Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Юзвинский, Алгебры Орлика–Соломона в алгебре и топологии, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 2, 87–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm383>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 10:36:39

УДК 512.66

АЛГЕБРЫ ОРЛИКА–СОЛОМОНА В АЛГЕБРЕ И ТОПОЛОГИИ

С. ЮЗВИНСКИЙ

Обзор посвящен алгебрам Орлика–Соломона конфигураций гиперплоскостей. Эти алгебры возникли в теоремах Арнольда, Брискорна и Орлика–Соломона в качестве алгебр когомологий дополнений к конфигурациям комплексных гиперплоскостей. Впоследствии было найдено множество приложений этих алгебр. Обзор ограничивается изучением алгебр Орлика–Соломона как таковых, а также некоторых из их приложений в топологии и комбинаторике.

Большинство результатов извлечено из недавних работ и препринтов, хотя для удобства читателей приводятся также соответствующие определения и основные результаты из книги “Arrangements of hyperplanes” Орлика и Терао. Некоторые из этих результатов снабжены новыми доказательствами, более непосредственными или более короткими.

Библиография: 69 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	88
2. Идеалы Орлика–Соломона во внешних алгебрах	90
2.1. Комбинаторика конфигураций гиперплоскостей	90
2.2. Определение ОС-алгебр	92
2.3. Градуировка решеткой пересечений	93
2.4. Фильтрация частично упорядоченным множеством $L(\mathcal{A})$	94
2.5. Базисы Гребнера	95
2.6. Точная последовательность удаления–ограничения	97
2.7. Центральная-аффинная точная последовательность	99
3. Гомологическая интерпретация ОС-алгебр	99
3.1. Относительный атомный комплекс решетки	100
3.2. Мультипликативная структура в относительном атомном комплексе ..	101
3.3. Интерпретация ОС-алгебр	102
4. Алгебра когомологий дополнения конфигурации гиперплоскостей	104
4.1. Топологическая индукция	104
4.2. Основные классы когомологий	104
4.3. Когомологии дополнения M	106
5. ОС-алгебры как модули над внешними алгебрами	107
5.1. Двойственные модули	107
5.2. Чистые идеалы	107

5.3. Минимальная свободная резольвента идеала I^0	111
5.4. Особые многообразия ОС-алгебр	114
5.5. Модуль $F(\mathcal{A})$	116
5.6. Проблемы	118
6. Кошулевы ОС-алгебры	118
6.1. Квадратичные ОС-алгебры	118
6.2. Определение кошулевых алгебр и достаточное условие кошулевости ...	124
6.3. Суперразрешимые конфигурации	126
6.4. 1-минимальные модели для дифференциальных градуированных алгебр	128
6.5. 1-минимальные модели и кошулевы алгебры	129
6.6. Формальные топологические пространства	131
6.7. Проблемы	134
7. Когомологии ОС-комплексов	134
7.1. Комплекс пучков на L^{op}	135
7.2. Когомологии в случае элемента a общего положения	136
7.3. Старшая размерность ненулевых когомологий	140
7.4. Линейная алгебра набора множеств	142
7.5. Резонансные многообразия R_m^1	144
7.6. Примеры	150
7.7. Проблемы	158
8. Когомологии локальных систем на дополнениях к конфигурациям	158
8.1. Когомологии локальных систем общего положения и $H^*(A, a)$	158
8.2. Характеристические многообразия	160
8.3. Пучки кривых	161
8.4. Проблемы	163
Список литературы	164

1. Введение

Главным персонажем этого обзора является алгебра Орлика–Соломона (ОС-алгебра) конфигурации гиперплоскостей. Эти алгебры впервые возникли из теорем Арнольда, Брискорна и Орлика–Соломона как алгебры когомологий дополнений конфигураций комплексных гиперплоскостей. Позднее было показано, что ОС-алгебры играют важную роль в теории гипергеометрических функций многих переменных, конформной теории поля, теории когомологий слоев Милнора неизолированных особенностей и в теории инвариантов Александера проективных кривых. Результаты об ОС-алгебрах, как правило, связывают несколько областей математики таких, как чистая алгебра, комбинаторика, топология, дифференциальная и алгебраическая геометрия.

В этом обзоре предпринимается попытка изучить ОС-алгебры как таковые, оставляя приложения в стороне. Хотя большинство результатов обзора были получены после выхода книги [51], для удобства читателя мы также включили некоторые существенные определения и основные факты из этой книги. При этом мы старались привести наиболее прямые и простые доказательства, иногда используя факты и понятия, которые были осмыслены или открыты позднее.

Опишем содержание обзора. В разделе 2 мы приводим основные определения и свойства ОС-алгебр. Некоторые из доказательств этих фактов являются новыми.

Мы подчеркиваем роль использования базисов Гребнера ОС-идеалов. В разделе 3 мы даем интерпретацию ОС-алгебры как локальных гомологий (Уитни) частично упорядоченного множества пересечений. Новым по сравнению с [51] здесь является использование относительного атомного комплекса частично упорядоченного множества. Мы вводим на этом комплексе структуру дифференциальной градуированной алгебры, что делает описанную выше интерпретацию ОС-алгебры более естественной и прозрачной. В разделе 4 мы доказываем комбинацию теорем Брискорна и Орлика–Соломона, интерпретирующих ОС-алгебру как алгебру когомологий дополнения гиперплоскостей. Доказательство следует книге [51] с некоторыми упрощениями.

В разделе 5 мы применяем сравнительно новый подход из [23], при котором ОС-алгебра A рассматривается как модуль над внешней алгеброй E . Основные результаты здесь касаются аннулятора I^0 идеала Орлика–Соломона, который изоморфен двойственному модулю алгебры A . Мы явно находим базис Гребнера для идеала I^0 и доказываем, что его свободная резольвента является линейной. Это позволяет ввести модуль F над кольцом многочленов, сопоставляемый алгебре A при соответствии Бернштейна–Гельфанда–Гельфанда. Мы находим некоторые инварианты модуля F и сингулярного многообразия алгебры A .

В разделе 6 ОС-алгебра A рассматривается как градуированная конечнопорожденная алгебра и исследуется вопрос о наличии у алгебры A свойства Кошуля. Основным здесь является результат работы [53], согласно которому алгебра A является кошулевой тогда и только тогда, когда соответствующее дополнение гиперплоскостей является пространством типа $K[\pi, 1]$ (для комплексных конфигураций). Свойство Кошуля подразумевает, что алгебра является квадратичной, поэтому мы начинаем с изучения вопроса о квадратичности алгебры A . Как доказано Фальком в [27], комбинаторное свойство линейной замкнутости необходимо для квадратичности. Им также была высказана гипотеза, что это условие является достаточным. Более сильное необходимое условие, опровергающее гипотезу Фалька, появилось в [20]. Это условие использует идеал I^0 из раздела 5. Мы описываем все эти условия и, в частности, приводим новое доказательство теоремы Фалька.

