{N}$, так как каждый раз мы имеем дело либо с Дель Пеццо расслоением, либо с расслоением на коники. Последовательность $\{\mu_i\}$ невозрастающая и дискретная, значит, стабилизирующаяся. Противоречие.

Аналогично, если $\dim S_i = 0 \ \forall i$, то X_i – $\mathbb{Q}$ -Фано размерности 3 с $\rho(X_i) = 1$. Как уже отмечалось, Кавамата [24] доказал ограниченность семейств таких $\mathbb{Q}$ -Фано многообразий, откуда следует ограниченность индекса горенштейновости, т.е. существует $e \in \mathbb{N}$ такое, что eK_{X_i} – дивизор Картье для любого i .

В работе [41] Доказаны более точные и более общие утверждения. А именно, пусть X – 3-мерное слабое $\mathbb{Q}$ -Фано многообразие, т.е. терминальное $\mathbb{Q}$ -факториальное многообразие с $-K_X$ nef и big (в частности, с $-K_X$ обильным), тогда:

- 1) $e(X)/24!$;
- 2) если $\varphi_{|-mK_X|}: X \rightarrow \overline{X} \subset \mathbb{P}^{\dim|-mK_X|}$, $m \gg 0$, не стягивает дивизоров, то $(-K_X)^3 \leq 6^3 \cdot (24!)^2$;
- 3) семейство всех терминальных 3-мерных $\mathbb{Q}$ -Фано многообразий X (с любым числом Пикара $\rho(X)$) ограничено, более того, семейство канонических таких многообразий тоже ограничено.

Возвращаясь к доказательству леммы 2.5, заметим, что из ограниченности семейства $\mathbb{Q}$ -Фано многообразий следует, что существует $d \in \mathbb{N}$ такое, что dD является дивизором Картье для всех неприводимых дивизоров Вейля D на X_i . Далее, из ограниченности длины экстремального луча следует, что на X_i существует рациональная кривая l_i с $0 < -K_{X_i}l_i \leq 2 \dim X = 6$. Отсюда следует, что $\mu_i \in \frac{1}{(6 \cdot 24)!d}\mathbb{Z}$. Таким образом, последовательность $\{\mu_i\}$ должна стабилизироваться, как и выше. Это завершает доказательство обрыва алгоритма раскручивания по программе Саркисова.

§3. Приложения: бирациональная жесткость некоторых 3-мерных гиперповерхностей Фано

3.1. Начнем с простейшего примера гладкой 3-мерной квартики в $\mathbb{P}^4$. Следуя Корти [8] (см. также [17]), изложим новое доказательство ее бирациональной (сверх-) жесткости, демонстрирующее значительный успех теории Мори (по сравнению с традиционными методами доказательства в [18]).

Напомним, что многообразие Фано X называется *бирационально жестким*, если для всякого бирационального отображения $\chi: X \dashrightarrow Y$ на Мори расслоенное пространство $Y \rightarrow S$ существует бирациональный автоморфизм $\beta \in \text{Bir}(X)$ такой, что $\chi \circ \beta$ – изоморфизм; если $\text{Bir}(X) = \text{Aut}(X)$, то X называется *сверхжестким*.

3.2. ТЕОРЕМА [18], [8], [17]. *Гладкая гиперповерхность $X = X_4 \subset \mathbb{P}^4$ бирационально сверхжестка.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Основная идея Корти [8] – это редукция к двумерному случаю посредством теорем Шокурова об обращении присоединения 2.12, глава I, и связности 2.11, глава I, и применение двумерной леммы Корти о кратности (п. 3.3 ниже).

Предположим, что существует бирациональное отображение χ , не являющееся изоморфизмом,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\chi} & X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ S = \text{Spec } \mathbb{C} & & S' \end{array}$$

на некоторое Мори расслоение $X' \rightarrow S'$. Воспользуемся обозначениями из § 1, тогда для $\mathcal{H}_X = \chi_*^{-1} \mathcal{H}_{X'}$ пара $(X, \mathcal{H}_X)$ имеет максимальную особенность по теории Нётера–Фано 1.3. Пусть E – максимальная особенность $\mathcal{H}_X$ и $\Gamma = C(E, X)$ – ее центр на X . Тогда $\dim \Gamma$ равна 1 или 0.

Рассмотрим сначала случай $\dim \Gamma = 1$. Пусть $r(\Gamma) = \text{mult}_\Gamma \mathcal{H}_X$ – кратность линейной системы $\mathcal{H}_X$ в общей точке кривой Γ , тогда $r(\Gamma) > \mu$. Действительно, пусть $p: Z \rightarrow X$ – максимальное раздутие (см. 1.4 и 1.7.1) с исключительным дивизором E . Так как Z имеет не более чем терминальные особенности, то в общей точке Γ – это обычное неособое раздутие. Следовательно,

$$0 = a\left(E, X, \frac{1}{\lambda} H_X\right) = a(E, X, 0) - \frac{1}{\lambda} r(\Gamma) = 1 - \frac{1}{\lambda} r(\Gamma),$$

откуда $r(\Gamma) = \lambda$. Но $\lambda > \mu$, так как E – максимальная особенность, значит, $r(\Gamma) > \mu$, что невозможно по лемме Пухликова (3.1, глава III ниже).

Рассмотрим теперь случай $\Gamma = P$ – точка на X . Пусть $S \ni P$ – общее гиперплоское сечение через точку P и $\mathcal{L}_S = \mathcal{H}_X|_S$ – ограничение линейной системы $\mathcal{H}_X$ на S , тогда $\mathcal{L}_S$ не имеет неподвижных компонент, как и $\mathcal{H}_X$. Поскольку $K_X + \frac{1}{\mu} H_X$ не канонично ($\lambda > \mu$), т.е. существует дивизориальное нормирование E_k , исключительное над X с $a\left(E_k, X, \frac{1}{\mu} H_X\right) < 0$, то $K_X + S + \frac{1}{\mu} H_X$ не лог-канонично. Действительно, $a\left(E_k, X, S + \frac{1}{\mu} H_X\right) = a\left(E_k, X, \frac{1}{\mu} H_X\right) - b_k(S) < -1$, где $b_k(S)$ – кратность S в E_k (как в диаграмме (1.2)). Здесь $b_k(S)$ – целое число ≥ 1 , так как $C(E_k, X) = P \in S$. По теореме Шокурова 2.12, глава I, $K_X + S + \frac{1}{\mu} H_X|_S = K_S + \frac{1}{\mu} \mathcal{L}_S$ не лог-канонично в $P \in S$. Применим лемму Корти 3.3 (ниже) с $a_1 = a_2 = 1$, получим $\text{mult}_P \mathcal{L}_S^2 > 4\mu^2$. Следовательно,

$$4\mu^2 = \mathcal{L}_S^2 \geq \text{mult}_P \mathcal{L}_S^2 > 4\mu^2$$

(равенство невозможно, так как $(S_\mu^{-1}, \mathcal{L}_S)$ не лог-каноничен в P). Это противоречие завершает доказательство теоремы 3.2.

3.3. ЛЕММА (Корти [8]). Пусть P – гладкая точка на поверхности S и для некоторых неотрицательных рациональных чисел a_1, a_2 пара

$$\left(S, (1 - a_1)\Delta_1 + (1 - a_2)\Delta_2 + \frac{1}{\mu}\mathcal{L}_S\right)$$

не лог-терминальна в P , где $\mathcal{L}_S$ – подвижная линейная система без неподвижных компонент, Δ_1, Δ_2 – неприводимые приведенные кривые, трансверсально

пересекающиеся в P . Тогда для локального индекса пересечения $\text{mult}_P \mathcal{L}_S^2$ в точке P справедливо неравенство

$$\text{mult}_P \mathcal{L}_S^2 \geq \begin{cases} 4a_1a_2\mu^2, & \text{если } a_1 \leq 1 \text{ или } a_2 \leq 1, \\ 4(a_1 + a_2 - 1)\mu^2, & \text{если } a_1 > 1 \text{ и } a_2 > 1, \end{cases}$$

причем равенство возможно, если только пара

$$\left(S, (1 - a_1)\Delta_1 + (1 - a_2)\Delta_2 + \frac{1}{\mu}\mathcal{L}_S \right)$$

лог-канонична, $a_1 = a_2$, кратность $\mathcal{L}_S$ в P равна $2a_1\mu$ и $\text{mult}_P \mathcal{L}_S^2 = 4a_1^2\mu^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (см. [8]). Обозначим $D = (1 - a_1)\Delta_1 + (1 - a_2)\Delta_2 + \frac{1}{\mu}\mathcal{L}_S$ (D не обязательно эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор). По предположению существует дивизориальное нормирование E с $a(E, S, D) \leq -1$.

Шаг 1. Покажем, что из первого неравенства следует второе (с $a_1 > 1$ и $a_2 > 1$). Пусть $b_i = b_E(\Delta_i)$ – кратности Δ_i в E , и пусть, скажем, $b_1 \geq b_2$, $i = 1, 2$. Тогда

$$\begin{aligned} -1 &\geq a(E, S, D) = a(E, S, 0) - b_E(D) \\ &= a(E, X, 0) + b_1(a_1 - 1) + b_2(a_2 - 1) - \frac{1}{\mu}b_E(\mathcal{L}_S) \\ &\geq a(E, S, 0) + b_2(a_1 + a_2 - 2) - \frac{1}{\mu}b_E(\mathcal{L}_S) \\ &= a\left(E, S, (2 - a_1 - a_2)\Delta_2 + \frac{1}{\mu}\mathcal{L}_S\right). \end{aligned}$$

Это означает, что $K_S + D' = K_S + (2 - a_1 - a_2)\Delta_2 + \frac{1}{\mu}\mathcal{L}_S$ не лог-терминален и второе неравенство для $K_S + D$ – это первое неравенство для $K_S + D'$ с $a'_1 = 1$ и $a'_2 = a_1 + a_2 - 1$.

Шаг 2. Предположим, что $a_1 \leq 1$, и будем доказывать первое неравенство по индукции для целых чисел $a(E, S, 0) = a(E, K_S)$ (так как $P \in S$ – неособая точка). Пусть $(F \subset T) \xrightarrow{\sigma} (P \in S)$ – раздутие точки $P \in S$. Имеем:

$$\sigma^*(K_S + D) = K_T + (1 - a_1)\Delta'_1 + (1 - a_2)\Delta'_2 + \left(1 - a_1 - a_2 + \frac{b}{\mu}\right)F + \frac{1}{\mu}\mathcal{L}_T = K_T + D^T,$$

где $\Delta'_1, \Delta'_2, \mathcal{L}_T$ собственные прообразы $\Delta_1, \Delta_2, \mathcal{L}_S$ – соответственно, $b = b_F(\mathcal{L}_S)$ – кратность $\mathcal{L}_S$ в точке P . По условию $a(E, T, D^T) \leq -1$. В зависимости от положения центра $C(E, T)$ на F рассмотрим все возможные случаи.

(i) $E = F$, в этом и только в этом случае $a(E, K_S) = 1$. Здесь $a(E, D^T) \leq -1 \iff a_1 + a_2 - 1 - \frac{b}{\mu} \leq -1 \implies b \geq (a_1 + a_2)\mu$, так что $\text{mult}_P \mathcal{L}_S^2 \geq b^2 \geq (a_1 + a_2)^2\mu^2 \geq 4a_1a_2\mu^2$ и равенство достигается, если и только если $a_1 = a_2$, $b = 2a_1\mu$ и $\text{mult}_P \mathcal{L}_S^2 = b^2$.

(ii) $C(E, T) = F \cap \Delta'_1$; так как $a(E, K_T) < a(E, K_S)$, то по предположению индукции можно считать, что результат верен для $K_T + D^T$. Имеем

$$\begin{aligned} \text{mult}_P \mathcal{L}_S^2 &> 4a_1 \left(a_1 + a_2 - \frac{b}{\mu} \right) \mu^2 + b^2 \\ &= 4a_1^2 \mu^2 - 4a_1 b \mu + b^2 + 4a_1 a_2 \mu^2 \\ &= (2a_1 \mu - b)^2 + 4a_1 a_2 \mu^2 \geq 4a_1 a_2 \mu^2, \end{aligned}$$

причем неравенство строгое, поскольку в противном случае $a_1 = a_2 = b = 0$, что невозможно по условию.

(iii) $C(E, T) = F \cap \Delta'_2$; если $a_2 \leq 1$ или $\left(a_1 + a_2 - \frac{b}{\mu} \right) \leq 1$, то верны те же оценки, что и в предыдущем случае, если же $a_2 > 1$ и $a_1 + a_2 > 1$, то

$$\text{mult}_P \mathcal{L}_S^2 \geq 4 \left(a_2 + a_1 + a_2 - \frac{b}{\mu} - 1 \right) \mu^2 + b^2 > 4a_2 \mu^2 \geq 4a_1 a_2 \mu^2,$$

так как по предположению $a_1 \leq 1$.

(iv) $C(E, T) \in F - (F \cap \Delta'_1 + \Delta'_2)$; здесь

$$\begin{aligned} \text{mult}_P \mathcal{L}_S^2 &\geq 4 \left(a_1 + a_2 - \frac{b}{\mu} \right) \mu^2 + b^2 \geq 4a_1 \left(a_1 + a_2 - \frac{b}{\mu} \right) \mu^2 + b^2 \\ &\geq (2a_1 \mu - b)^2 + 4a_1 a_2 \mu^2 \geq 4a_1 a_2 \mu^2, \end{aligned}$$

точно так, как в случае (ii), причем равенство также невозможно.

3.4. ЗАМЕЧАНИЯ. (i) По теореме 3.2 на гладкой кватерике $X_4 \subset \mathbb{P}^3$ нет никаких бирациональных структур Дель Пеццо расслоений и расслоений на коники, в частности, X_4 не рациональна. Однако на X_4 существуют бирациональные структуры расслоений на эллиптические кривые и K_3 -поверхности, причем эти структуры легко классифицируются (см. 1.4 (iii), глава III).