В разделе 7 мы рассматриваем ОС-алгебру A как коцепной комплекс относительно умножения на элемент a степени 1 и изучаем его когомологии $H^*(A, a)$. В случае, когда a является элементом достаточно общего положения, когомологии $H^*(A, a)$ могут быть описаны полностью – см. теорему 7.5 [67], [58]. Это дает некоторые верхние оценки для размерностей обращения в нуль когомологий для произвольного a и для рангов ненулевых когомологий. Для получения дополнительной информации о когомологиях $H^*(A, a)$ мы изучаем резонансные многообразия, введенные в [26]. Наиболее известным из них является многообразие R_m^1 , представляющее собой множество элементов a таких, что $\dim H^1(A, a) \geq m$. Мы описываем неприводимые компоненты многообразия R_m^1 явными уравнениями и выводим их свойства, опираясь, в основном, на результаты из [46]. Для некоторых классов конфигураций гиперплоскостей условие наличия существенных компонент многообразия R_m^1 является весьма ограничивающим и позволяет классифицировать такие конфигурации. Эта тема находит продолжение в разделе 8, где для получения дополнительной информации о когомологиях $H^1(A, a)$ и многообразиях R_m^1 используются когомологии с локальными коэффициентами.

Каждый из разделов 5–8 заканчивается обсуждением некоторых открытых вопросов.

Автор выражает благодарность В. М. Бухштаберу и А. М. Вершику, без чьей поддержки этот обзор никогда не был бы написан.

2. Идеалы Орлика–Соломона во внешних алгебрах

В этом разделе дается чисто алгебраическое определение ОС-идеала (и ОС-алгебры) конфигурации гиперплоскостей. Мы доказываем некоторые простые свойства ОС-идеалов. Эти результаты можно найти в книге [51], где они сопровождаются ссылками на оригинальные работы и примерами. Порядок изложения материала отличается от [51], а некоторые доказательства являются более короткими и прямыми.

2.1. Комбинаторика конфигураций гиперплоскостей. Вводимые здесь обозначения будут использоваться на протяжении всей статьи. Обозначим через $\mathcal{A}$ конфигурацию гиперплоскостей в некотором аффинном пространстве $V \approx K^\ell$, $\ell \geq 1$, над произвольным фиксированным полем K . Это означает, что $\mathcal{A}$ является конечным множеством аффинных гиперплоскостей в V . Число гиперплоскостей в конфигурации $\mathcal{A}$ обычно будет обозначаться через n . Очень часто мы будем фиксировать произвольный линейный порядок на $\mathcal{A}$, т.е. полагать $\mathcal{A} = (H_1, \dots, H_n)$.

Всякий раз, когда это представляется удобным, мы фиксируем линейный базис $(x_1, \dots, x_\ell)$ пространства V^* и отождествляем V с K^ℓ , используя двойственный базис в V . Тогда для того чтобы определить гиперплоскость H в K^ℓ , достаточно зафиксировать многочлен $\alpha_H \in S = K[x_1, \dots, x_\ell]$ степени 1 такой, что H является его множеством нулей. Этот многочлен определен однозначно с точностью до умножения на ненулевой элемент поля K . Мы будем сокращенно обозначать α_{H_i} через α_i .

Для того чтобы определить алгебру Орлика–Соломона (кратко называемую ОС-алгеброй) конфигурации $\mathcal{A}$, нам не нужно знать сами гиперплоскости – достаточно знать комбинаторику конфигурации $\mathcal{A}$, т.е. *частично упорядоченное множество пересечений* $L(\mathcal{A})$. Элементами этого частично упорядоченного множества $L = L(\mathcal{A})$ являются подпространства в V , которые являются пересечениями некоторых из гиперплоскостей конфигурации $\mathcal{A}$ (включая само V и пересечение пустого множества гиперплоскостей). Частичный порядок на L является обратным к включению подпространств. В частности, множество L всегда имеет единственный минимальный элемент V и обладает единственным максимальным элементом $\bigcap_{i=1}^n H_i$ тогда и только тогда, когда это пересечение непусто. В последнем случае, воспользовавшись переносом, мы всегда можем предполагать, что это пересечение содержит 0 (эквивалентно, все гиперплоскости α_H являются однородными). В этом случае конфигурация $\mathcal{A}$ называется *центральной*. Если же пересечение $\bigcap_{i=1}^n H_i$ есть 0, конфигурация $\mathcal{A}$ называется *существенной*.

Частично упорядоченное множество L не может быть произвольным. Если конфигурация $\mathcal{A}$ является центральной, то L представляет собой решетку, атомами (т.е. элементами, следующими за минимальным элементом) которой являются сами гиперплоскости. Множество L также обладает следующими дополнительными свойствами:

- (i) L является *атомным*, т.е. каждый его элемент является соединением¹ (точной верхней гранью) некоторого семейства атомов;

¹В оригинале join. – Прим. перев.

- (ii) L является *ранжированным*, т.е. все максимальные цепи $(V < X_1 < \dots < X_r = X)$ от V до фиксированного элемента $X \in L$ имеют одно и то же число элементов, равное коразмерности элемента X (следуя обозначениям из теории решеток, мы называем это число рангом X и обозначаем его $\text{rk } X$);
- (iii) для любых $X, Y \in L$ имеет место *полумодулярное неравенство*

$$\text{rk } X + \text{rk } Y \geq \text{rk}(X \vee Y) + \text{rk}(X \wedge Y),$$

где символы $\vee$ и $\wedge$ обозначают соответственно операции соединения и собирания² (т.е. точной нижней грани).

Решетки, удовлетворяющие этим трем свойствам, называются *геометрическими*. Рангом $\text{rk } L$ геометрической решетки L называется максимальный ранг его элементов. Очевидно, $\text{rk } L \leq \ell$, причем $\text{rk } L = \ell$ тогда и только тогда, когда конфигурация является существенной. Заметим, что любой непустой замкнутый интервал геометрической решетки, т.е. частично упорядоченное подмножество элементов, лежащих между двумя фиксированными элементами включительно, в свою очередь является геометрической решеткой.

Из многих свойств геометрических решеток нам понадобится свойство их гомотопий. Все флаги (т.е. линейно упорядоченные подмножества) произвольного частично упорядоченного множества образуют симплициальный комплекс на множестве его элементов. Гомотопические инварианты этого симплициального комплекса могут быть приписаны самому частично упорядоченному множеству. Если частично упорядоченное множество является решеткой, то под его гомотопическими инвариантами обычно подразумеваются гомотопические инварианты его подмножества, получаемого удалением максимального и минимального элемента. В этом смысле следующий результат является частью знаменитой теоремы Фолькмана [32]: приведенные гомотопии (с целыми коэффициентами) геометрической решетки обращаются в нуль во всех размерностях, за исключением, возможно, максимальной (равной $\text{rk } L - 2$).