(ii) Кватерика $X_4 \subset \mathbb{P}^4$ — это единственная 3-мерная гиперповерхность, являющаяся антиканонически вложенным (как гиперповерхность) 3-мерным многообразием Фано. Оказывается, что существует 95 семейств антиканонических 3-мерных гиперповерхностей $\mathbb{Q}$ -Фано во взвешенных проективных пространствах $\mathbb{P}(a_0, \dots, a_4)$ (см. [12], [9]). Все общие члены этих семейств, кроме кватерики $X_4 \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 1, 1) = \mathbb{P}^4$ и $X_6 \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 1, 3)$ — двойного накрытия $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в секстике, имеют терминальные циклические факторособенности типа $\frac{1}{r}(1, a, r-a)$, $(a, r) = 1$. Удивительно, но все они оказываются бирационально жесткими (хотя на многих существуют нетривиальные бирациональные автоморфизмы) — это результат замечательной работы [9], где явное применение программы Саркисова приводит к описанию всех элементарных линков (образующих в группах бирациональных автоморфизмов).

После некоторого предварительного обсуждения геометрии гиперповерхностей во взвешенных проективных пространствах мы рассмотрим один простейший случай описания бирациональных линков на $X_5 \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 1, 2)$ в рамках программы Саркисова.

3.5. Напомним некоторые определения и факты из геометрии гиперповерхностей во взвешенных проективных пространствах (см. [12], [11]). Пусть $\mathbb{P}(a_0, a_1, \dots, a_n)$ — n -мерное взвешенное проективное пространство с однородными координатами

$(x_0, \dots, x_n)$ и их целыми весами $(a_0, \dots, a_n)$ (можно считать, что $a_0, \dots, a_n$ взаимно просты в совокупности), т.е. $\mathbb{P}(a_0, a_1, \dots, a_n)$ – это фактор $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{C}^*$ относительно действия $\lambda(x_0, \dots, x_n) = (\lambda^{a_0} x_0, \dots, \lambda^{a_n} x_n)$. Эквивалентно, $\mathbb{P}(a_0, \dots, a_n) = \text{Proj } \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$, где градуировка в кольце многочленов $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ задается как $\deg x_i = a_i$. Аффинный кусок $x_i \neq 0$ в $\mathbb{P}(a_0, \dots, a_n)$ изоморфен $\mathbb{A}^n / \mathbb{Z} a_i$ с действием вида $z_j \mapsto \xi^{a_j} z_j \ \forall j \neq i$, где ξ – первообразный корень из 1 степени a_i , на координатах $(z_0, z_1, \dots, \hat{z}_i, \dots, z_n)$ в $\mathbb{A}^n$; здесь z_j представляются как $x_j / x_i^{a_j/a_i}$ по аналогии с обычным проективным пространством $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(1, \dots, 1)$.

3.5.1. ЛЕММА [12]. (i) Пусть S – градуированное коммутативное кольцо с 1 и $S^{(q)} = \sum_{m \geq 0} S_{qm} \subset S$ – усеченное подкольцо, тогда $\text{Proj } S^{(q)} = \text{Proj } S$.

(ii) Пусть $a_0, \dots, a_n$ – положительные целые числа, взаимно простые в совокупности. Если $q = \text{НОД}(a_1, \dots, a_n)$, тогда $\text{Proj } S(a_0, \dots, a_n) = \text{Proj } S(a_0, a_1/q, \dots, a_n/q)$.

(iii) $\mathbb{P}(a_0, \dots, a_n) = \mathbb{P}(b_0, \dots, b_n)$ для некоторых целых $(b_0, \dots, b_n)$ таких, что $\text{НОД}(b_0, \dots, \hat{b}_i, \dots, b_n) = 1 \ \forall i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) – это элементарный факт из учебников по алгебраической геометрии. Для доказательства (ii) рассмотрим $S^{(q)} \subset S$, и пусть $x_0^{p_0} \dots x_n^{p_n}$ – моном степени $qm \ \forall m$ в $S^{(q)}$. Тогда $p_0 a_0 + \dots + p_n a_n = qm$, так что $q \mid p_0 a_0$. Так как $(a_0, \dots, a_n) = 1$, то $q \mid p_0$. Следовательно, x_0 входит в $S^{(q)}$ только как x_0^q . Таким образом, $\text{Proj } S(a_0, \dots, a_n) = \text{Proj } S(qa_0, \dots, a_1, \dots, a_n) = \text{Proj } S(a_0, a_1/q, \dots, a_n/q)$. Утверждение (iii) непосредственно следует из (ii).

Отсюда, например, $\mathbb{P}(a, b) \simeq \mathbb{P}(1, 1) \simeq \mathbb{P}^1$, $\mathbb{P}(6, 10, 15) \simeq \mathbb{P}(6, 2, 3) \simeq \mathbb{P}(3, 1, 3) \simeq \mathbb{P}(1, 1, 1) \simeq \mathbb{P}^2$, $\mathbb{P}(2, 3, 3) \simeq \mathbb{P}(2, 1, 1)$ и т. д.

Отметим, что сокращение на $\text{НОД}(a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_n) = d_i$ геометрически означает не что иное, как исключение квазиотражений при действиях $\mathbb{Z}_{a_j}$, $j = 0, \dots, n$, на аффинных кусках. Напомним, что элемент группы называется квазиотражением, если множеством его неподвижных точек является гиперплоскость, и, как известно, при действиях квазиотражений не возникает новых особенностей.

Взвешенное проективное пространство $\mathbb{P}(a_0, \dots, a_n)$ можно представить также как фактор обычного проективного пространства $\mathbb{P}^n$ с однородными координатами $(y_0, \dots, y_n)$, все веса 1, по группе $\bigoplus_{i=0}^n \mathbb{Z}_{a_i}$, где отображение $\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}(a_0, \dots, a_n)$ задается формулой $x_i = y_i^{a_i} \ \forall i = 0, \dots, n$. Взвешенные проективные пространства – это простейшие и наиболее употребительны примеры в торической геометрии.

Напомним стандартные обозначения: $P_i = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0)$ – вершины координатного симплекса, $P_i P_j$ – одномерные ребра, $P_i P_j P_k$ – двумерные грани и т. д. Координатный симплекс – это объединение всех координатных гиперплоскостей $P_0, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_n$.

Легко определить особенности $\mathbb{P} = \mathbb{P}(a_0, \dots, a_n)$. Ясно, что все они торические. Пусть $h_{ij\dots} = \text{НОД}(a_i, a_j, \dots)$. Тогда особенность в вершине P_i – это циклическая факторособенность вида $\frac{1}{a_i}(a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_n)$. В общей точке $P \in P_i P_j$ ребро имеет аналитическую окрестность $U \ni P$, где особенность аналитически изоморфна особенности $(0, Q) \in \mathbb{A}^1 \times Y$, где $Q \in Y$ – особенность типа $\frac{1}{h_{ij}}(a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, \hat{a}_j, \dots, a_n)$ и т. д. Таким образом, все особенности $\mathbb{P}$ лежат на координатном симплексе Δ и, более того, $\text{codim}_{\mathbb{P}} \mathbb{P}_{\text{Sing}} \geq 2$, где $\mathbb{P}_{\text{Sing}}$ – подмножество особенностей.

Так как $\mathbb{P}$ имеет особенности, то следует ожидать, что подмногообразия $X \subset \mathbb{P}$, в частности, гиперповерхности, в большинстве своем особые. Поэтому важно очертить круг допустимых особенностей, с которыми можно работать практически.

3.5.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Подмногообразие $X \subset \mathbb{P}(a_0, \dots, a_n)$ называется квазигладким, если конус над ним $C_X \subset A^{n+1}$ не имеет особенностей вне вершины.

Таким образом, особенности квазигладких многообразий – это только циклические факторособенности.

Для квазигладких полных пересечений $X = X_{d_1, \dots, d_r} \subset \mathbb{P}(a_0, \dots, a_n)$, $\dim X \geq 3$, имеет место формула присоединения для нахождения дуализирующего пучка $\omega_X = \mathcal{O}_X(K_X) = \mathcal{O}_X(\sum_{i=1}^r d_i - \sum_{j=0}^n a_j)$ (см. [11], [12]) (конечно, предполагается, что для $\mathbb{P}(a_0, \dots, a_n)$ произведены все сокращения). Здесь K_X не обязательно дивизор Картье, а всего лишь $\mathbb{Q}$ -Картье дивизор, а пучок ω_X – рефлексивный ранга 1 пучок без кручений.

Отметим некоторые свойства $\mathbb{P}(a_0, \dots, a_n)$ и подмногообразий в нем, предполагая, что сокращения произведены, как в 3.5.1 (iii).

3.5.3. ЛЕММА. (i) Пучок $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(m)$ локально свободен, если $a_i \mid m \quad \forall i$.

(ii) Пусть $D \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(d)|$ для некоторого $d > 0$, тогда

$$\deg D := D \cdot \mathcal{O}(1)^{n-1} = \frac{d}{a_0 \cdots a_n}.$$

(iii) Если $X = X_{d_1, \dots, d_r} \subset \mathbb{P}(a_0, \dots, a_n)$ – квазигладкое полное пересечение и $\dim X \geq 3$, тогда

$$\mathrm{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z} \quad \text{и} \quad \omega_X = \mathcal{O}_X(K_X) = \mathcal{O}_X\left(\sum_{i=1}^r d_i - \sum_{j=0}^n a_j\right).$$

См. [11], [12].

3.6. Взвешенное раздутие. Рассмотрим циклическую факторособенность $X := \mathbb{C}^n / \mathbb{Z}_r(a_1, \dots, a_n)$, $r \geq 1$, $(a_1, \dots, a_n) = 1$ (при $r = 1$ $X = \mathbb{C}^n$). Пусть $x_1, \dots, x_n$ – координаты $\mathbb{C}^n$, собственные относительно действия $\mathbb{Z}_r$. Взвешенным раздутием X с весами $a_1, \dots, a_n$ называется проективный бирациональный морфизм $\sigma: Y \rightarrow X$ такой, что Y покрывается аффинными картами $U_1, \dots, U_n$ вида $U_i = \mathbb{C}_{y_1, \dots, y_n}^n / \mathbb{Z}_{a_i}(a_1, \dots, \overset{i}{r}, \dots, a_n)$. Координаты в X и U_i связаны соотношениями: $y_i = x_i^{r/a_i}$, $y_j = x_j / x_i^{a_j/a_i}$, $j \neq i$. Исключительное множество E морфизма σ является $\mathbb{Q}$ -Картье дивизором Вейля, $E \cap U_i = \{y_i = 0\} / \mathbb{Z}_{a_i}$, $E \simeq \mathbb{P}(a_1, \dots, a_n)$ и $\mathcal{O}_E(mE) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-rm)$ для m , делящихся на $\prod_{i=1}^n a_i$.

Наиболее естественно конструкция взвешенного раздутия осуществляется в рамках торической геометрии. Она зависит от выбора чисел $a_1, \dots, a_n$, а не только их значений $\bmod r$. Отметим некоторые простые свойства взвешенного раздутия.

3.6.1. ЛЕММА. (i) $K_Y = \sigma^* K_X + \left(\frac{\sum a_i}{r} - 1\right) E$.

(ii) Если $D = \{x_i = 0\} / \mathbb{Z}_r$ и D_Y – собственный прообраз D на Y , то $D_Y = \sigma^* D - \frac{a_i}{r} E$.

Действительно, (i) следует из равенства $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = y_i^{\frac{\sum a_i}{r} - 1} dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n$. Аналогично и для (ii).

Для 3-мерных гиперповерхностей Фано $X_d \subset \mathbb{P}(a_0, \dots, a_4)$ имеем по 3.5.3 (iii), что $d = \sum_{i=0}^4 a_i - 1$. Однако не всякая квазигладкая гиперповерхность с этим условием на степень является $\mathbb{Q}$ -Фано многообразием, поскольку не всякая циклическая факторособенность вида $\frac{1}{r}(a_1, a_2, a_3)$ является терминальной. Критерий терминальности для них известен (см. 2.18, глава I, а также [52]): это особенности вида $\frac{1}{r}(1, a, r - a)$, $(a, r) = 1$. Исходя из этого, в [12] получен также критерий наличия у 3-мерной гиперповерхности в $\mathbb{P}(a_0, \dots, a_4)$ только изолированных терминальных факторособенностей. Кроме того, в [12] было предположено, а в [21] доказано, что для каждой взвешенной 3-мерной $\mathbb{Q}$ -Фано гиперповерхности X пучок $\omega_X^{-1} = \mathcal{O}_X(1)$ имеет глобальное сечение, так что в $\mathbb{P}(a_0, \dots, a_4)$, $a_0 \leq \dots \leq a_4$, можно считать $a_0 = 1$. С учетом вышесказанного в [12] были найдены все 95 типов взвешенных 3-мерных $\mathbb{Q}$ -Фано гиперповерхностей (см. также [9]).

Теперь сформулируем основной результат Корти–Пухликова–Рида [9].

3.7. ТЕОРЕМА [9]. *Общая 3-мерная антиканоническая квазигладкая гиперповерхность $X = X_d \subset \mathbb{P}(1, a_1, \dots, a_4)$ в каждом из 95 семейств (описанных Флетчером и Ридом, см. [12]) с не более чем терминальными факторособенностями вида $\frac{1}{r}(1, a, r - a)$, $(a, r) = 1$, является бирационально жесткой. Более того, группа бирациональных автоморфизмов $\text{Bir}(X)$ порождается конечным числом явно описываемых бирациональных инволюций.*

Мы дадим только краткий комментарий о методах доказательства этой теоремы и разберем один из простейших примеров $X_5 \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 1, 2)$.

а) Если $\chi: X \dashrightarrow X'$ – бирациональное отображение на Мори расслоенное пространство X' , не являющееся изоморфизмом, то по неравенству Нётера–Фано 1.3 пара $(X, \mathcal{H}_X)$ имеет максимальную особенность (в обозначениях §1), так как X – $\mathbb{Q}$ -Фано. По 1.7.1 существует максимальное экстремальное раздутие $(E \subset Z) \rightarrow (\Gamma \subset X)$.

б) Центр $\Gamma \subset X$ максимальной особенности может быть кривой или точкой P . Для каждой точки P или кривой на X доказывается одно из двух:

b1) строится бирациональная инволюция $X \dashrightarrow X$, являющаяся линком типа II по программе Саркисова и отвинчивающая P (или C) как максимальный центр линейной системы $\mathcal{H}_X$;

b2) исключается возможность для линейной системы $\mathcal{H}_X$ иметь в качестве центра максимальной особенности E заданную точку P или кривую C .

с) Все кривые и неособые точки исключаются.