Для того чтобы описать структуру частично упорядоченного множества $L(\mathcal{A})$ в случае, когда $\mathcal{A}$ не является центральным, мы применим простую конструкцию *конизации* (взятия конуса). Пусть $\mathcal{A}$ – произвольная (не обязательно центральная) конфигурация из n гиперплоскостей в K^ℓ . Вкладывая K^ℓ в проективное пространство $\mathbb{P}K^\ell$ и присоединяя к $\mathcal{A}$ гиперплоскость $H_0 = \mathbb{P}K^\ell \setminus K^\ell$, мы получаем конфигурацию из $n + 1$ проективных гиперплоскостей в $\mathbb{P}K^\ell$. Конус $s\mathcal{A}$ над этой конфигурацией, рассматриваемый как конфигурация гиперплоскостей в $K^{\ell+1}$, называется *конусом над $\mathcal{A}$* . Он является центральной конфигурацией из $n + 1$ гиперплоскостей. Заметим также, что любая непустая центральная конфигурация гиперплоскостей $\mathcal{B}$ в K^ℓ может рассматриваться как конус над некоторой конфигурацией $\mathcal{A}$. Действительно, зафиксируем произвольную гиперплоскость $H \in \mathcal{A}$ и линейный функционал α_H такой, что $H = \ker \alpha_H$. Определим аффинную гиперплоскость $\overline{H}$ в K^ℓ уравнением $\alpha_H = 1$ и рассмотрим конфигурацию гиперплоскостей $d\mathcal{A} = \{H' \cap \overline{H} \mid H' \in \mathcal{A} \setminus \{H\}\}$ в $\overline{H}$. Легко видеть, что конфигурация $s(d\mathcal{A})$ линейно изоморфна $\mathcal{A}$. Конфигурация $d\mathcal{A}$ называется *деконизацией* конфигурации $\mathcal{A}$.

²В оригинале meet. – Прим. перев.

Теперь мы видим, что частично упорядоченное множество $L(\mathcal{A})$ является подмножеством (геометрической) решетки $L(c\mathcal{A})$. Это подмножество может быть определено как содержащее все атомы, кроме H_0 , и замкнутое относительно операции соединения. Если в этом определении заменить $L(c\mathcal{A})$ на произвольную геометрическую решетку, а H_0 на ее произвольный атом, то мы получим определение *геометрической полурешетки*. Аксиоматическое определение можно найти в [66]. Наиболее важным для нас свойством геометрической полурешетки является то, что каждый ее замкнутый интервал является геометрической решеткой, и, таким образом, для него верна теорема Фолькмана.

2.2. Определение ОС-алгебр. Пусть $\mathcal{A} = (H_1, \dots, H_n)$ – конфигурация гиперплоскостей и k – некоторое коммутативное кольцо. Пусть, далее, E – внешняя алгебра над k с образующими $e_1, \dots, e_n$ степени 1. Заметим, что индексы определяют биекцию между конфигурацией $\mathcal{A}$ и множеством образующих. Иногда мы будем обозначать образующую, соответствующую гиперплоскости $H \in \mathcal{A}$, через e_H . Алгебра E является градуированной: $E = \bigoplus_{p=1}^n E_p$, где $E_1 = \bigoplus_{j=1}^n k e_j$ и $E_p = \bigwedge^p E_1$. Для любого k модуль E_j является свободным над k и имеет выделенный базис, состоящий из мономов $e_S = e_{i_1} \cdots e_{i_p}$, где $S = \{i_1, \dots, i_p\}$ пробегает все подмножества мощности p множества $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$, причем $i_1 < i_2 < \dots < i_p$. Градуированная алгебра E является (коммутативной) дифференциальной градуированной алгеброй относительно дифференциала ∂ степени -1 , однозначно определяемого условиями $\partial e_i = 1$ для любого $i = 1, \dots, n$ и градуированной формулой Лейбница. Тогда для любого подмножества $S \subset [n]$ мощности p мы имеем

$$\partial e_S = \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} e_{S_j},$$

где S_j – дополнение в множестве S к его j -му элементу.

Важно заметить, что ∂e_S является чистым (или разложимым) элементом алгебры E для любого S . Действительно, пусть снова $S = \{i_1, \dots, i_p\} \subset [n]$; тогда непосредственная проверка показывает, что

$$\partial e_S = (e_{i_2} - e_{i_1})(e_{i_3} - e_{i_1}) \cdots (e_{i_p} - e_{i_1}). \quad (2.1)$$

Для любого $S \subset [n]$ положим $\cap S = \bigcap_{i \in S} H_i$ и назовем подмножество S *зависимым*, если $\cap S \neq \emptyset$ и множество линейных многочленов $\{\alpha_i \mid i \in S\}$ является линейно зависимым.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. ОС-идеалом конфигурации $\mathcal{A}$ называется идеал $I = I(\mathcal{A})$ алгебры E , порожденный всеми мономами e_S , для которых $\cap S = \emptyset$, и всеми элементами ∂e_S , для которых S является зависимым. Алгебра $A = A(\mathcal{A}) = E/I(\mathcal{A})$ называется ОС-алгеброй конфигурации $\mathcal{A}$.

Обозначим каноническую проекцию $E \rightarrow A$ через π . Так как π индуцирует k -линейный изоморфизм между E_1 и A_1 , мы будем отождествлять эти k -модули.

Заметим, что для любого непустого подмножества $S \subset [n]$ и $i \in S$ мы имеем $e_i \partial e_S = \pm e_S$. Следовательно, $I(\mathcal{A})$ содержит моном e_S для любого зависимого множества S . Отсюда вытекает, что алгебра $A(\mathcal{A})$ порождена как k -модуль образами мономов e_S таких, что $\cap S \neq \emptyset$ и S – зависимо.

Множество образующих в определении 2.1 можно существенно уменьшить. Минимальные по отношению к включению зависимые подмножества в $[n]$ называются *циклами*³.

ЛЕММА 2.2. *ОС-идеал порожден всеми мономами e_S такими, что $\cap S = \emptyset$, и элементами ∂e_T для всех циклов T .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S – зависимое множество и $T \subset S$ – некоторый цикл. Тогда $e_S = \pm e_T e_{S \setminus T}$. Используя (градуированную) формулу Лейбница для дифференциала ∂ , мы находим

$$\partial e_S = \pm \partial e_T e_{S \setminus T} \pm e_T \partial e_{S \setminus T},$$

откуда и вытекает утверждение.

Очевидно, I является однородным идеалом в E , и, таким образом, A является градуированной алгеброй. Запишем $A = \bigoplus A_p$, где $A_p = E_p / I \cap E_p$. Так как любое множество из более чем $\text{rk } L$ элементов является зависимым, максимальная степень элементов алгебры A равна $\text{rk } L$. Заметим, что факторизация пространства V по $\bigcap_i H_i$ делает конфигурацию $\mathcal{A}$ существенной, но не меняет алгебру A . Поэтому, за исключением случаев, когда мы имеем дело с подконфигурациями, мы всегда будем предполагать, что конфигурация $\mathcal{A}$ является существенной, т.е. $\text{rk } L = \ell$.

2.3. Градуировка решеткой пересечений. В этом пункте мы обсуждаем более тонкую градуировку алгебры A . Наиболее тонкой градуировкой алгебры E является градуировка булевым частично упорядоченным множеством всех подмножеств множества $[n]$. В общем случае ОС-идеал не является однородным в этой градуировке. Рассмотрим более грубую градуировку на E , сопоставляющую каждому моному e_S ($S \subset [n]$) множество $\cap S$. Это есть градуировка решеткой $\bar{L}(\mathcal{A})$, где $\bar{L}(\mathcal{A})$ есть $L(\mathcal{A})$, если конфигурация $\mathcal{A}$ является центральной, и $L(\mathcal{A})$, пополненное единственным максимальным элементом $\emptyset$, иначе. Запишем $E = \bigoplus_{X \in \bar{L}(\mathcal{A})} E_X$, где E_X порождено мономами e_S такими, что $\cap S = X$. Заметим, что эта градуировка, вообще говоря, несравнима со стандартной градуировкой числами $|S|$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *ОС-алгебра $A = A(\mathcal{A})$ является градуированным частично упорядоченным множеством $L(\mathcal{A})$, и эта градуировка тоньше, чем стандартная градуировка $A = \bigoplus_{p=0}^n A_p$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, все мономы e_S являются однородными. Если T – цикл в $[n]$ и $\cap T = X$, то $\cap T_i = X$ для любого $i \in T$. Таким образом, $\partial e_T \in E_X$. Используя лемму 2.2, мы получаем отсюда, что $I = \bigoplus_{X \in \bar{L}(\mathcal{A})} I_X$, где $I_X = I(\mathcal{A}) \cap E_X$. Кроме того, если конфигурация $\mathcal{A}$ нецентральна, то $I_\emptyset$ содержит все мономы e_S такие, что $\cap S = \emptyset$, и, таким образом, совпадает с $E_\emptyset$. Итак, $A_\emptyset = 0$ и A градуирована частично упорядоченным множеством $L(\mathcal{A})$.

Второе утверждение вытекает из того факта, что алгебра A порождена как k -модуль образами мономов e_S таких, что $\cap S \neq \emptyset$ и S – независимо. Для такого множества S мы имеем $\text{rk } \cap S = |S|$. Таким образом,

$$A_p = \bigoplus_{X \in L(\mathcal{A}), \text{rk } X = p} A_X,$$

что завершает доказательство.

³В оригинале circuits. – Прим. перев.

2.4. Фильтрация частично упорядоченным множеством $L(\mathcal{A})$. Описанная выше градуировка алгебры A множеством $L(\mathcal{A})$ индуцирует фильтрацию в A , которая может быть описана независимо. Среди всех подконфигураций конфигурации $\mathcal{A}$ имеются те, которые соответствуют элементам из $L(\mathcal{A})$. Для каждого $X \in L(\mathcal{A})$ мы положим $\mathcal{A}_X = \{H \in \mathcal{A} \mid X \subset H\}$. Положим также $[n]_X = \{i \in [n] \mid H_i \in \mathcal{A}_X\}$. Заметим, что все подконфигурации $\mathcal{A}_X$ являются центральными. Такие подконфигурации суть те и только те, которые удовлетворяют свойству *замкнутости*. Это означает, что вместе с любым набором гиперплоскостей такая конфигурация содержит все гиперплоскости, зависящие с этим набором.

Мы хотим показать, что градуированные алгебры $A(\mathcal{A}_X)$ образуют фильтрацию в алгебре $A(\mathcal{A})$. Для начала обозначим через $E(X)$ подалгебру в E , порожденную всеми образующими e_i , для которых $H_i \in \mathcal{A}_X$, и заметим, что $A(\mathcal{A}_X) = E(X)/I(\mathcal{A}_X)$. Очевидно, $I(\mathcal{A}_X) \subset I(\mathcal{A}) \cap E(X)$. Ключевым наблюдением является то, что это включение на самом деле является равенством.

ЛЕММА 2.4. *Для любого $X \in L(\mathcal{A})$ имеет место соотношение*

$$I(\mathcal{A}_X) = I(\mathcal{A}) \cap E(X).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $a \in I(\mathcal{A}) \cap E(X)$. Используя определение идеала $I(\mathcal{A})$, мы можем записать

$$a = \sum_{S,T} c_{S,T} e_T \partial e_S + \sum_{T,U} d_{T,U} e_T e_U, \quad (2.2)$$

где $c_{S,T}, d_{U,T} \in k$, а $S, T, U \subset [n]$ таковы, что S является циклом и $\cap U = \emptyset$. Так как S есть цикл, мы имеем, что либо $S \subset \mathcal{A}_X$, либо $S_i \not\subset \mathcal{A}_X$ для любого $i \in S$. Кроме того, $U \not\subset \mathcal{A}_X$ для любого U . Следовательно, a содержит слагаемое $a' = \sum_{S,T \subset \mathcal{A}_X} c_{S,T} e_T \partial e_S \in E(X)$ и все базисные элементы в $a - a'$ лежат в $\bigoplus_{Y \neq X} E(Y)$. Так как $a \in E(X)$, мы имеем $a = a'$. Очевидно, $a' \in I(\mathcal{A}_X)$, откуда и вытекает требуемое утверждение.

Из предыдущей леммы немедленно вытекает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. *Естественный гомоморфизм $i: A(\mathcal{A}_X) \rightarrow A(\mathcal{A})$ инъективен.*

СЛЕДСТВИЕ 2.6. *Соответствие $X \mapsto A(\mathcal{A}_X)$ ($X \in L(\mathcal{A})$) определяет монотонное отображение из $L(\mathcal{A})$ в частично упорядоченное множество градуированных подалгебр алгебры A , упорядоченное по вложению, т.е. фильтрацию на A .*

Следующее наблюдение вытекает непосредственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. *Фильтрация $\{A(\mathcal{A}_X)\}$ индуцирована градуировкой $A = \bigoplus_{Y \in L(\mathcal{A})} A_Y(\mathcal{A})$. Точнее, $A_Y(\mathcal{A}_X) = A_Y(\mathcal{A})$ для любых элементов $X, Y \in L(\mathcal{A})$ таких, что $X \subset Y$. Таким образом, $A(\mathcal{A}_X) = \bigoplus_{Y \leq X} A_Y(\mathcal{A})$.*

Если конфигурация $\mathcal{A}$ является центральной, то алгебра A приобретает от E другую часть структуры. В этом случае идеал I порожден над k элементами $\{e_T \partial e_S\}$,

где множество T произвольно, а S зависимо. Используя правило Лейбница, мы получаем

$$\partial(e_T \partial e_S) = \partial e_T \partial e_S,$$

т.е. идеал $I(\mathcal{A})$ инвариантен относительно ∂ . Таким образом, индуцируется дифференциал

$$\partial_A: A \rightarrow A,$$

который определяет структуру коммутативной дифференциальной градуированной алгебры на A . Соотношения между дифференциалом ∂_A , градуировкой и фильтрацией в A имеют следующий вид:

1. $\partial_A(A_X) \subset A_{r-1}$ для любого элемента $X \in L(\mathcal{A})$ ранга r ;
2. $\partial_A(A(\mathcal{A}_X)) \subset A(\mathcal{A}_X)$ для любого элемента $X \in L(\mathcal{A})$.

Доказательство получается непосредственной проверкой.