д) Особые точки (которые предполагаются циклическими факторособенностями типа $\frac{1}{r}(1, a, r - a)$) либо исключаются, либо для них строятся бирациональные инволюции, отвинчивающие их как максимальные центры. При этом, конечно, уменьшается степень (μ, λ, e) пары $(X, \mathcal{H}_X)$.

е) Оказывается, что отвинчивающие линки – бирациональные инволюции встречаются только двух типов:

QI-квадратичные инволюции – это бирациональные инволюции двойных накрытий (перестановка корней квадратных уравнений);

EI-эллиптические инволюции – это бирациональные инволюции, связанные с групповым отражением $x \mapsto -x$ в расслоениях на эллиптические кривые с заданным

нулевым сечением.

Следует отметить, что аналогичная ситуация была и при изучении бирациональных автоморфизмов неособых 3-мерных многообразий Фано (см. [14]).

f) Из а)–е) следует, что исходное бирациональное отображение $\chi: X \dashrightarrow X'$, если оно не изоморфизм, раскладывается в композицию $\chi = \Phi_m \circ \dots \circ \Phi_1$ конечного числа линков типа II, причем каждый Φ_i является бирациональной инволюцией типа QI или EI, так что $X \simeq X'$ и группа $\text{Bir}(X)$ порождается $\{\Phi_i\}$.

Ключевым моментом при конструкции отвинчивающих линков, а также при исключении максимальных особенностей является знание геометрических свойств экстремальных дивизориальных стягиваний. Вообще говоря, классификация с точностью до аналитического изоморфизма 3-мерных дивизориальных стягиваний – это важнейшая задача 3-мерной бирациональной геометрии. К настоящему времени автору известны следующие результаты в этом направлении.

3.8. ТЕОРЕМА. (i) (Кавамата [28]) Пусть $r \geq 2$, $P \in X \simeq \frac{1}{r}(1, a, r-a)$, $(a, r) = 1$, – росток 3-мерной терминальной факторособенности и $\sigma: (E \subset Z) \rightarrow (\Gamma \subset X)$ – дивизориальное стягивание такое, что $P \in \Gamma$. Тогда $\Gamma = P$ и σ – взвешенное раздутие с весами $(1, a, r-a)$.

(ii) (Кавакита [27]) Пусть $\sigma: (E \subset Z) \rightarrow (P \in X)$ – экстремальное дивизориальное стягивание и $P \in X$ – неособая точка, тогда σ – взвешенное раздутие с весами $(1, b_1, b_2)$ для некоторых b_1, b_2 , $(b_1, b_2) = 1$.

(iii) (Корти [8]) Пусть $P \in X \simeq (xy + zt = 0) \subset \mathbb{A}^4$ – росток невырожденной квадратичной особенности и $\sigma: (E \subset Z) \rightarrow (P \in X)$ – экстремальное дивизориальное стягивание, тогда σ – это только обычное раздутие особенности P , т.е. $E \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ и Z неособо в окрестности E .

3.8.1. ЛЕММА [6; 3.4]. (i) Пусть X – 3-мерное многообразие с не более чем терминальными факторособенностями. Если $\Gamma \subset X$ – кривая, являющаяся центром экстремального дивизориального стягивания, $\sigma: (E \subset Z) \rightarrow (\Gamma \subset X)$, то $\Gamma \subset X - X_{\text{Sing}}$ и σ является обычным раздутием над общей точкой Γ .

(ii) Пусть $\sigma: (E \subset Z) \rightarrow (P \in X)$ – раздутие Каваматы (см. 3.8 (i)) 3-мерной терминальной факторособенности $P \in X \simeq \frac{1}{r}(1, a, r-a)$. Тогда $K_Z = \sigma^* K_X + \frac{1}{r}E$ и $\frac{1}{r^2}E^3 = \frac{1}{a(r-a)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Если Γ проходит через терминальную факторособенность $P \in X$, то по 3.8 (i) $\Gamma = P$. Это противоречие означает, что $\Gamma \subset X - X_{\text{Sing}}$.

(ii) Для взвешенного раздутия по 3.6.1 имеем $E \simeq \mathbb{P}(1, a, r-a)$ и $\mathcal{O}_E(-E) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(r)$, так что $E^3 = (\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(r))^2$ на $\mathbb{P} = \mathbb{P}(1, a, r-a)$. По 3.5.3 (ii) получаем $E^3 = \frac{r^2}{a(r-a)}$.

3.9. ПРИМЕР $X = X_5 \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$. На X имеется только одна особая точка $P = P_4 = (0, 0, 0, 1)$ типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$. Запишем уравнение для X в виде

$$F_5 = F(y, x_i) = y^2 x_0 + y f_3(x_i) + f_5(x_i) = 0, \quad (3.1)$$

где $\deg y = 2$, $\deg x_i = 1$, $i = 0, 1, 2, 3$, f_3 и f_5 – однородные многочлены указанной степени от x_i . Предполагая, что P является центром максимальной особенности,

построим откручивающий линк типа II, который на самом деле будет просто бирациональной инволюцией (QI), переставляющей корни квадратичного уравнения $F_5 = 0$.

Разложим эту бирациональную инволюцию на элементарные составляющие в рамках программы Саркисова. Разрешение неопределенностей проекции $X \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ (на первые координаты $x_0, \dots, x_n$) – это раздутие Каваматы $\sigma: (E \subset Y) \rightarrow (P \in X)$. Накрытие $Y \rightarrow \mathbb{P}^3$ двулистно вне 15 прямых $\Gamma_i \subset X$, определяемых уравнениями $x_0 = f_3(x_i) = f_5(x_i) = 0$, так что инволюция этого накрытия осуществляет обычный флоп в прообразах на Y этих 15 прямых.

Как в [8], можно представить эту процедуру более конкретно. А именно, $-K_Y = \sigma^* K_X - \frac{1}{2}E$ численно эффективен и антиканоническое отображение $\varphi: Y \rightarrow \bar{Y} = \text{Proj} \oplus H^0(-nK_Y) = \bar{Y}_6 \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 1, 3)$ стягивает только собственные прообразы 15 прямых Γ_i . Здесь $\bar{Y}_6$ можно задать явно уравнением. Действительно, домножим уравнение $F_5 = 0$ на x_0 , чтобы выделить полный квадрат:

$$x_0 F(y, x_i) = \left(x_0 y + \frac{1}{2} f_3 \right)^2 + x_0 f_5 - \frac{1}{4} f_3^2,$$

тогда уравнение для $\bar{Y}_6 \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 1, 3)$ будет иметь вид

$$G(z_i x_i) = z^2 + x_0 f_5 - \frac{1}{4} f_3^2 = 0. \quad (3.2)$$

Бирациональное отображение $X \dashrightarrow \bar{Y}$ имеет вид:

$$z = x_0 y + \frac{1}{2} f_3.$$

Оно стягивает прямые Γ_i в особые (не $\mathbb{Q}$ -факториальные) точки. Инволюция чисто двойного накрытия $\bar{Y} \rightarrow \mathbb{P}^3$ бирегулярна. Таким образом, соответствующая бирациональная инволюция $\tau: X \dashrightarrow X$ является линком типа II:

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{\varphi^{-1} \circ \sigma \varphi} & Y \\ \swarrow \sigma_p & \searrow \varphi & \swarrow \varphi & \searrow \sigma_p & \\ X & & \bar{Y} & & X \end{array},$$

где $\varphi^{-1} \circ \varphi$ – флоп 15 собственных прообразов $\Gamma'_i \subset Y$ прямых $\Gamma_i \subset X$.

3.9.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ [8], [9]. $X = X_5 \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 1, 2)$ бирационально жестко и группа $\text{Bir } X / \text{Aut } X = \{\tau\}$, где τ – описанная выше инволюция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi': X' \rightarrow S'$ – Мори расслоенное пространство и $\chi: X \dashrightarrow X'$ – бирациональное отображение. Выберем, как обычно, очень обильную полную линейную систему $\mathcal{H}' = |-\mu' X' + \varphi'^* A'|$, где $A' \in \text{Pic } S'$ – очень обильный дивизор, и пусть $\mathcal{H} \subset |-\mu K_X|$ – ее собственный прообраз на X (напомним, что $\text{Pic } X = \mathbb{Z}$), $\mu \in \mathbb{Q}_+$. Если χ – не изоморфизм, тогда по неравенству Нётера–Фано 1.3 линейная система $\mathcal{H}$ имеет максимальную особенность $E \subset Z \rightarrow X$. Пусть $C \subset X$ – центр максимальной особенности, т.е. кривая или точка. Наша цель – показать, что центром может быть только точка $P = P_4 = (0, 0, 0, 0, 1)$.

а) Центр максимальной особенности не может быть кривой. Действительно, если C – кривая, тогда по 1.7.1 существует максимальное дивизориальное экстремальное стягивание $p: (E \subset Y) \rightarrow (C \subset X)$. Пусть $\nu = \text{mult}_C \mathcal{H}$ – кратность $\mathcal{H}$ в общей

точке C , тогда $\nu > \mu$ и по 3.8.1 (i) $C \subset X - \text{Sing } X$, в частности, $\deg C = -K_X C -$ целое число. Пусть $S \in |-K_X|$ – общая поверхность, тогда $\mathcal{H}^2 S = \frac{5}{2}\mu^2 \geq \nu^2 \deg C > \mu^2 \deg C$. Отсюда $\deg C = 1$ или 2 .

Пусть сначала $\deg C = 1$. Линейная система $|-K_X - C|$ имеет кроме C еще вычетную базисную “прямую” C' . Но $|-2K_X - C|$ имеет базисный кривой только C , причем с кратностью 1 , так что $M = p_*^{-1}(-2K_X - C) = -2p^*K_X - E$ численно эффективен, т.е. M – “пробный класс” в смысле [18]. Вычисляя, получаем противоречие:

$$\begin{aligned} 0 &\leq M \mathcal{H}_Y^2 = (-2p^*K_X - E)(-\mu p^*K_X - \nu E) \\ &= 2\mu^2(-p^*K_X)^3 - (4\mu\nu + \mu^2)(-p^*K_X)^2 E + (2\nu^2 + 2\mu\nu)(-p^*K_X)E^2 - \nu^2 E^3 \\ &= 5\mu^2 - 2\nu^2 - 2\mu\nu - \nu^2 < 0. \end{aligned}$$

Здесь $(-p^*K_X)^3 = (-K_X)^3 = \frac{5}{2}$ по 3.5.3 (ii), $(-p^*K_X)^2 E = 0$ и $(-p^*K_X)E^2 = -\deg C = -1$ по формуле проекции и $E^3 = -\deg \mathcal{N}_{C/X} = -\deg C + 2 - 2p_a(C) = 1$, где $\mathcal{N}_{C/X}$ – нормальный пучок на C в X , $p_a(C) = 0$ – род прямой C .

Пусть теперь $\deg C = 2$. Тогда можно выбрать систему координат так, чтобы уравнение для C было или $y = x_3 = x_0 x_1 + x_2^2 = 0$, или $y^2 + x^4 = x_2 = x_3 = 0$. В качестве “пробного класса” в первом случае можно взять опять $\mu = |-2p^*K_X - C|$, а во втором $\mu = |-4p^*K_X - C|$. Произведя аналогичные предыдущим вычисления, в обоих случаях получаем $\mathcal{H}_Y^2 M < 0$. Это противоречие показывает, что центр максимальной особенности не может быть кривой.

б) Центр максимальной особенности не может быть неособой точкой на X . Действительно, предположим, что $Q \in X$ – гладкая точка – максимальный центр для $\mathcal{H}$. Рассмотрим сначала случай, когда Q не лежит на прямых Γ_i , $i = 1, \dots, 15$. В этом случае $M = p^*(-K_X) - E$ численно эффективен, т.е. является пробным классом. Пусть $S \in |-K_X - Q|$ – общая поверхность. Применим неравенство Корти 3.3

$$\frac{5}{2}\mu^2 = \mathcal{H}^2 S \geq \text{mult}_Q \mathcal{H}^2 \cdot S \geq 4\mu^2.$$

Противоречие.

Предположим теперь, что Q принадлежит Γ – одной из 15 прямых Γ_i . Опять пусть $S \in |-K_X - Q|$ – общая поверхность, но теперь вместе с точкой Q вся прямая Γ является базисной, т.е. $\Gamma \subset S$. Ограничим $\mathcal{H}$ на S , имеем

$$\mathcal{H} \mid S = \nu\Gamma + \mathcal{L},$$

где ν – кратность $\mathcal{H}$ в общей точке Γ , $\mathcal{L}$ – линейная система на S без неподвижных компонент. Теперь так как точка Q – центр максимальной особенности, то $K_S + \frac{\nu}{\mu}\Gamma + \frac{1}{\mu}\mathcal{L}$ не лог-канонично и, следовательно, по 3.3

$$\text{mult}_Q \mathcal{L}^2 > 4\left(1 - \frac{\nu}{\mu}\right)\mu^2.$$

С другой стороны, мы можем вычислить $\mathcal{L}^2$ на S . Поверхность S имеет обыкновенную двойную особенность в точке $P = P_4 = (0, 0, 0, 0, 1)$. Имеем:

$$(K_S \Gamma)_S = (K_X + S)\Gamma = 0,$$

$$(K_S + \Gamma)_\Gamma = K_\Gamma + \text{Diff} = K_\Gamma + \frac{1}{2}P,$$

так как Γ — прямая, проходящая через обыкновенную двойную точку на S . Отсюда $\Gamma^2 = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$ на S . Следовательно,

$$\mathcal{L}^2 = (-\mu K_X \mid S - \nu \Gamma)_S^2 = \frac{5}{2}\mu^2 - \mu\nu - \frac{3}{2}\nu^2.$$

Комбинируя это с предыдущим неравенством с учетом того, что $\mathcal{L}$ на S без неподвижных компонент, получаем

$$4\left(1 - \frac{\nu}{\mu}\right)\mu^2 < \frac{5}{2}\mu^2 - \mu\nu - \frac{3}{2}\nu^2 \implies \mu^2 - 2\mu\nu + \nu^2 < 0.$$

Противоречие.