Наконец, если конфигурация непуста, то ограничение дифференциала ∂_A на любую алгебру $A(\mathcal{A}_X)$ является ациклическим. В частности, это утверждение имеет место для $A = A(\mathcal{A}) = A(\mathcal{A}_U)$, где U – единственный максимальный элемент множества $L(\mathcal{A})$. Действительно, умножение на произвольную образующую e_i , соответствующую гиперплоскости $H_i \in \mathcal{A}_X$, очевидно, является гомотопией между тождественным и нулевым отображением.

2.5. Базисы Гребнера. Напомним, что мы зафиксировали произвольный линейный порядок на конфигурации $\mathcal{A}$. Этот порядок индуцирует *градуированно-лексикографический линейный порядок*⁴ на множестве всех стандартных мономов e_S алгебры E : если $S = (i_1, \dots, i_p)$ и $T = (j_1, \dots, j_q)$ (где $i_1 < \dots < i_p$ и $j_1 < \dots < j_q$), то $e_S < e_T$, если либо $p < q$, либо $p = q$ и существует m ($1 \leq m \leq p$) такое, что $i_r = j_r$ при $r < m$ и $i_m < j_m$. Базис алгебры E , состоящий из стандартных мономов, мультипликативен с точностью до $\pm$ (т.е. произведение двух стандартных мономов есть либо 0, либо стандартный моном, возможно со знаком минус). Степенно-лексикографический порядок также мультипликативен (т.е. инвариантен относительно умножения мономов) в том же смысле. Таким образом, мы можем применять к идеалу $I = I(\mathcal{A})$ теорию базисов Гребнера.

Основной целью этого пункта является доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2.8. *Пусть*

$$B = \{\partial e_S \mid S \text{ есть цикл}\} \\ \cup \{e_T \mid T \text{ есть минимальное множество такое, что } \cap T = \emptyset\} \subset E.$$

Тогда B есть базис Гребнера идеала I .

Для доказательства этой теоремы мы вначале комбинаторно определим начальные мономы элементов из B , т.е. их наибольшие мономы в градуированно-лексикографическом порядке. Так как элемент e_T сам является мономом, его начальный моном совпадает с ним самим. Начальный моном элемента ∂e_S есть e_{S_1} (напомним, что S_1 получается из S удалением наименьшего элемента). Следовательно, эти начальные

⁴В оригинале deg-lex linear order. – Прим. перев.

мономы соответствуют *разорванным циклам*, т.е. независимым подмножествам S множества $[n]$ таким, что $S \cup \{i\}$ есть цикл и $i < j$ для всех $j \in S$.

Обозначим через $\text{In}(B)$ и $\text{In}(I)$ множества начальных мономов элементов из B и из I соответственно. Тогда утверждение теоремы 2.8 означает, что

$$\langle \text{In}(B) \rangle = \text{In}(I),$$

где в левой части стоит множество всех мономов, делящихся на некоторый моном из $\text{In}(B)$. Обозначим теперь через $C = C(\mathcal{A})$ (соответственно через $\overline{C}$) естественное линейное дополнение до множества $\langle \text{In}(B) \rangle$ (соответственно до $\text{In}(I)$), а именно, свободный k -модуль, порожденный всеми мономами из E , которые не делятся ни на один элемент из $\text{In}(B)$ (соответственно не лежат в $\text{In}(I)$). Мономы из C называются **nbc**-мономами, а соответствующие подмножества в $[n]$ (т.е. те, которые не содержат ни одного разорванного цикла) называются **nbc**-множествами. Очевидно,

$$E = I \oplus \overline{C}$$

(как k -модули), откуда вытекает, что ограничение проекции π на $\overline{C}$ есть линейный изоморфизм $\overline{C} \rightarrow A$. Так как $\langle \text{In}(B) \rangle \subset \text{In}(I)$, мы всегда имеем $\pi(C) = A$. Следовательно, теорема 2.8 эквивалентна утверждению, что

$$\ker \pi|_C = 0,$$

т.е. **nbc**-мономы являются независимыми в A .

Вначале заметим, что модуль C градуирован и множеством $[n]$, и частично упорядоченным множеством $L(\mathcal{A})$. Действительно, так как этот модуль порожден мономами, он приобретает естественную градуировку множествами $[n]$ и $\overline{L}(\mathcal{A})$. Кроме того, для любого монома $e_S \in C$ мы имеем $\cap S \neq \emptyset$, откуда вытекает, что вторая градуировка на самом деле есть градуировка множеством $L(\mathcal{A})$. Более того, множество S является независимым, т.е. $|S| = \text{rk } \cap S$. Отсюда вытекает, что вторая градуировка тоньше, чем первая, т.е. $C_p = \bigoplus_{Y \in L, \text{rk } Y = p} C_Y$ для любого p , $0 \leq p \leq n$.

Второе наблюдение заключается в том, что $e_S \in C$ влечет $e_{S_i} \in C$ для любого $i \in S$. Следовательно, $\partial(C) \subset C$. По той же причине мы имеем

$$\partial(C_X) \subset \bigoplus_{Y \subset X, \text{rk } Y = \text{rk } X - 1} C_Y.$$

ЛЕММА 2.9. *Для любого $X \in L(\mathcal{A}) \setminus \{V\}$ ограничение дифференциала ∂ на C_X инъективно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть i – минимальный элемент множества $[n]_X$. Из определения модуля C_X вытекает, что $i \in S$ для любого $e_S \in C_X$, откуда $e_i C_X = 0$. С другой стороны, $\partial(e_i e_S) = e_S - e_i \partial e_S$ для любого подмножества S множества $[n]$, откуда вытекает, что аналогичная формула имеет место, если заменить e_S на произвольный элемент $c \in C_X$. Мы имеем $e_i \partial c = c - \partial(e_i c) = c$, откуда и вытекает утверждение.

Теперь все готово для доказательства результата, эквивалентного теореме 2.8.

ТЕОРЕМА 2.10. *Для любой конфигурации $\mathcal{A}$ ограничение проекции π на C инъективно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как отображение π однородно относительно градуировки множеством $L(\mathcal{A})$, достаточно доказать, что ограничение π на C_X инъективно для любого $X \in L(\mathcal{A})$. Проведем индукцию по $\text{rk } X$. Если $\text{rk } X = 0$, т.е. $X = V$, то $C_X = k = A_X$ и ограничение π на C_X есть тождественное отображение. Предположим, что $\text{rk } X = r > 0$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} C_X & \longrightarrow & C_{r-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_X & \longrightarrow & A_{r-1} \end{array},$$

где вертикальные стрелки обозначают ограничения проекции π , а горизонтальные – ограничения дифференциала ∂ . В силу леммы 2.9 дифференциал ∂ инъективен на C_X . Кроме того, ограничение π инъективно на C_{r-1} по предположению индукции. Следовательно, π инъективно на C_X , что завершает доказательство.

СЛЕДСТВИЕ 2.11. Все k -модули A и A_X ($X \in L(\mathcal{A})$) являются свободными.

2.6. Точная последовательность удаления–ограничения. В этом пункте мы строим короткую точную последовательность для ОС-алгебр, которая является очень полезной при доказательстве различных свойств этих алгебр индукцией по n .