с) Таким образом, центром максимальной особенности является точка P . Согласно программе Саркисова если χ не изоморфизм, то должен существовать откручивающий линк Φ , начинающийся с дивизориального раздутия (в категории Мори) точки P . Но по теореме Каваматы 3.8 (i) это раздутие единственно и является взвешенным раздутием, так что линк Φ не что иное, как построенная бирациональная инволюция τ . Применяя τ , мы уменьшаем коэффициент μ , так что $\chi = \chi_1 \tau$ и χ_1 является уже изоморфизмом. Это доказывает предложение 3.9.1.

3.10. ПРИМЕР (эллиптической инволюции). Для построения квадратичной инволюции надо было уравнение гиперповерхности представить в виде квадратичного уравнения (см (3.1) и (3.2)) в окрестности откручиваемой максимальной особенности. Для эллиптической инволюции надо представить его в виде уравнения эллиптической кривой в вейерштрассовой форме

$$w^2 + Aw = v^3 + Bv^2 + Cv + D, \quad (3.3)$$

где A, B, C, D — многочлены от $(x_{i_0}, x_{i_1}, x_{i_2})$, и тогда инволюция — это перестановка двух корней уравнения (3.3).

Пусть $x_{i_0}, x_{i_1}, x_{i_2}, \xi, \zeta$ — координаты в $\mathbb{P}(1, a_1, \dots, a_4)$ и P_ξ — это откручиваемая особенность на гиперповерхности Фано $X \subset \mathbb{P}$. Предположим, что мы можем записать уравнение для X в виде

$$F = \xi\zeta^2 + \dots + x_{i_2}\xi^3 + \dots = 0,$$

где необходимо $\deg \zeta > \deg \xi$ (типичный случай, $\xi = x_3, \zeta = x_4, P_\xi = P_3, Q_\zeta = P_4$). Если для построения квадратичной инволюции надо было исключить одну переменную y , как в (3.1) и (3.2), то здесь нужно исключить обе переменные ξ и ζ посредством более сложных выражений

$$v = \zeta^2 + x_{i_2}\xi^2 + \dots, \quad w = \zeta^3 + x_{i_2}\xi^2\zeta + \dots.$$

Тогда уравнение (3.3) определяет уравнение антиканонической модели $\bar{Y}$ для дивизориального раздутия $(E \subset Y) \rightarrow (P_\xi \in X)$.

Как и в (3.2), бирациональная инволюция на X здесь сводится к бирегулярной инволюции на $\bar{Y}$, определяемой уравнением (3.3). Более детально рассмотрим эту конструкцию на конкретном примере (см. [9; 4.11]).

3.10.1. ПРИМЕР $X_{25} \subset \mathbb{P}(1, 4, 5, 7, 9)$. Здесь центр отвинчивания $P_3 = \frac{1}{7}(1, 5, 2)$. Пусть (x, y, z, t, u) – координаты на $\mathbb{P}$ такие, что только $t \neq 0$ в $P_3 = P$. Точка $Q = P_4 = (0, \dots, 0, 1)$ имеет тип $\frac{1}{9}(1, 4, 5)$. Координата t $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ -инвариантна и отлична от 0 в P , так что можно считать $t = 1$. Раздутие Каваматы (см. 3.8 (i)) точки P – это взвешенное раздутие типа (1.5.2). По 3.8.1 (ii) $-K_Y = \sigma^*(-K_X) - \frac{1}{7}E$, где $E = \mathbb{P}(1, 5, 2)$ – исключительный дивизор. По определению взвешенного раздутия в качестве локальных координат на Y можно взять $(x, z, u/t)$, тогда $u \in H^0(X, \mathcal{O}_X(-9K_X)) \implies u \in H^0(Y, -9\sigma^*K_X - \frac{2}{7}E)$, но $u \notin H^0(Y, -9K_Y)$, так что u не антиканоническое. С другой стороны,

$$x \in H^0(Y, -K_Y), \quad z \in H^0(Y, -5K_Y).$$

Уравнение для X имеет вид $F = yt^3 + \dots = 0$. Отсюда имеем $y \in H^0(Y, -4K_Y)$. Для полного вычисления антиканонического кольца $\bigoplus_{m \geq 0} H^0(Y, -mK_Y)$ введем еще два элемента v и w (степени 18 и 27), удовлетворяющих соотношению вида $w^2 = v^3 + \dots$. Для v мы должны подыскивать элемент в $H^0(X, -18K_X)$ с дивизором нулей $\geq \frac{18}{7}E$.

Рассмотрим уравнение X как квадратичное по u , имеем $F = tu^2 + \dots$; любой другой член, делящийся на tu , можно исключить заменой $u \mapsto u^1 = u + t\alpha$, так что можно считать, что коэффициент при u не содержит t , и уравнение для X имеет вид:

$$F = tu^2 + a_{16}u - yt^3 - b_{11}t^2 - c_{18}t + d_{25} = 0, \quad a, b, c, d \in k[x, y, z]. \quad (3.4)$$

Из условия квазигладкости следует, что a и d не имеют общего множителя, так что пересечение $(a = d = 0) \subset \mathbb{P}(1, 4, 5)$ состоит из 20 точек (с учетом кратностей). Собирая члены, делящиеся на t , определим

$$v := u^2 + yt^2 - b_{11}t - c_{18}, \quad \text{так что} \quad F = vt + a_{16}u + d_{25}. \quad (3.5)$$

Дивизор нулей v на $Y \geq \frac{18}{7}E$, так что $v \in H^0(Y, -18K_Y)$. Действительно, из уравнения $F = 0$ в (3.5) $v = -(a_{16}u + d_{25})/t$, где t – единица в P . Все члены в d_{25} имеют дивизор нулей $\geq \frac{25}{7}E$, все члены a_{16} имеют дивизор нулей $\geq \frac{16}{7}E$ и u имеет дивизор нулей $\frac{2}{7}E$.

Далее, умножая F в (3.5) на u и выражая u^2 в терминах v , получаем $uF = uvt + a_{16}u^2 + d_{25}u = uvt + a_{16}(v + yt^2 + b_{11}t + c_{18}) + d_{25}u$. Опять выделяя члены, делящиеся на t , положим

$$w = vu + a_{16}yt + a_{16}b_{11}, \quad (3.6)$$

так что

$$uF = wt + a_{16}(v + c_{18}) + d_{25}u = 0. \quad (3.7)$$

Как и раньше, из последнего уравнения имеем $w = -(a_{16}(v + c_{18}) + d_{25}u)/t$, где t – единица в P , все члены в $a_{16}(v + c_{18})$ имеют дивизор нулей $\geq \frac{34}{7}E$ и все члены в d_{25} имеют дивизор нулей $\geq \frac{27}{7}E$, так что $w \in H^0(Y, -27K_Y)$.

Запишем

$$\begin{aligned} -uw + (yt + b_{11})F &= -u^2v - a_{16}uyt - a_{16}b_{11}u + (yt + b_{11})F \\ &= -(v + yt^2 + b_{11}t + c_{18})v - a_{16}uyt - a_{16}b_{11}u + (yt + b_{11})(vt + a_{16}u + d_{25}). \end{aligned}$$

После сокращения получаем

$$(yt + b_{11})F = wu + d_{25}yt - v(v + c_{18}) + d_{25}b_{11}. \quad (3.8)$$

Чтобы выразить t, u через c, w , заметим, что уравнения (3.5)–(3.8) являются линейными однородными от t, u с коэффициентами в $k[x, y, z, v, w]$:

$$\begin{aligned} F &= a_{16}u + vt + d_{25} = 0, \\ uF &= d_{25}u + wt + a_{16}(v + c_{18}) = 0, \\ vu + a_{16}yt + (-w + a_{16}b_{11}) &= 0, \\ (yt + b_{11})F &= wu + d_{25}yt + (-v(v + c_{18}) + d_{25}b_{11}) = 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

т.е.

$$\begin{pmatrix} a & v & d \\ d & w & a(v+c) \\ v & ay & -w+ab \\ w & dy & -v(v+c)+db \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ t \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Поэтому уравнение, связывающее v и w , имеет вид

$$w^2 - abw = v^3 + v^2c - (bd + a^2y)v + (-a^2c + d^2)y. \quad (3.10)$$

Пусть $\bar{Y} = \bar{Y}_{54} \subset \mathbb{P}(1, 4, 5, 18, 27)$ – гиперповерхность, задаваемая уравнением (3.10), и пусть $S \subset \bar{Y}$ – подмножество, определяемое условием:

$$S: \operatorname{rank} \begin{pmatrix} v & w & ay & dy \\ a & d & v & w \end{pmatrix} \leq 1. \quad (3.11)$$

Решения системы (3.9) представляют t, u как рациональные функции на $\bar{Y}$, регулярные вне S . Это означает, что соответствие $(t, u) \mapsto (v, w)$ является бирациональным над $k[x, y, z]$.

Пусть $r = \frac{v}{a} = \frac{w}{d}$ – и т. д. – общее отношение строк в (3.11). Это рациональное сечение $\mathcal{O}_S(2)$, регулярное вне $a = d = v = w = 0$ (конечное множество точек). Имеем $r^2 = y$. Таким образом, нормализация S – это $\mathbb{P}(1, 5, 2)$ с координатами (x, z, r) , и S – это образ при бирациональном вложении $\mathbb{P}(1, 5, 2) \rightarrow \mathbb{P}(1, 4, 5, 18, 27)$, задаваемом формулой

$$(x, z, r) \mapsto (x, y = r^2, z, v = ar, w = dr).$$

Напомним, что $\mathbb{P}(1, 5, 2)$ – это исключительный дивизор раздутия $\sigma: Y \rightarrow X$. Отображение $\mathbb{P}(1, 4, 5, 7, 9) \rightarrow \mathbb{P}(1, 4, 5, 18, 27)$ является проекцией, переводящей $\mathbb{P}(1, 5, 2)$ в не нормальную поверхность S . Оно отождествляет пары точек $c \pm r$ в множестве $\mathbb{Q}(x, z, r^2) = d(x, z, r^2) = 0$ (всего 20 пар).

Уравнения

$$(a = d = v = 0) \subset X_{25} \subset \mathbb{P}(1, 4, 5, 7, 9)$$

(где $v = u^2 - yt^2 - bt - c$) определяют конечное число (20 с учетом кратностей) кривых, проходящих через P , собственные прообразы которых стягиваются при бирациональном отображении $Y \rightarrow \bar{Y}_{54}$. Для общего X доказывается, что стягиваются только эти кривые: это в точности те кривые, где бирациональная инволюция $X \dashrightarrow X$ осуществляет флоп. По (3.9) функции t и u являются регулярными вне S , но по (3.5) и (3.6) они регулярны кроме, быть может, точек на S , где $y = b = v = 0$, $u^2 = c$ и $au + d = 0$. Однако уравнения ($y = b = 0$, $d^2 = a^2c$) определяют пустое множество на $\mathbb{P}(1, 4, 5)$ для общего X .

Глава III. О бирациональной жесткости гиперповерхностей степени N в $\mathbb{P}^N$

После того как была доказана бирациональная сверхжесткость 3-мерной кватрики [18], естественно возник вопрос о бирациональной сверхжесткости гладких (антиканонических) гиперповерхностей степени N в $\mathbb{P}^N$, $N \geq 5$. Для $N = 5$ это было доказано А. В. Пухликовым в [47], и им же была доказана в [49] бирациональная сверхжесткость гладких гиперповерхностей для $N > 5$ при некоторых предположениях общности (см. условие (R_{N-1}) ниже). Для этого был усовершенствован и обобщен метод работы [18] (см. также [48]).

Новое доказательство сверхжесткости 3-мерной кватрики в рамках теории Мори, данное Корти (см. 3.2, глава II), поставило вопрос об обобщении этого метода на гиперповерхности высших размерностей. В работах [4], [5] И. А. Чельцов доказал этим методом бирациональную сверхжесткость для гладких гиперповерхностей степени N в $\mathbb{P}^N$ для $5 \leq N \leq 8$. Более того, он поставил (и решил) вопрос о классификации бирациональных структур K -тривиальных расслоений на таких гиперповерхностях (см. 1.4 (iii) ниже). Основная идея доказательства та же, что и в методе Корти, – редукция к двумерному случаю с помощью теорем В. В. Шокурова о связности и обращении присоединения и использование леммы Корти 3.3, глава II.

Изложение результатов Чельцова – основное содержание этой главы.

§ 1. Предварительные сведения

1.1. Результат Пухликова [49] о сверхжесткости гладких гиперповерхностей степени N в $\mathbb{P}^N$, $N > 5$, получен при следующем предположении общности ($(N-1)$ -регулярности):

(R_{N-1}) для каждой (замкнутой) точки $x \in X = X_N \subset \mathbb{P}^N$ и аффинных координат $(z_1, \dots, z_N)$ с началом в точке x пусть

$$F(z_1, \dots, z_N) = q_1 + q_2 + \dots + q_N = 0$$

– уравнение X в $\mathbb{A}^N$, где q_i – однородные компоненты степени i ; тогда q_i , $i = 1, \dots, N-1$, должны составлять регулярную последовательность в $k[X]$, т.е. q_i не должен быть делителем нуля в факторе $k[X]/(q_1, \dots, q_{i-1})$.

В [49] показано, что $(N-1)$ -регулярные гиперповерхности образуют непустое открытое подмножество в пространстве всех гладких гиперповерхностей.

Очевидными следствиями бирациональной сверхжесткости многообразия $X = X_N$ являются следующие утверждения:

(i) всякое бирациональное отображение $\chi: X \dashrightarrow X'$, где X, X' – гладкие гиперповерхности степени N в $\mathbb{P}^N$, $N \geq 4$ (с условием (R_{N-1}) при $N \geq 6$), является проективным изоморфизмом, в частности, группа бирациональных автоморфизмов $\text{Bir } X$ совпадает с группой бирегулярных (= проективных) автоморфизмов $\text{Aut } X$;

(ii) X не может быть бирационально расслоено на многообразия кодаировой размерности $-\infty$ над базой ненулевой размерности, в частности, X не рационально.

1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (i) Нормальное проективное многообразие Y с не более чем каноническими особенностями называется слабым многообразием Фано, если антиканонический дивизор $-K_Y$ nef и big.

(ii) Морфизм $h: X \rightarrow Z$ называется K -тривиальным расслоением, если кодаировая размерность общего слоя X_η равна 0, где $\eta \in Z$ – общая точка.

Рассмотрим некоторые почти очевидные бирациональные K -тривиальные структуры на гладких гиперповерхностях $X = X_N$.

1.3. ПРИМЕРЫ. (i) Проекция из $T = \mathbb{P}^{N-2} \subset \mathbb{P}^N$, $N \geq 4$, после разрешения неопределенностей $T \cap X$ приводит к K -тривиальному расслоению $\pi_T: X' \rightarrow \mathbb{P}^1$, общий слой которого (= любой гладкий) – это $(N-2)$ -мерное многообразие Калаби–Яо (т.е. гладкое односвязное многообразие с $K = 0$). Кроме этого общего случая имеются еще несколько исключений.

(ii) $N = 4$ а) Проекция из прямой $T = \mathbb{P}^1 \subset X_4 \subset \mathbb{P}^4$ после раздутия этой прямой дает расслоение $\pi_T: X'_4 \rightarrow \mathbb{P}^2$, слоями которого являются плоские кубические кривые;

$N = 4$ б) если на $X = X_4$ существует точка P такая, что аффинное уравнение X в $\mathbb{P}^4$

$$F = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 0,$$

где q_i – однородные многочлены степени i , удовлетворяет условию

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = 0 \\ q_2 = 0 \end{array} \right\} \implies q_3 = 0, \quad (1.1)$$

тогда пучок квадрик $\lambda_0 q_1^2 + \lambda_1 (q_1 + q_2) = 0$ высекает на X_4 пучок $|2H - 4P|$ (где H – гиперплоское сечение), который после разрешения неопределенностей дает морфизм $\pi_P: X'_4 \rightarrow \mathbb{P}^1$, неособые слои которого являются $(K-3)$ -поверхностями с 8 раздутыми точками (отметим, что на общей гладкой кватерике X_4 таких точек нет).

(iii) $N = 5$. Если на $X = X_5$ лежит плоскость $T = \mathbb{P}^2$, то проекция из нее приводит к расслоению $\pi_T: X'_5 \rightarrow \mathbb{P}^2$ на $(K-3)$ -поверхности (отметим, что хотя на общей гладкой квинтике $X_5 \subset \mathbb{P}^5$ плоскостей нет, на некоторых гладких они существуют, например, на квинтике Ферма $\sum_{i=0}^5 x_i^5 = 0$).

Всякое расслоение, бирационально эквивалентное (как расслоение) любому из указанных в примерах 1.3, будем называть в дальнейшем (следуя Чельцову [5]) *индуцированными проекциями*. Предполагается, что на гладких $X_N \subset \mathbb{P}^N$, $N \geq 4$, нет никаких бирациональных структур расслоений на многообразия кодаировой размерности ≤ 0 , кроме индуцированных проекциями, как в 1.3. Следуя [5], мы приведем здесь доказательство этого предположения для $4 \leq N \leq 8$. Точнее, имеет место следующая

1.4. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА [5]. Пусть $X = X_N \subset \mathbb{P}^N$ – гладкая гиперповерхность степени N в $\mathbb{P}^N$ и $N = 4, 5, \dots, 8$. Тогда X бирационально сверхжестка (в обобщенном смысле), т.е. бирационально не эквивалентна никакому из следующих классов многообразий:

- (i) слабым многообразием Фано, не изоморфным X ;
- (ii) расслоениям с общим слоем кодаировой размерности $-\infty$;
- (iii) K -тривиальным расслоениям, кроме индуцированных проекциями, как в 1.3.

В частности, X не рациональна.

Эта теорема будет выведена из теоремы А в следующем § 2; теорема А будет доказана в § 3 с использованием методов лог-теории пар.

1.5. Мы будем работать с (подвижными) лог-парами вида

$$(X, M_X) = \left(X, \sum_{i=1}^n b_i \mathcal{M}_i \right), \quad (1.2)$$

где X – нормальное проективное многообразие, $\mathcal{M}_i$ – линейные системы без неподвижных компонент, $b_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$. Чаше всего n оказывается равным 1. Для любого бирационального отображения нормальных многообразий $g: Y \dashrightarrow X$ естественно определена лог-пара $(Y, M_Y) := g_*^{-1}(X, M_X) = (Y, g_*^{-1}M_X)$, где $M_Y = g_*^{-1}M_X = \sum b_i g_*^{-1}\mathcal{M}_i$ и $g_*^{-1}\mathcal{M}_i$ – собственные прообразы линейных систем $\mathcal{M}_i$. Но лог-пары (X, M_X) распространяются обычные понятия, связанные с особенностями лог-пар (см. §2, глава I): дискрепантности, терминальность, каноничность, лог-терминальность и лог-каноничность (просто вместо (X, M_X) рассматривается лог-пара $(X, \sum b_i D_i)$, где $D_i \in \mathcal{M}_i$ – общие дивизоры). Ясно, что при таком определении особенности лог-пары (X, M_X) совпадают с особенностями X вне базисных подмножеств $\text{Bs } \mathcal{M}_i$ линейных систем $\mathcal{M}_i$ (по теореме Бертини).

Напомним некоторые из определений, используемых в дальнейшем.

1.6. ОПРЕДЕЛЕНИЯ. (i) Собственное неприводимое подмногообразие $Z \subset X$ называется *центром канонической* (соответственно *лог-канонической*) *особенности*, если существует дивизориальное нормирование E с центром $C(E, X) = Z$ и ее дискрепантность удовлетворяет условию:

$$a(E, X, M_X) \leq 0 \quad (\text{соответственно } a(E, X, M_X) \leq -1).$$

Множество всех центров канонических (лог-канонических) особенностей лог-пары (X, M_X) обозначается через $\text{CS}(X, M_X)$ (соответственно $\text{LCS}(X, M_X)$).

(ii) Лог-пара (V, M_V) называется *канонической моделью* лог-пары (X, M_X) , если существует бирациональное отображение $g: X \dashrightarrow V$ такое, что $(V, M_V) := (V, g_* M_X)$, лог-пара (V, M_V) канонична (т.е. имеет канонические особенности) и дивизор $K_V + M_V$ обилен (аналогично определяется лог-каноническая модель).

(iii) Отображение Иитаки и кодаирова размерность лог-пары (X, M_X) определяются следующим образом: пусть $f: Y \rightarrow X$ – бирациональный морфизм такой, что лог-пара $(Y, M_Y) := (Y, f_*^{-1}M_X)$ канонична, тогда

а) если линейная система $|m(K_Y + M_Y)|$ для $m \gg 0$ не пуста, то рациональное отображение

$$I(X, M_X) := \Phi_{|m(K_Y + M_Y)|} \circ f^{-1}, \quad m \gg 0,$$

называется *отображением Иитаки* лог-пары (X, M_X) , кодаирова размерность определяется как

$$\kappa(X, M_X) := \dim I(X, M_X)(X);$$

б) если $|m(K_X + M_X)| = \emptyset$ для всех достаточно делимых и больших m , то $\kappa(X, M_X) := -\infty$ (ср. с определением 3.16, глава I).

Следующие утверждения вытекают из результатов Шокурова [57], причем существенным моментом является тот факт, что лог-пара (X, M_X) подвижна и не имеет неподвижных компонент, так что ни одна из компонент граничного дивизора не может быть стянута при бирациональных перестройках.

1.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (i) Если каноническая модель лог-пары (X, M_X) существует, то она единственна с точностью до изоморфизма.

(ii) Отображение Иитаки и кодаирова размерность не зависят от выбора морфизма f .

1.7.1. ЗАМЕЧАНИЕ. В работе [57] доказывалась единственность лог-канонической модели, однако те же рассуждения годятся для доказательства единственности канонической модели и корректности определения отображения Иитаки и кодаировой размерности.

Теперь рассмотрим лог-пары на гладких гиперповерхностях $X = X_N \subset \mathbb{P}^N$, $N \geq 4$. По теореме Лефшеца имеем $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}K_X$ и $-K_X \sim H$, где H – гиперплоское сечение X . Тогда $M_X = \sum b_i \mathcal{M}_i \sim_{\mathbb{Q}} bH$, $b, b_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ и $\sim_{\mathbb{Q}}$ обозначает эквивалентность над $\mathbb{Q}$, т.е. после умножения обеих частей на подходящее целое число становится обычной линейной эквивалентностью дивизоров. Для наших целей достаточно использовать также численную эквивалентность $\equiv$.

1.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ [5]. Лог-пара (X, M_X) на гладкой гиперповерхности $X = X_N$, $N \geq 4$, называется Калаби–Яо, если $K_X + M_X \sim_{\mathbb{Q}} 0$, т.е. $b = 1$ в предыдущих обозначениях.

Ясно, что для любой лог-пары (X, M_X) на $X = X_N$ найдется рациональное число $c \in \mathbb{Q}_{>0}$ такое, что $K_X + cM_X \sim_{\mathbb{Q}} 0$, т.е. (X, cM_X) становится Калаби–Яо (в предыдущих обозначениях $c = b^{-1}$).

§ 2. Основные утверждения и следствия из них

2.1. ТЕОРЕМА А [5]. Пусть (X, M_X) – лог-пара Калаби–Яо на гладкой гиперповерхности $X = X_N \subset \mathbb{P}^N$, $4 \leq N \leq 8$. Тогда (X, M_X) канонична, $\kappa(X, M_X) = 0$ и если $\text{CS}(X, M_X) \neq \emptyset$, то возможны только следующие случаи:

- (i) $N \geq 4$: $\text{CS}(X, M_X) = \{\text{компоненты пересечений } X \cap T, \text{ где } T = \mathbb{P}^{N-2} \subset \mathbb{P}^N \text{ – некоторое линейное подпространство}\}$;
- (ii) $N = 4$ а): $\text{CS}(X, M_X) = T = \mathbb{P}^1 \subset X_4$ – прямая на X_4 ;
 $N = 4$ б): $\text{CS}(X, M_X) = P$ – точка на X_4 с условием (1.1);
- (iii) $N = 5$: $\text{CS}(X, M_X) = T = \mathbb{P}^2 \subset X_5$ (напомним, что на общем X_5 плоскостей нет).

Отметим, что случай $N = 4$ б) пропущен в [5].

Эта теорема будет доказана в §3, а сейчас будем извлекать из нее следствия. Начнем с точной информации о M_X в случае, когда $\text{CS}(X, M_X) \neq \emptyset$.

2.2. ТЕОРЕМА В. Пусть (X, M_X) как в теореме 2.1. Предположим, что $\text{CS}(X, M_X) \neq \emptyset$ и в точности такое, как в 2.1 (i)–(iii). Тогда $M_X = \pi_*^{-1}(M_Z)$, где $\pi: X \dashrightarrow Z$ – проекция из T , или рациональное отображение $\pi = \pi_P: X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$, как случай $N = 4$ б) в 1.3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала наиболее простые случаи (ii) $N = 4$ а) и (iii) $N = 5$. Пусть $\sigma = \sigma_T: X' \rightarrow X$ – раздутие T , $\mathcal{H}_T' = \sigma_*^{-1}|H - T|$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{H}_T = |H - T|$ гиперплоских сечений, проходящих через T , $D' \in \mathcal{H}_T'$ – общий дивизор; тогда

$$0 \sim K_{X'} + D' \sim \sigma^*(K_X + \mathcal{H}_T), \quad K_{X'} + M_{X'} \sim_{\mathbb{Q}} \sigma^*(K_X + M_X) \sim_{\mathbb{Q}} 0, \quad (2.1)$$

так как $\text{codim}_X T = 2$ и морфизм σ крепантен по условиям (ii) $N = 4$ а) и (iii) $N = 5$. Отсюда следует, что $\text{Supp } M_{X'}$ содержится в линейной системе $|m\mathcal{H}'_T|$ для $m \gg 0$, значит, $\text{Supp } M_X \subset |m(H - T)|$, что и требовалось установить.

В случае (ii) $N = 4$ б) пусть опять $\sigma = \sigma_P: X' \rightarrow X$ – раздутие точки P , $\mathcal{H}'_P = \sigma_*^{-1}\mathcal{H}_P = \sigma_*^{-1}|H - 2P|$, тогда для $D' \in \mathcal{H}'_P$ справедливы соотношения (2.1). Если $P \in X_4$ не удовлетворяет условию (1.1), то $\mathcal{H}'_P$ состоит из единственного дивизора D' – прообраза касательной гиперплоскости, причем $\dim |mD'| = \dim |-mK_{X'}| = 0 \implies \dim |mM_{X'}| = 0$, $m \gg 0$, что противоречит подвижности M_X . Если условие (1.1) выполнено, тогда $2\mathcal{H}_P$ – пучок, порожденный $q_1^2 = 0$ и $q_1 + q_2 = 0$, как в (1.1), базисное множество которого $q_1 = q_2 = q_4 = 0$ состоит из 8 прямых (с учетом кратностей). Собственный прообраз этого пучка содержит в качестве слоев удвоенный собственный прообраз касательного гиперплоского сечения и собственный прообраз поверхности $q_1 + q_2 = q_4 = 0$ в $\mathbb{A}^4$. Эта поверхность бирационально проектируется из вершины P конуса $q_4 = 0$ на его основание в $\mathbb{P}^3$, стягивая 8 базисных прямых пучка. Итак, $2m\mathcal{H}'_P = |-2mK_{X'}| \supset 2mM_{X'}$, $m \gg 0$, т.е. подвижная линейная система $2mM_{X'}$ составлена из пучка.

Общий случай (i) аналогичен; M_X также составлена из пучка $|H - T|$.

Вот другое следствие теоремы А.

2.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть (X, M_X) – лог-пара на $X = X_N$ и $c \in \mathbb{Q}_{>0}$ такое, что лог-пара (X, cM_X) Калаби–Яо, как в теореме А. Тогда справедливы следующие утверждения:

$$\begin{aligned} c = 1 &\iff \kappa(X, M_X) = 0; \\ c < 1 &\iff \kappa(X, M_X) > 0; \\ c > 1 &\iff \kappa(X, M_X) = -\infty. \end{aligned} \tag{2.2}$$

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Для достаточно делимых $m \gg 0$ запишем:

$$m(K_X + M_X) = m(K_X + cM_X) + m(1 - c)M_X.$$

По теореме А $K_X + cM_X$ канонично и $\kappa(X, cM_X) = 0$. Если $c < 1$, то

$$\left(\dim_{m \rightarrow \infty} (m(1 - c)M_X) \rightarrow \infty \right) \implies \left(\dim_{m \rightarrow \infty} (m(K_X + M_X)) \rightarrow \infty \right) \implies (\kappa(X, M_X) > 0).$$

Если $c > 1$, то $(\dim(m(c - 1)M_X) \rightarrow \infty) \implies (\kappa(X, M_X) = -\infty)$. Обратно, пусть $f: Y \rightarrow X$ – бирациональный морфизм такой, что лог-пара (Y, M_Y) канонична, тогда $m(K_Y + M_Y) = m(K_Y + cM_Y) + m(1 - c)M_Y$ и

$$\begin{aligned} K_Y + cM_Y &\sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + cM_X) + \{\text{исключительный дивизор}\} \\ &\sim_{\mathbb{Q}} 0 + \{\text{исключительный дивизор}\}. \end{aligned}$$

Таким образом, если $\kappa(Y, M_Y) > 0$, то $(\dim(m(1 - c)M_Y) \rightarrow \infty) \implies (c < 1)$. Остальное аналогично.