Пусть $\mathcal{A}$ – произвольная непустая конфигурация и H' – некоторая ее фиксированная гиперплоскость. Тогда мы имеем две новые конфигурации: $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \setminus \{H'\}$ (получается удалением гиперплоскости H' из $\mathcal{A}$) и $\mathcal{A}'' = \{H \cap H' \mid H \in \mathcal{A}'\}$ (получается ограничением $\mathcal{A}$ на H'). Мы подчеркнем, что $\mathcal{A}''$ является конфигурацией гиперплоскостей в пространстве H' . Также заметим, что в то время как $\mathcal{A}'$ содержит в точности $n - 1$ гиперплоскостей, количество элементов в $\mathcal{A}''$ не превышает $n - 1$, но может быть и меньше. Для любого объекта O , сопоставляемого конфигурации, мы положим $O = O(\mathcal{A})$, $O' = O(\mathcal{A}')$ и $O'' = O(\mathcal{A}'')$.

Так как все предыдущие результаты не зависят от выбора порядка гиперплоскостей в конфигурациях, мы будем выбирать этот порядок наиболее удобным для наших целей способом. Во-первых, H' всегда будет последним элементом конфигурации $\mathcal{A}$, т.е. $H' = H_n$. Во-вторых, определим отображение $\lambda: \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}''$ как $\lambda(H) = H \cap H_n$. Тогда мы выберем линейные порядки на $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ и $\mathcal{A}''$ так, что порядок на $\mathcal{A}'$ индуцирован порядком на $\mathcal{A}$ (т.е. $\mathcal{A}' = (H_1, \dots, H_{n-1})$) и $\lambda(H)$ предшествует $\lambda(\bar{H})$ тогда и только тогда, когда H предшествует $\bar{H}$ для всех $H, \bar{H} \in \mathcal{A}'$.

Теперь продолжим отображение λ на упорядоченные подмножества в $\mathcal{A}'$ по формуле $\lambda(H_{i_1}, \dots, H_{i_p}) = (\lambda(H_{i_1}), \dots, \lambda(H_{i_p}))$. Заметим, что этот образ представляет собой последовательность элементов из $\mathcal{A}''$, возможно, с повторениями, но всегда в неубывающем порядке. Такое продолжение отображения λ можно также рассматривать как отображение $S \mapsto \lambda(S)$ из множества подмножеств множества $[n - 1]$ в множество неубывающих подпоследовательностей в $[n'']$, где $n'' = |\mathcal{A}''|$.

Теперь мы можем рассмотреть следующую естественную последовательность k -линейных отображений:

$$0 \longrightarrow E' \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} E'' \longrightarrow 0, \quad (2.3)$$

где i – естественное вложение, а j определяется как $j(e_S) = e_{\lambda(S \setminus \{n\})}$ при $n \in S$ и $j(e_S) = 0$ иначе. Здесь мы для любой подпоследовательности T в $[n'']$ обозначаем через e_T'' произведение образующих e_k'' алгебры E'' , взятых в порядке T . Заметим, что хотя последовательность (2.3), очевидно, точна в членах E' , E'' и $ji = 0$, она может не быть точной в члене E .

ЛЕММА 2.12. (1) $i(I') \subset I$; (2) $j(I) \subset I''$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (1) вытекает непосредственно, так что будем доказывать (2). Пусть $S \subset \mathcal{A}$, причем $n \in S$. Положим $S' = S \setminus \{n\}$. Заметим, что $\cap \lambda(S') = \cap S$. Если $\cap S = \emptyset$, то $\cap \lambda(S') = \emptyset$, откуда $j(e_S) \in I''$. Если S является зависимым, то $\cap \lambda(S') \neq \emptyset$. Кроме того, функционал $\alpha_{H \cap H_n}$ является ограничением функционала α_H на H_n (для $H \in \mathcal{A}'$), так что $\lambda(S')$ также является зависимым. Тогда мы имеем $j(\partial e_S) = j(\partial e_{S'} e_n) = j((\partial e_{S'}) e_n \pm e_{S'}) = \partial(j(e_S)) \in I''$, что завершает доказательство.

СЛЕДСТВИЕ 2.13. Последовательность (2.3) порождает последовательность k -гомоморфизмов

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{j} A'' \longrightarrow 0. \quad (2.4)$$

Наша цель – доказать, что последовательность (2.4) является точной. Для этого мы будем использовать **nbc**-базисы и теорему 2.10.

ЛЕММА 2.14. Для вложения $i: E' \rightarrow E$ мы имеем $i(C') \subset C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это непосредственно вытекает из того факта, что гиперплоскость H_n является последней относительно порядка в $\mathcal{A}$.

ЛЕММА 2.15. Для эпиморфизма $j: E \rightarrow E''$ мы имеем $j(C) = C''$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что j отображает множество мономов e_S с $n \in S$ в канонический базис алгебры E'' . Теперь осталось заметить, что ввиду специального выбора упорядочиваний множество $S \subset [n]$ удовлетворяет условию $\cap S \neq \emptyset$ и является **nbc**-множеством тогда и только тогда, когда этим условиям удовлетворяет множество $\lambda(S \setminus \{n\})$. Отсюда вытекает требуемое утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.16. Последовательность

$$0 \longrightarrow C' \xrightarrow{i''} C \xrightarrow{j''} C'' \longrightarrow 0,$$

где i'' и j'' суть ограничения отображений i и j соответственно, является точной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу лемм 2.5 и 2.6 достаточно доказать, что $\ker(j'') \subset \text{im}(i'')$. Так как образ $i(E')$ порожден мономами e_S с $n \notin S$, достаточно доказать, что никакая ненулевая линейная комбинация мономов e_S с $n \in S$ не принадлежит $\ker(i) \cap C$. Так как $\lambda(S \setminus \{n\})$ является **nbc**-множеством при условии, что таковым является S , достаточно доказать, что λ инъективно на наборе из всех подмножеств $S \subset [n-1]$ таких, что $S \cup \{n\}$ есть **nbc**-множество. Действительно, предположим, что $\lambda(S_1) = \lambda(S_2)$, где $S_i \subset [n-1]$. Тогда найдутся такие элементы $m \in S_1$ и $p \in S_2$,

что $H_m \cap H_n = H_p \cap H_n$, т.е. множество $\{m, p, n\}$ зависимо. Не ограничивая общности, мы можем предположить, что $m < p$. Следовательно, множество $\{p, n\}$ является разорванным циклом. Итак, $S_2 \cup \{n\}$ не является **nbc**-множеством, что приводит к противоречию. Это завершает доказательство.

Теперь из предложения 2.16 и теоремы 2.10 вытекает основной результат этого пункта.

СЛЕДСТВИЕ 2.17. *Последовательность (2.4) точна.*

2.7. Центральнo-аффинная точная последовательность. В этом пункте мы строим другую точную последовательность, связывающую ОС-алгебры конфигурации $\mathcal{A}$ и ее конуса $c\mathcal{A}$.

Пусть $\mathcal{A} = (H_1, \dots, H_n)$. Напомним, что конус $c\mathcal{A}$ состоит из конусов cH_i над гиперплоскостями H_i ($i = 1, \dots, n$) и одной дополнительной гиперплоскости H_0 . Для того чтобы рассматривать ОС-алгебры этих двух конфигураций одновременно, мы должны ввести две внешние алгебры: E , порожденную элементами $e_1, \dots, e_n$, и cE , порожденную элементами $e_0, e_1, \dots, e_n$. Очевидно, что $E = cE/(e_0)$. Обозначим через E' подалгебру в cE , порожденную всеми разностями $e_i - e_j$, и обозначим через I' идеал в E' , порожденный элементами ∂e_S для всех зависимых подмножеств S множества $\{0, 1, \dots, n\}$. Из (2.1) вытекает, что $\partial e_S \in E'$, т.е. приведенное определение идеала I' действительно имеет смысл. Заметим, что отображение $e_i \mapsto e_i - e_0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) есть изоморфизм из E в E' .

Для любой фактор-алгебры B внешней алгебры по некоторому градуированному идеалу положим $B\langle e_0 \rangle = B \otimes_k \Lambda(e_0)$, где $\Lambda(e_0)$ есть внешняя алгебра с одной образующей e_0 степени 1, а тензорное произведение берется в категории косокоммутативных алгебр. Следующее предложение доказывается непосредственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.18. *ОС-идеал конфигурации $c\mathcal{A}$ есть $cI = I'(cE)$, а соответствующая ОС-алгебра $cA = cE/cI$ естественно изоморфна алгебре $(E'/I')\langle e_0 \rangle$. Более того, ОС-алгебра A конфигурации $\mathcal{A}$ есть $cE/(cI + (e_0)) \cong E'/I'$. В частности, $cA = A\langle e_0 \rangle$.*

Применяя это предложение к однородным компонентам, мы получаем следующую расщепляющуюся точную последовательность.

СЛЕДСТВИЕ 2.19. *Для любого p имеет место разложение*

$$cA_p = A_p \oplus A_{p-1},$$

где вложение первого слагаемого индуцировано тождественным отображением на мономах e_S ($S \subset [n]$), а вложение второго слагаемого индуцировано отображением $e_S \mapsto e_0 e_S$.

3. Гомологическая интерпретация ОС-алгебр

В этом разделе мы даем интерпретацию ОС-алгебры как локальных гомологий (Уитни) частично упорядоченного множества пересечений. Основной результат приведен в [51]. Мы вводим произведение на относительном атомном комплексе, которое

поднимает эту интерпретацию до уровня цепных комплексов и делает ее более прозрачной.

3.1. Относительный атомный комплекс решетки. Первая гомологическая интерпретация ОС-алгебры A конфигурации $\mathcal{A}$ происходит из гомологий частично упорядоченного множества пересечений $L = L(\mathcal{A})$. В этом пункте мы приведем обзор некоторых фактов о гомологиях решеток. Мы хотим изучать центральные и нецентральные конфигурации совместно. В связи с этим в этом пункте мы будем использовать букву L для обозначения произвольной верхней полурешетки. Этот класс частично упорядоченных множеств состоит из решеток и решеток с удаленными максимальными элементами. Единственные минимальный и максимальный элементы (если такие существуют) множества L будут обозначаться через $\emptyset$ и $\hat{1}$ соответственно. Множество атомов в L обозначается через $\mathcal{A} = \mathcal{A}(L)$, и мы положим $n = |\mathcal{A}|$. Фиксация произвольного линейного порядка на $\mathcal{A}$ позволяет отождествить $\mathcal{A}$ с $[n]$. Множество $\sigma \subset [n]$ называется *ограниченным*, если оно имеет верхнюю границу в L . В этом случае это множество также имеет точную верхнюю грань $\bigvee \sigma$ в L . В противном случае множество называется неограниченным.

Все гомологии рассматриваются с коэффициентами в фиксированном коммутативном кольце k . Как и выше, $H_*(L)$ обозначает гомологии флагового комплекса частично упорядоченного множества $L \setminus \{\emptyset, \hat{1}\}$. Существует несколько меньших комплексов, гомотопных флаговому комплексу. Мы упомянем лишь один из них, а именно, симплициальный атомный комплекс $\Delta = \Delta(L)$. Он представляет собой комплекс на множестве $[n]$, симплексами которого являются все подмножества σ , которые ограничены в $L \setminus \{\hat{1}\}$.

Еще более важным для нас является *относительный атомный комплекс* $D = D(L)$. Он представляет собой цепной комплекс, являющийся свободным модулем над коммутативным кольцом k с базисом, состоящим из всех ограниченных в L множеств $\sigma \subset [n]$. Градуировка на D сопоставляет множеству σ степень $|\sigma|$. Дифференциал d на D определяется следующим образом. Пусть $\sigma = \{i_1, \dots, i_p\}$ и $\sigma_j = \sigma \setminus \{i_j\}$, тогда

$$d(\sigma) = \sum_{\{j \in \sigma \mid \bigvee \sigma_j = \bigvee \sigma\}} (-1)^{j-1} \sigma_j.$$

Мы будем использовать следующие три свойства комплекса D .

1. D является прямой суммой комплексов $D(X)$ ($X \in L$), где $D(X)$ порожден подмножествами $\sigma \subset [n]$ такими, что $\bigvee \sigma = X$.

Доказательство этого свойства очевидно.

2. Для любого p и $X \in L$ группа $H_p(D(X))$ естественно изоморфна $\tilde{H}_{p-2}(L_X)$, где $L_X = \{Y \in L \mid Y \leq X\}$. Заметим, что L_X всегда является решеткой.

Действительно, рассмотрим точную последовательность цепных комплексов

$$0 \longrightarrow D'(X) \longrightarrow D''(X) \longrightarrow D(X)_{(+1)} \longrightarrow 0,$$

где $D'(X)$ есть цепной комплекс атомного комплекса решетки L_X , а $D''(X)$ – цепной комплекс симплекса, множеством вершин которого является $\mathcal{A}(L_X)$ (эта точная последовательность объясняет происхождение названия комплекса $D(X)$). Требуемое свойство вытекает из относительной длинной точной последовательности гомологий с использованием ацикличности комплекса $D''(X)$.

3. Если L_X является геометрической решеткой для любого $X \in L$, то $H_p(D(X)) = 0$ для всех $p \neq \operatorname{rk} X$.

Это вытекает непосредственно из свойства 2 и теоремы Фолькмана.

Последнее свойство позволяет нам в случае, когда L_X является геометрической решеткой, получать хорошую систему k -модульных образующих гомологий $H_*(D(X))$. Назовем множество $\sigma \subset [n]$ *независимым*, если оно ограничено и $\bigvee \sigma_i < \bigvee \sigma$ для любого $i \in \sigma$. Очевидно, что если $\mathcal{A}$ является конфигурацией гиперплоскостей и $L = L(\mathcal{A})$, то это определение совпадает с определением из раздела 1.

В общем случае каждое независимое множество атомов σ является циклом в D и, таким образом, определяет класс гомологий ζ_σ в $H_{|\sigma|}(D(X))$, где $X = \bigvee \sigma$. Кроме того, если L является геометрической решеткой, то $\operatorname{rk}(\bigvee \sigma) \leq |\sigma|$. Следовательно, в этом случае каждое множество атомов σ такое, что $\bigvee \sigma = X$ и $|\sigma| = \operatorname{rk} X$, является независимым. Отсюда вытекает, что $D_{\operatorname{rk} X}(X)$ состоит только из циклов, а значит, гомологии $H_*(D)$ порождены классами $\{\zeta_\sigma \mid \sigma \text{ независимо}\}$.