В случае, когда $0 < \kappa(X, M_X) < \dim X$, лог-пара (X, M_X) допускает явное описание.

2.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Предположим, что $0 < \kappa(X, M_X) < \dim X$. Тогда (X, M_X) не канонична и $M_X = \pi_*^{-1}(M_Z)$, как в 3.2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме А лог-пара (X, cM_X) канонична, $\kappa(X, cM_X) = 0$ и $c < 1$ по (2.2). Если лог-пара (X, cM_X) терминальна, тогда для $c' = c + \varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$, лог-пара $(X, c'M_X)$ все еще терминальна и $c' < 1$. Так как дивизор $K_X + cM_X \sim_{\mathbb{Q}} 0$, то дивизор $K_X + c'M_X$ обилен, т.е. $(X, c'M_X)$ – каноническая модель, следовательно, $\kappa(X, c'M_X) = \dim X$ и

$$\dim X = \kappa(X, c'M_X) \leq \kappa(X, M_X) < \dim X.$$

Это противоречие показывает, что лог-пара (X, cM_X) не терминальна, стало быть, $\text{CS}(X, cM_X) \neq \emptyset$ и лог-пара (X, M_X) не канонична, так как $c < 1$. По теореме В $cM_X = \pi_*^{-1}(cM_Z)$, значит, $M_X = \pi_*^{-1}(M_Z)$.

2.5. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Если $\kappa(X, M_X) = -\infty$, то $\text{CS}(X, M_X) = \emptyset$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, лог-пара (X, cM_X) канонична по теореме А и $c > 1$ по (2.2). Следовательно, лог-пара (X, M_X) терминальна.

Теперь покажем, как основная теорема 1.4 выводится из теоремы А и ее предыдущих следствий.

2.6. ПРЕДЛОЖЕНИЕ (случай (ii) теоремы 1.4). *Пусть $X = X_N \subset \mathbb{P}^N$ – гладкая гиперповерхность степени N , $N = 4, \dots, 8$. Тогда не существует бирациональных отображений X ни на какое расслоение с нетривиальной базой и общим слоем кодаировой размерности $-\infty$. В частности, X не рациональна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует бирациональное отображение $g: X \dashrightarrow Y$ на расслоение $h: Y \rightarrow Z$, $\dim Z > 0$, с общим слоем Y_η , $\kappa(Y_\eta) = -\infty$. Пусть $A \in \text{Pic}(Z)$ – очень обильный дивизор Картье и $M_X := g_*^{-1}|h^*A|$ – собственный прообраз на X линейной системы $|h^*A|$. Имеем $\kappa(X, M_X) = \kappa(Y, h^*A) = -\infty$, так как $(K_Y + h^*A) \cdot Y_\eta = K_Y \cdot Y_\eta$, $\kappa(Y_\eta) = -\infty$ и по 1.7 (ii) $\kappa(X, M_X)$ – бирациональный инвариант лог-пар. Пусть $c > 0$ такое, что лог-пара (X, cM_X) Калаби–Яо, тогда очевидно, что $c \leq 1$ (так как $M_X \sim -nK_X$ – целый дивизор, $n \geq 1$, значит, $c = 1/n$). Но это противоречит (2.2).

2.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ (случай (i) теоремы 1.4). *В условиях 2.6 X не имеет бирациональных отображений (кроме изоморфизмов) ни на какое слабое многообразие Фано с каноническими особенностями. В частности, $\text{Bir } X = \text{Aut } X$ – конечная, в общем случае единичная, группа проективных автоморфизмов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $g: X \dashrightarrow Y$ – бирациональное отображение на слабое многообразие Фано Y . Покажем, что g – изоморфизм. По теореме о свободе линейной системы (см. 3.7, 3.7.1, 3.7.2, глава I, а также [6], [30] для многообразий с каноническими особенностями) линейная система $|-mK_Y|$ свободна для $m \gg 0$, так как $-K_Y$ nef и big и Y канонично. Рассмотрим лог-пары

$$(Y, M_Y) = \left(Y, \frac{1}{m} |-mK_Y|\right), \quad (X, M_X) = (X, g_*^{-1}M_Y).$$

Так как $|-mK_Y|$ свободна, лог-пара (Y, M_Y) , как и Y , канонична, $M_Y \sim_{\mathbb{Q}} -K_Y$, следовательно, $\kappa(Y, M_Y) = 0$. Отсюда по 1.7 (ii) $\kappa(X, g_*^{-1}M_Y) = 0$ и по (2.2) $(X, g_*^{-1}M_Y)$

– лог-пара Калаби–Яо. По теореме А лог-пара $(X, g_*^{-1}M_Y)$ канонична и, более того, терминальна. Это следует из теоремы В, так как линейная система $|-mK_Y|$, а значит, и mM_X задает бирациональное отображение. Рассмотрим общее разрешение

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ p \swarrow & & \searrow q \\ X & \xrightarrow{-g} & Y \end{array},$$

где Z – неособо, p, q – бирациональные морфизмы. Имеем

$$\begin{aligned} 0 + \sum a(E_i, X, M_X)E_i &\sim_{\mathbb{Q}} K_Z + p_*^{-1}M_X = K_Z + M_Z = K_Z + q_*^{-1}M_Y \\ &\sim_{\mathbb{Q}} 0 + \sum a(F_j, Y, M_Y)F_j, \end{aligned}$$

где E_i, F_j – исключительные дивизоры для p и q соответственно.

Здесь $a(E_i, X, M_X) > 0$, так как лог-пара (X, M_X) терминальна, $a(F_j, Y, M_Y) \geq 0$, так как лог-пара (Y, M_Y) канонична. Применим q_* к предыдущей формуле. Тогда $q_*(E_i) = 0 \ \forall i$, т.е. E_i являются исключительными и для q , т.е. $\{E_i\} \subset \{F_j\}$. С другой стороны, $\{p^*H, E_i\}$ – базис в $\text{Pic}(Z)$, так что $\rho(Z) = \#\{E_i\} + 1 = \#\{F_j\} + \rho(Y)$. Отсюда $\{E_i\} = \{F_j\}$ и $\rho(Y) = 1$. Следовательно, $a(F_j, Y, M_Y) > 0 \ \forall j$, т.е. лог-пара (Y, M_Y) тоже терминальна и $-K_Y$ обилён, так как Y проективно. Значит, можно найти $0 < \varepsilon \ll 1$ такое, что обе лог-пары $(X, (1 + \varepsilon)M_X)$ и $(Y, (1 + \varepsilon)M_Y)$ будут каноническими моделями. По 1.7 (i) тогда $g: X \rightarrow Y$ – изоморфизм.

2.7.1. ЗАМЕЧАНИЕ. В доказательствах предложений 2.6 и 2.7 просматривается вариант доказательства неравенства Нётера–Фано. В 2.6 лог-пара (X, M_X) не канонична, т.е. существует максимальная особенность, в 2.7 она канонична и g оказывается изоморфизмом. Так что неравенство Нётера–Фано здесь заменено бирациональной инвариантностью лог-кодаировой размерности и теоремой единственности лог-канонической модели 1.7.

2.8. ПРЕДЛОЖЕНИЕ (случай (iii) теоремы 1.4). *В условиях предложения 2.6 если $g: X \dashrightarrow Y$ – бирациональное отображение на расслоение $h: Y \rightarrow Z$ с общим слоем кодаировой размерности 0, то $Y \rightarrow Z$ бирационально эквивалентно расслоениям из 1.3 (т.е. индуцировано проекциями).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A – очень обильный дивизор на Z . Тогда

$$\kappa(X, y_*^{-1}|h^*A|) = \dim Z < \dim X.$$

Утверждение следует теперь из 2.4 и теоремы В.

§ 3. Доказательство теоремы А

3.1. ЛЕММА (Пухликов [48]). *Пусть $X = X_n \subset \mathbb{P}^N$, $N \geq 4$, – гладкая гиперповерхность степени $n \geq 1$, M – подвижная линейная система без неподвижных компонент на X , высекаемая гиперповерхностями степени m , $C \subset X$ – неприводимая кривая. Пусть $P \in \mathbb{P}^N$ – достаточно общая точка и $R_{C,P}$ – конус над C с вершиной P , $R_{C,P} \cap X = C \cup \tilde{C}$, где $\tilde{C}$ – вычетная кривая. Тогда:*

- (i) $\tilde{C} = (n - 1) \deg C$ и $C, \tilde{C}$ пересекаются трансверсально в $(n - 1) \deg C$ различных точках;

(ii) кратность M в общей точке кривой C удовлетворяет неравенству

$$\text{mult}_C M \leq m;$$

(iii) если $\text{mult}_C M = m$, то $\{M \cap \tilde{C}\} = \{\tilde{C} \cap C\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $\deg \tilde{C} = (n-1) \deg C$, так как C проектируется из P бирационально, а $C \cup \tilde{C}$ – со степенью накрытия n . Далее, точки пересечения $C \cap \tilde{C}$ – это в точности точки пересечения C с дивизором ветвления $D(P) \subset X$ при проекции $\pi_P: X \rightarrow \mathbb{P}^{N-1}$. Имеем $D(P) \sim (n-1)H$, где H – гиперплоское сечение. Отсюда $\#(C \cap \tilde{C}) = \deg C = \deg \tilde{C}$ и ввиду общности выбора P пересечение C с $D(P)$ трансверсально. Это доказывает (i).

Утверждения (ii) и (iii) следуют из формулы

$$m(n-1) \deg C = m \deg \tilde{C} = \deg(M\tilde{C}) \geq (n-1) \text{mult}_C M \cdot \deg C.$$

Если $\text{mult}_C M = m$, то последнее неравенство становится равенством и $M \cap \tilde{C} = C \cap \tilde{C}$.

3.2. СЛЕДСТВИЕ [5]. В предыдущих обозначениях пусть $n = N$, $X = X_N \subset \mathbb{P}^N$ и $M_X = \frac{1}{m}M$. Тогда Калаби–Яо лог-пара (X, M_X) канонична вне замкнутых точек $x \in X$ и если $S \in \text{CS}(X, M_X)$, $\dim S > 0$, тогда $\dim S = N - 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3.1 $\text{mult}_S M_X \leq 1$. Пусть $\sigma_S: Z \rightarrow X$ – бирациональный морфизм, который над общей точкой S является ее раздутием, E – исключительный дивизор (замыкание раздутия общей точки); тогда

$$a(E, X, M_X) = \text{codim}_X S - 1 - \text{mult}_S M_X \geq 0,$$

так как $\text{codim}_X S \geq 2$. Если (X, M_X) не канонична над S , тогда существует собственное подмногообразие $T \subset E$, $T \in \text{CS}(Z, M_Z - a(E, X, M_X)E)$ и морфизм $\sigma_S|_T: T \rightarrow S$ сюръективен. Пусть $\sigma_T: W \rightarrow Z$ – бирациональный морфизм, являющийся раздутием общей точки T , F – исключительный дивизор, тогда

$$a(F, X, M_X) = \text{codim}_Z T - 1 - \text{mult}_T M_Z + a(E, X, M_X) \geq 0,$$

так как $\text{mult}_T M_Z \leq \text{mult}_S M_X \leq 1$. Таким образом, продолжая процесс, мы получаем на каждом шаге неотрицательную дискрепантность, что означает каноничность (X, M_X) в S , причем равенство нулю возможно только при условии $\text{mult}_S M_X = 1$ и $\text{codim}_X S = 2$, т.е. когда $\dim S = N - 3$.

Ниже мы докажем каноничность (X, M_X) в любой замкнутой точке $x \in X$, а пока выясним структуру множества $\text{CS}(X, M_X)$, когда оно содержит компоненты положительной размерности.

3.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть (X, M_X) – Калаби–Яо лог-пара, где $X = X_N \subset \mathbb{P}^N$ – гладкая гиперповерхность степени $N \geq 4$. Предположим, что $\text{CS}(X, M_X)$ содержит элемент положительной размерности (которая по 3.2 равна $N - 3$). Пусть S – объединение всех таких элементов, тогда $\deg S \leq N$ и линейная оболочка $T = \langle S \rangle$ содержится в линейном подпространстве $\mathbb{P}^{N-2} \subset \mathbb{P}^N$ и $S \subset T \cap X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По 3.2 $\dim S = N - 3$ и $\text{mult}_S M_X = 1$ в общих точках компонент S . Первое из утверждений – это следующее очевидное неравенство:

$$N = (-K_X)^{N-3} M_X^2 \geq \text{mult}_S M_X^2 \cdot \deg S \geq \deg S.$$

Далее, пересекая X общим линейным подпространством $\mathbb{P}^4 \subset \mathbb{P}^N$, можно считать, что (X, M_X) – это 3-мерная лог-пара, $S = \sum S_i$ – кривая и $\text{mult}_{S_i} M_X = 1$ в общей точке каждой из S_i .

Для компоненты S_i и достаточно общей точки $P \in \mathbb{P}^4$ пусть $R_{S_i, P} \cap X = S_i \cup \tilde{S}_i$, как в лемме 3.1. Тогда по этой лемме для каждого дивизора D из линейной системы $M = tM_X$ есть только две возможности:

$$\text{а) } \tilde{S}_i \subset D; \quad \text{б) } D \cap \tilde{S}_i = S_i \cap \tilde{S}_i.$$

Следовательно, если $x \in \tilde{S}_i$, $x \notin S_i$ и $x \in \text{Bs } M$, то $\tilde{S}_i \subset \text{Bs } M$, в частности,

$$(\langle x, P \rangle \cap X)_{\text{red}} \subset \text{Bs } M,$$

где $\langle x, P \rangle$ – прямая в $\mathbb{P}^4$. Последнее условие замкнуто, так что

$$(\langle x_1, x_2 \rangle \cap X)_{\text{red}} \subset \text{Bs } M,$$

где $x_1, x_2 \in S$, иначе говоря,

$$\left(\bigcup_{x_1, x_2 \in S} \langle x_1, x_2 \rangle \cap X \right)_{\text{red}} \subset \text{Bs } M,$$

где $\bigcup_{x_1, x_2 \in S} \langle x_1, x_2 \rangle = F$ – многообразие хорд (бисекующих) кривой S . Так как $\dim(F \cap X) = 1$, то возможны только два случая:

- 1) $F = S$ – прямая на X ;
- 2) F – поверхность, содержащая двумерное семейство прямых.

Из классической литературы хорошо известно, что единственная проективная поверхность, содержащая двумерное семейство прямых, это плоскость $\mathbb{P}^2$. Так что $T = \langle S \rangle$ – это либо прямая на X , либо плоскость $\mathbb{P}^2$ и $S \subset T \cap X$, $(T \cap X)_{\text{red}} \subset \text{Bs } M$. Возвращаясь к исходной гиперповерхности, получаем требуемое утверждение, т.е. либо $T = S = \mathbb{P}^{N-3} \subset X$, что возможно только при $N = 4$ и $N = 5$; либо $T = \langle S \rangle = \mathbb{P}^{N-2}$ и $S \subset T \cap X$.

3.3.1. ЗАМЕЧАНИЕ. Если $N \geq 6$, то $\deg S = N$ и S неприводимо. Это следует из того, что циклы размерности $> (N - 1)/2$ на гладкой гиперповерхности являются полными пересечениями, в частности, их степени кратны N . В остальных случаях возможны только следующие ситуации:

- (1) $N = 4$, $S \subset X$ – прямая, или $N = 5$, $S \subset X$ – плоскость – это два исключительных случая в теореме А;
- (2) $N = 4$ или 5 и $X \cap T = \sum a_i S_i + \sum b_j S_j$, где S_i – неприводимые компоненты S , а S_j – неприводимые компоненты, не содержащиеся в S , a_i, b_j – соответствующие кратности.

Так как $\deg(X \cap T) = 4$ или 5 , то возможностей такого разложения очень мало и, более того, справедлива следующая

3.3.2. ЛЕММА. *В предыдущих обозначениях если $\deg S \geq 2$, то $\text{mult}_{S_j} M_X = 1$ в общей точке каждой из S_j (т.е. можно считать, что компонент S_j нет или что все они содержатся в S).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{H}_T$ – пучок гиперплоских сечений, высекаемых гиперплоскостями через T . Случай $N = 5$ сводится к $N = 4$ ограничением на общее гиперплоское сечение. Достаточно общий дивизор $H \in \mathcal{H}_T$ либо неособ, либо имеет изолированные квадратичные особенности – точки касания (переменные особые точки вдоль базисных компонент). В любом случае H можно выбрать так, чтобы особые точки лежали вне особых точек $S + \sum S_j$.

Покажем, что форма пересечений компонент S_j на H отрицательно определена. Имеем

$$\left(\sum b_j S_j\right) S_j = \left(H \mid H - \sum a_i S_i\right) S_j = \deg S_j - \left(\sum a_i S_i\right) S_j.$$

На плоскости $T = \mathbb{P}^2$

$$\deg S_j - \left(\sum a_i S_i\right) S_j = \deg S_j - \sum a_i \deg S_i \deg S_j < 0,$$

так как $\deg S \geq 2$. Но $\left(\sum a_i S_i\right) S_j \mid H = \left(\sum a_i S_i\right) S_j \mid T$, поскольку $S_j \neq S_i \forall i, j$, и в точках пересечений H неособа. Отсюда получаем, что форма пересечений кривых S_j отрицательно определена (см., например, [2]).

Далее, $\mathbb{Q}$ -дивизор $M_X \mid H - \sum a_i S_i - \sum b_j (\text{mult}_{S_j} M_X) S_j$ nef на поверхности H . С другой стороны, на поверхности H

$$M_X \mid H - \sum a_i S_i - \sum b_j (\text{mult}_{S_j} M_X) S_j \sim_{\mathbb{Q}} \sum b_j (1 - \text{mult}_{S_j} M_X) S_j$$

и

$$\left(\sum_{j=1}^r b_j (1 - \text{mult}_{S_j} M_X) S_j\right) S_l \geq 0, \quad l = 1, \dots, r.$$

Из отрицательности формы пересечений $(S_j S_l)$ следует, что $\text{mult}_{S_j} M_X \geq 1$, что и утверждалось.

Итак, мы показали, что любая Калаби–Яо лог-пара (X, M_X) , $X = X_N \subset \mathbb{P}^N$, $N \geq 4$, канонична вне точек. Более того, если множество центров канонических особенностей состоит из подмногообразий ненулевой размерности, то оно в точности такое, как в теореме А. Отметим, что мы нигде не использовали ограничение $N \leq 8$. Для полного доказательства теоремы А осталось доказать следующее

3.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ [5]. *В условиях теоремы А множество $\text{CS}(X, M_X)$ не содержит точек, кроме случая $N = 4$, и $P \in X$ – точка, как в теореме А, случай (ii) b).*

Сначала несколько слов о стратегии доказательства. Предполагая существование точки $P \in \text{CS}(X, M_X)$, заменим лог-пару (X, M_X) на лог-пару (X, B_X) , для которой $P \in \text{LCS}(X, B_X)$. Используя теоремы Шокурова о связности и обращении присоединения, сведем задачу к 3-мерному случаю. Существенный ингредиент доказательства – это лемма Корти 3.3, глава II.

Сформулируем вариант теоремы Шокурова о связности, который будет использован ниже.

3.4.1. ЛЕММА (ср. 2.11, глава I). Пусть $f: Y \rightarrow X$ – собственный морфизм нормальных многообразий, $f_*\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X$, и пусть

- 1) $D = \sum d_i D_i$ – $\mathbb{Q}$ -дивизор такой, что компоненты D_i являются f -исключительными, если $d_i < 0$;
- 2) $-(K_Y + D)$ – $\mathbb{Q}$ -Картье, f -nef и f -big;
- 3) если $g: Z \rightarrow Y$ – лог-разрешение лог-пары (Y, D) , то дивизор $\sum_{a(E, Y, D) \leq -1} E$ (E не обязательно исключительные) связан в окрестности любого слоя морфизма $f \circ g$ (см. [38; п. 17.4]).

3.5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3.4: случай $N = 4$. Оно в точности такое, как в 3.2, глава II. Если $P \in \text{CS}(X, M_X)$, $X = X_4 \subset \mathbb{P}^4$, то для лог-пары $(X, H_X + M_X)$, где H_X – линейная система гиперплоских сечений через P , H – общий дивизор, $P \in \text{LCS}(X, H_X + M_X)$. По теореме Шокурова об обращении присоединения 2.12, глава I, лог-пара $(H, M_X \mid H)$ не klt в P , и по лемме Корти 3.3, глава II, с $a_1 = a_2 = 1$

$$\text{mult}_P(M_X \mid H)^2 \geq 4$$

и равенство достигается только когда $(H, M_X \mid H)$ лог-канонично и $\text{mult}_P M_X = 2$. Строгое неравенство приводит к противоречию

$$4 = HM_X^2 \geq \text{mult}_P(M_X \mid H)^2 > 4.$$

Если же $\text{mult}_P M_X = 2$, то возможен только случай (ii) b) из теоремы A.

3.6. Для доказательства теоремы A в случаях $5 \leq N \leq 8$ рассмотрим лог-пару $(X, B_X) = (X, H_X + M_X)$, где $H_X = \sum_{i=1}^{N-4} H_i$, H_i – общие гиперплоские сечения, проходящие через точку P . Если $P \in \text{CS}(X, M_X)$, то, как и раньше, $P \in \text{LCS}(X, B_X)$. Выясним, может ли дискретность стать ≤ -1 уже при первом раздутии.

Пусть $\sigma = \sigma_P: Y \rightarrow X$ – раздутие P , $E = \sigma^{-1}(P)$. Тогда

$$a(E, X, B_X) = (N - 2) - (N - 4) - \text{mult}_P M_X = 2 - \text{mult}_P M_X$$

$$\text{и } a(E, X, B_X) = a(E, X, M_X) - N + 4.$$

3.6.1. ЛЕММА. $a(E, X, B_X) > -1$ и $a(E, X, M_X) > N - 5 \geq 0$.

Доказательство. Надо показать, что $\text{mult}_P M_X < 3$.

Предположим, что $\text{mult}_P M_X \geq 3$, тогда

$$N = (-K_X)^{N-3} M_X^2 \geq \text{mult}_P M_X^2 \geq (\text{mult}_P M_X)^2 \geq 9.$$

При $N \leq 8$ получаем противоречие.

Из этой леммы следует, что должно существовать неприводимое собственное подмногообразие $S \subset E$ – центр канонической (соответственно лог-канонической) особенностями для (Y, M^Y) (соответственно (Y, B^Y)), где, как обычно,

$$K_Y + M^Y \sim_{\mathbb{Q}} \sigma^*(K_X + M_X) \sim_{\mathbb{Q}} K_Y + (\text{mult}_P M_X - N + 2)E + M_Y,$$

$$K_Y + B^Y \sim_{\mathbb{Q}} \sigma^*(K_X + B_X) \sim_{\mathbb{Q}} K_Y + (\text{mult}_P M_X - 2)E + B_Y,$$

$B_Y = H_Y + M_Y$ – собственные прообразы. В силу общности выбора H_i можно считать, что $S \not\subset H_Y$, так что

$$S \in \text{CS}(Y, (\text{mult}_P M_X - N + 2)E + M_Y) \implies S \in \text{LCS}(Y, (\text{mult}_P M_X - 2)E + M_Y).$$

Отсюда видно, что при $N > 5$ лог-пара $(Y, (\text{mult}_P M_X - 2)E + M_Y)$ не лог-канонична в общей точке $\eta \in S$.

3.6.2. ЛЕММА. $\text{codim}_E S \geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $S \subset F$ – дивизор. Локализуя Y в общей точке $\eta \in S$, можно считать, что Y – гладкая поверхность, E – неособая в точке η кривая. Лог-пара $(Y, (\text{mult}_P M_X - 2)E + M_Y)$ не лог-терминальна (а при $N > 5$ не лог-канонична) в η . Применим лемму Корти 3.3, глава II, в этой ситуации с $a_1 = 3 - \text{mult}_P M_X > 0$ и $a_2 = 1$; в результате получим

$$\text{mult}_S M_Y^2 \geq 4(3 - \text{mult}_P M_X).$$

Отсюда

$$\text{mult}_P M_X^2 \geq (\text{mult}_P M_X)^2 + \text{mult}_S M_Y^2 \geq (\text{mult}_P M_X)^2 + 4(3 - \text{mult}_P M_X).$$

Следовательно,

$$N = (-K_X)^{N-3} M_X^2 \geq \text{mult}_P M_X^2 \geq (\text{mult}_P M_X - 2)^2 + 8$$

и равенство возможно только при $\text{mult}_P M_X = 2$ и $N = 8$. Но при $N = 8$ неравенство Корти строгое, так как рассматриваемая лог-пара не канонична. Таким образом, для всех $5 \leq N \leq 8$ мы получаем противоречие, что доказывает лемму.

3.6.3. ЛЕММА (редукция к 3-мерному случаю). Пусть $Z = \bigcap_{i=1}^{N-4} H_i$, $(Z, M_Z) = (Z, M_X | Z)$. Тогда Z неособо, M_Z подвижна и

- (i) $K_Z + M_Z \sim_{\mathbb{Q}} (K_X + B_X) | Z$;
- (ii) $P \in \text{LCS}(Z, M_Z)$;
- (iii) если $\sigma: Y \rightarrow X$ – раздутие P , $E = \sigma^{-1}(P)$ и $V = \sigma_*^{-1}(Z)$, $F = E \cap V$, тогда V , F неособы, $\sigma | V: V \rightarrow Z$ – раздутие P и $F = \sigma^{-1}(P)$ на V , $\text{mult}_P M_Z = \text{mult}_P M_X$, $\sigma_*^{-1}(M_Z) = M_Y | V := M_V$;
- (iv) $\sigma^*(K_Z + M_Z) \sim_{\mathbb{Q}} K_V + M^V = (K_Y + B^Y) | V$ и $\text{LCS}(V, M^V) = \text{LCS}(Y, (\text{mult}_P M_X - 2)E + M_Y) | V$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Общность выбора H_i обеспечивает неособость Z , V , F и свойства (iii)–(iv) ограничений. Утверждения (i) и (ii) – это обычная формула присоединения для неособых многообразий и теорема об обращении присоединения Шокурова 2.12, глава I.

3.6.4. ЛЕММА (применение теоремы о связности Шокурова).

Если $P \in \text{CS}(X, M_X)$, то $\text{LCS}(V, M^V)$ состоит из одной точки и, следовательно, $S \subset E \simeq \mathbb{P}^{N-2}$ – линейное подпространство коразмерности 2, т.е. $S \simeq \mathbb{P}^{N-4} \subset \mathbb{P}^{N-2} \simeq E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\text{LCS}(V, M^V) \neq \emptyset$, так как $P \in \text{LCS}(Z, M_Z)$ по предыдущей лемме и $a(F, Z, M_Z) = a(E, X, B_X) > -1$. По лемме 3.6.2 $\text{LCS}(V, M^V)$ состоит только из точек. По лемме о связности 3.4.1 это множество точек должно быть связным, т.е. состоять из одной точки, что и утверждалось.

3.7. Дальнейший план таков: выберем на X достаточно общее гиперплоское сечение L , проходящее через P и такое, чтобы $\sigma_*^{-1}(L) \supset S \simeq \mathbb{P}^{N-4}$, т.е. L должно высекаться гиперплоскостью в $\mathbb{P}^N$, проходящей через линейное подпространство $\mathbb{P}^{N-3} \subset \mathbb{P}^N$, соответствующее S при раздутии точки P ; и далее будем работать с редукцией задачи на L .

Вообще говоря, L может иметь особенности, но точка $P \in L$ неособа, так как L можно выбрать отличной от касательной гиперплоскости. По теореме об обращении присоединения $P \in \text{LCS}(L, M_L = M_X \mid L)$. Пространство $\mathbb{P}^{N-3}$, соответствующее S , может целиком лежать на X , но это возможно только в некоторых случаях при $N = 5$. Этот специальный случай мы рассмотрим в конце, а пока изучим общий случай.

Пусть $U = \sigma_*^{-1}(L)$ и $G = \sigma^{-1}(P)$ на U — исключительный дивизор для $\sigma \mid U: U \rightarrow L$. Имеем $S \subset G$, $G = E \mid U$, $\text{mult}_P M_L = \text{mult}_P M_X$, $\sigma_*^{-1}(M_L) = M_U \mid U$. Теперь из предположения, что $P \in \text{CS}(X, M_X)$, и из того, что $S \subset U$ и $S \in \text{LCS}(Y, B^Y)$, следует, что лог-пара $(U, (\text{mult}_P M_L - 2)G + M_U)$ не лог-терминальна (а при $N > 5$ не лог-канонична) в общей точке $\eta \in S$.

Осталось привести это к противоречию. Опять воспользуемся леммой Корти. Имеем

$$\text{mult}_S M_U^2 \geq 4(3 - \text{mult}_P M_L)$$

и, таким образом,

$$\text{mult}_P M_L^2 \geq \text{mult}_P^2 M_L + \text{mult}_S M_U^2 \geq \text{mult}_P^2 M_L + 4(3 - \text{mult}_P M_L).$$

Следовательно,

$$N = (-K_X)^{N-4} M_L^2 \geq \text{mult}_P M_L^2 \geq (\text{mult}_P M_L - 2)^2 + 8.$$

Как и раньше, равенство при $N = 8$ невозможно, так как в этом случае изучаемая лог-пара не канонична и неравенство Корти строгое. Это противоречие завершает доказательство теоремы А в общем случае.

3.8. Осталось рассмотреть специальный случай, когда $N = 5$ и $X = X_5$ содержит плоскость Q , соответствующую прямой $S \subset E$.

Имеем $M_L = (\text{mult}_Q M_X)Q + R_L$, где лог-пара (L, R_L) подвижна. Мы хотим применить лемму Корти для оценки снизу $\text{mult}_P R_L^2$, затем, используя вложение $L \subset \mathbb{P}^4$, получить верхнюю оценку для этой кратности.

Для применения леммы Корти заметим, что в общей точке прямой S дивизоры G и $\sigma_*^{-1}(Q)$ пересекаются трансверсально. Применим эту лемму к лог-паре $(U, M_U) = (U, (\text{mult}_P R_L + \text{mult}_P M_X - 2)G + \text{mult}_P M_X \sigma_*^{-1}(Q) + R_U)$, где $R_U = \sigma_*^{-1}(R_L)$.

Получим неравенство

$$\text{mult}_S R_U^2 \geq 4(3 - \text{mult}_P R_L - \text{mult}_P M_X)(1 - \text{mult}_P M_X).$$

Комбинируя его с неравенством

$$\text{mult}_P R_L^2 \geq \text{mult}_P^2 R_L + \text{mult}_S R_U^2,$$

получаем

$$\text{mult}_P R_L^2 \geq (\text{mult}_P R_L - 1 + \text{mult}_P M_X)^2 + 8(1 - \text{mult}_P M_X). \quad (3.1)$$

Теперь оценим $\text{mult}_P R_L^2$ сверху. Пусть T — общее гиперплоское сечение L , проходящее через P , тогда T — гладкая поверхность степени 5 в $\mathbb{P}^3$ и, очевидно, $(R_L \mid T)^2 \geq \text{mult}_P R_L^2$. Но на неособой квинтике T легко вычислить

$$(R_L \mid T)^2 = ((T - (\text{mult}_Q M_X)Q) \mid T)^2 = 5 - 2\text{mult}_Q M_X - 3\text{mult}_Q^2 M_X.$$

Следовательно, мы имеем неравенство

$$\text{mult}_P R_L^2 \leq 5 - 2 \text{mult}_Q M_X - 3 \text{mult}_Q^2 M_X. \quad (3.2)$$

Из неравенств (3.1) и (3.2) немедленно получаем

$$\text{mult}_Q M_X = 1, \quad \text{mult}_P R_L = 0.$$

Так что

$$\text{mult}_P M_X = \text{mult}_P M_L = \text{mult}_Q M_X + \text{mult}_P R_L = 1.$$

Следовательно, $P \notin \text{CS}(X, M_X)$ (см. доказательство следствия 3.2). Это противоречие завершает полностью доказательство теоремы А.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] V. Alexeev. Two two-dimensional terminations // *Duke Math. J.* 1993. V. 69. P. 527–545.
- [2] M. Artin. Some numerical criteria for contractibility of curves on algebraic surfaces // *Amer. J. Math.* 1962. V. 84. P. 485–496.
- [3] I. Cheltsov. Log-models of birationally rigid varieties // *J. Math. Sci.* 2000. V. 102. № 2. P. 3843–3845.
- [4] И. А. Чельцов. Лог-пары на гиперповерхностях степени N в $\mathbb{P}^N$ // *Матем. заметки.* 2000. Т. 68. № 1. С. 131–138.
- [5] И. А. Чельцов. О гладкой 4-мерной квинтике // *Матем. сб.* 2000. Т. 191. № 9. С. 139–160.
- [6] Х. Клеменс, Я. Коллар, С. Мори. Многомерная комплексная геометрия. М.: Мир, 1993.
- [7] A. Corti. Factorizing birational maps of threefolds after Sarkisov // *J. Algebraic Geom.* 1995. V. 4. P. 223–254.
- [8] A. Corti. Singularities of linear systems and 3-fold birational geometry // *Explicit Birational Geometry of 3-Folds* / ed. A. Corti and M. Reid. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. P. 259–312. (London Math. Soc. Lecture Note Ser. V. 281.)
- [9] A. Corti, A. Pukhlikov, M. Reid. Fano 3-folds hypersurfaces // *Explicit Birational Geometry of 3-Folds* / ed. A. Corti and M. Reid. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. P. 175–258. (London Math. Soc. Lecture Note Ser. V. 281.)
- [10] В. И. Данилов. Геометрия торических многообразий // *УМН.* 1978. Т. 32. № 2. С. 85–134.
- [11] I. V. Dolgachev. Weighted projective varieties // *Lecture Notes in Math.* 1982. V. 956. P. 34–71.
- [12] A. R. Iano-Fletcher. Working with weighted complete intersections // *Explicit Birational Geometry of 3-Folds* / ed. A. Corti and M. Reid. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. P. 101–173 (London Math. Soc. Lecture Note Ser. V. 281.)
- [13] S. Iitaka. *Algebraic Geometry*. New York: Springer-Verlag, 1982. (Grad. Texts in Math. V. 76.)
- [14] В. А. Исковских. Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий // *Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем.* Т. 12. М.: ВИНТИ, 1979. С. 159–235.
- [15] В. А. Исковских. Факторизация бирациональных отображений рациональных поверхностей с точки зрения теории Мори // *УМН.* 1996. Т. 51. № 4. С. 3–72.
- [16] В. А. Исковских. О критерии рациональности для расслоений на коники // *Матем. сб.* 1996. Т. 187. № 7. С. 75–92.
- [17] В. А. Исковских. Простое доказательство нерациональности 3-мерной кватики // *Матем. заметки.* 1999. Т. 65. № 5. С. 667–673.
- [18] В. А. Исковских, Ю. И. Манин. Трехмерные кватики и контрпримеры к проблеме Люрота // *Матем. сб.* 1971. Т. 86. № 1. С. 140–166.
- [19] V. A. Iskovskih, Yu. G. Prokhorov. Fano varieties // *Encyclopedia Math. Sci.* 1999. V. 47. P. 1–245.

- [20] V. A. Iskovskikh, A. V. Pukhlikov. Birational automorphisms of multidimensional algebraic varieties // J. Math. Sci. 1996. V. 82. № 4. P. 3528–3612.
- [21] J. M. Johnson, J. Kollar. Fano hypersurfaces in weighted projective 4-space // arXiv: math.AG/0008189 2000. P. 1–11.
- [22] Yu. Kawamata. A generalization of Kodaira–Ramanujam’s vanishing theorem // Math. Ann. 1982. V. 261. P. 43–46.
- [23] Yu. Kawamata. Crepant blowing-up of three-dimensional canonical singularities and its application to degenerations of surfaces // Ann. of Math. (2). 1988. V. 128. P. 93–163.
- [24] Yu. Kawamata. Boundedness of $\mathbb{Q}$ -Fano threefolds // Contemp. Math. 1992. V. 131. P. 439–445.
- [25] Yu. Kawamata. On the length of an extremal rational curve // Invent. Math. 1991. V. 105. P. 609–611.
- [26] Yu. Kawamata. Abundance theorem for minimal threefolds // Invent. Math. 1992. V. 108. P. 229–246.
- [27] Yu. Kawamata. Termination of log flips for algebraic 3-folds // Internat. J. Math. 1992. V. 3. P. 653–659.
- [28] Yu. Kawamata. Divisorial contractions to 3-dimensional terminal quotient singularities // Higher-Dimensional Complex Varieties / ed. M. Andreatta et. al. Berlin: de Gruyter, 1996. P. 241–246.
- [29] Yu. Kawamata, K. Matsuki. The number of the minimal models for a threefold of general type is finite // Math. Ann. 1987. V. 276. P. 595–598.
- [30] Yu. Kawamata, K. Matsuda, K. Matsuki. Introduction to the minimal model problem // Adv. Stud. Pure Math. 1987. V. 10. P. 283–360.
- [31] M. Kawakita. Divisorial contractions in dimension 3 which contract divisors to smooth points // arXiv:math.AG/0005207. 2000. V. 22. P. 1–16.
- [32] S. Keel, K. Matsuki, J. McKernan. Log abundance theorem for threefolds // Duke Math. J. 1994. V. 75. P. 99–119.
- [33] S. Keel, J. McKernan. Rational Curves on Log Del Pezzo Surfaces. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1999. (Mem. Amer. Math. Soc. V. 140. № 669.)
- [34] S. Kleiman. Toward a numerical theory of ampleness // Ann. of Math. 1966. V. 84. P. 293–344.
- [35] J. Kollar. Flops // Nagoya Math. J. 1989. V. 113. P. 15–36.
- [36] J. Kollar. Rational Curves on Algebraic Varieties. Berlin: Springer-Verlag, 1996. (Ergeb. Math. Grenzgeb. V. 32.)
- [37] J. Kollar. Singularities of pairs // Proc. Symp. Pure Math. 1997. V. 62. P. 221–287.
- [38] J. Kollar (ed.). Flips and Abundance for Algebraic Threefolds. Paris: Société Mathématique de France, 1992. (Astérisque. V. 211.)
- [39] J. Kollar, S. Mori. Classification of three-dimensional flips // J. Amer. Math. Soc. 1995. V. 5. P. 533–703.
- [40] J. Kollar, S. Mori. Birational Geometry of Algebraic Varieties (with the collaboration of C. H. Clemens and A. Corti). Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998. (Cambridge Tracts in Math. V. 134.)
- [41] J. Kollar, Y. Miyaoka, S. Mori, H. Takagi. Boundedness of canonical $\mathbb{Q}$ -Fano 3-folds // Preprint Kyoto: RIMS, 2000.
- [42] K. Matsuki. Introduction to Mori’s program // Preprint. Perdue: University of Perdue, 1997.
- [43] Y. Miyaoka, S. Mori. A numerical criterion for uniruledness // Ann. of Math. (2). 1986. V. 124. P. 65–69.
- [44] S. Mori. Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective // Ann. of Math. (2). 1982. V. 116. P. 133–176.
- [45] S. Mori. On 3-dimensional terminal singularities // Nagoya Math. J. 1985. V. 98. P. 43–66.
- [46] S. Mori. Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds // J. Amer. Math. Soc. 1998. V. 1. P. 117–253.
- [47] A. V. Pukhlikov. Birational isomorphisms of four-dimensional quintics // Invent. Math. 1987. V. 87. P. 303–329.

- [48] А. В. Пухликов. Замечание к теореме В. А. Исковских и Ю. И. Манина о трехмерной квартике // Труды МИРАН. 1995. Т. 208. С. 278–289.
- [49] A. V. Pukhlikov. Birational automorphism of Fano hypersurfaces // Invent. Math. 1998. V. 134. P. 401–426.
- [50] M. Reid. Canonical 3-folds // Journées de Géométrie Algébrique (Angers, 1979) / ed. A. Beauville. Alphen aan den Rijn, The Netherlands-Rockville, Maryland: Sijthoff & Noordhoff, 1980. P. 273–310.
- [51] M. Reid. Minimal models of canonical threefolds // Adv. Stud. Pure Math. 1983. V. 1. P. 131–180.
- [52] M. Reid. Young person's guide to canonical singularities // Proc. Sympos. Pure Math. 1987. V. 46. P. 345–416.
- [53] M. Reid. Birational geometry of 3-folds according Sarkisov // Preprint. Warwick: University of Warwick, 1991.
- [54] V. G. Sarkisov. Birational maps of standart $\mathbb{Q}$ -Fano fiberings // Preprint. Moscow: Kurchatov Institute of Atomic Energy, 1989.
- [55] В. Г. Саркисов. О структурах расслоений на коники // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. С. 371–408.
- [56] B. Segre. The Non-Singular Cubic Surfaces. Oxford: Oxford Univ. Press, 1942.
- [57] V. V. Shokurov. 3-fold log models // J. Math. Sci. 1996. V. 81. № 3. P. 2667–2699.
- [58] V. V. Shokurov. Pl flips // Preprint. Baltimore, MD: John Hopkins Univ., 2000.
- [59] В. В. Шокуров. Теорема о необращении в нуль // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985. Т. 49. С. 635–651.
- [60] В. В. Шокуров. Трехмерные логперестройки // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1992. № 1. С. 105–201; 1993. Т. 57. № 6. С. 141–175.
- [61] J. Stevens. On canonical singularities as total spaces deformations // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1988. V. 58. P. 275–283.
- [62] E. Viehweg. Vanishing theorems // J. Reine Angew. Math. 1982. V. 335. P. 1–8.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН

Поступила в редакцию
13.02.2001