3.2. Мультипликативная структура в относительном атомном комплексе. Здесь мы рассматриваем только случай, когда каждая решетка L_X является геометрической. Мы вводим билинейную (над k) мультипликативную структуру в комплексе D , превращающую его в дифференциальную градуированную алгебру (ДГА). Эта структура определяется через произведение образующих. Пусть σ и τ – ограниченные множества атомов. Тогда положим

$$\sigma \cdot \tau = \begin{cases} 0, & \text{если } \sigma \cup \tau \text{ неограничено,} \\ 0, & \text{если } \operatorname{rk}(\bigvee(\sigma \cup \tau)) \neq \operatorname{rk}(\bigvee(\sigma)) + \operatorname{rk}(\bigvee(\tau)), \\ \varepsilon(\sigma, \tau) \sigma \cup \tau & \text{иначе,} \end{cases} \quad (3.1)$$

где $\varepsilon(\sigma, \tau)$ есть знак перестановки множества $\sigma \cup \tau$, которая ставит все элементы множества τ после элементов σ и сохраняет фиксированный порядок внутри самих этих множеств (это – так называемая *перетасовка* множеств σ и τ).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Умножение, определяемое формулами (3.1), превращает D в (коммутативную) ДГА.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить формулу Лейбница, так как другие свойства из определения ДГА проверяются непосредственно. Нам надо доказать, что

$$d(\sigma \cdot \tau) = d(\sigma) \cdot \tau + (-1)^{|\sigma|} \sigma \cdot d(\tau) \quad (3.2)$$

для любых ограниченных множеств атомов σ и τ . Рассмотрим три случая.

(i) Множество $\sigma \cup \tau$ неограничено. Тогда для любого σ_i такого, что $\bigvee \sigma_i = \bigvee \sigma$, множество $\sigma_i \cup \tau$ также неограничено, следовательно, $d(\sigma) \cdot \tau = 0$. Аналогично, $\sigma \cdot d(\tau) = 0$, т.е. обе части соотношения (3.2) обращаются в нуль.

(ii) Множество $\sigma \cup \tau$ ограничено и $\operatorname{rk}(\bigvee(\sigma \cup \tau)) \neq \operatorname{rk}(\bigvee(\sigma)) + \operatorname{rk}(\bigvee(\tau))$. Тогда $\sigma \cdot \tau = 0$. С другой стороны, для любого σ_i такого, что $\bigvee(\sigma_i) = \bigvee(\sigma)$, мы имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{rk}(\bigvee(\sigma_i \cup \tau)) &\leq \operatorname{rk} \bigvee((\sigma \cup \tau)) < \operatorname{rk}(\bigvee(\sigma)) + \operatorname{rk}(\bigvee(\tau)) \\ &= \operatorname{rk}(\bigvee(\sigma_i)) + \operatorname{rk}(\bigvee(\tau)), \end{aligned} \quad (3.3)$$

откуда $d(\sigma) \cdot \tau = 0$. Аналогично, $\sigma \cdot d(\tau) = 0$, и снова обе части соотношения (3.2) обращаются в нуль.

(iii) $\text{rk}(\bigvee(\sigma \cup \tau)) = \text{rk}(\bigvee(\sigma)) + \text{rk}(\bigvee(\tau))$. Вначале заметим, что в этом случае $\sigma \cap \tau = \emptyset$. Действительно, если найдется $p \in \sigma \cap \tau$, то мы получим

$$\text{rk}(\bigvee(\sigma \cup \tau)) \leq \text{rk}(\bigvee(\sigma)) + \text{rk}(\bigvee(\tau)) - 1 < \text{rk}(\bigvee(\sigma)) + \text{rk}(\bigvee(\tau)).$$

Далее, обе части формулы (3.2) являются комбинациями базисных элементов $\omega_i = (\sigma \cup \tau)_i$. Предположим, что i -й элемент множества ω есть j -й элемент множества σ (в частности, не лежит в τ). Тогда коэффициент при ω_i в левой части есть

$$(-1)^{i-1} \varepsilon(\sigma, \tau), \quad (3.4)$$

а коэффициент при ω_i в правой части есть

$$(-1)^{j-1} \varepsilon(\sigma_j, \tau). \quad (3.5)$$

Мы имеем

$$\varepsilon(\sigma, \tau) = \varepsilon(\sigma_i, \tau) (-1)^{i-j}, \quad (3.6)$$

что показывает, что коэффициенты при ω_i равны в этом случае. Случай, когда i -й элемент множества ω лежит в τ , рассматривается аналогично.

Из определения умножения мы получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Каждое независимое множество атомов σ является произведением своих одноэлементных подмножеств (взятых в естественном порядке). В частности, алгебра $H_*(D)$ порождена элементами $\zeta_i = \zeta_{\{i\}}$ ($i \in [n]$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что любое подмножество множества σ также является независимым. Поэтому мы можем применить индукцию по $|\sigma|$. Другими словами, достаточно доказать, что $\{i\}\sigma_1 = \sigma$, где i есть первый элемент множества σ . Но $\text{rk}(\bigvee \sigma) = |\sigma|$ и $\text{rk}(\bigvee \sigma_1) = |\sigma_1|$. Следовательно, $\text{rk}(\bigvee \sigma) = \text{rk}(\bigvee \{i\}) + \text{rk}(\bigvee \sigma_1)$, откуда и вытекает требуемый результат.

Легко видеть, что если множество атомов σ неограничено или “зависимо” (т.е. ограничено, но не независимо) то произведение всех его одноэлементных подмножеств (в любом порядке) есть 0.

3.3. Интерпретация ОС-алгебр. Здесь мы возвращаемся к случаю конфигураций, т.е. $\mathcal{A}$ есть конфигурация гиперплоскостей и $L = L(\mathcal{A})$ – ее частично упорядоченное множество пересечений. Напомним, что хотя L не является решеткой для нецентральных конфигураций $\mathcal{A}$, каждое множество L_X есть геометрическая решетка.

ТЕОРЕМА 3.3. *Соответствие $e_i \mapsto \zeta_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) порождает изоморфизм алгебр $A(\mathcal{A}) \rightarrow H_*(D)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через E (как и раньше) внешнюю алгебру, порожденную всеми элементами e_i . Так как элементы ζ_i являются классами гомологий степени 1, порождающими все $H_*(D)$, соответствие $e_i \mapsto \zeta_i$ определяет сюръективный гомоморфизм алгебр $\varphi: E \rightarrow H_*(D)$. Если подмножество $S \subset [n]$ является неограниченным или зависимым, то $\varphi(S) = 0$, так что для всех таких множеств мы имеем $e_S \in \ker \varphi$.

Теперь рассмотрим линейную комбинацию (над k) некоторых мономов e_S , соответствующих независимым множествам S . Такая комбинация принадлежит $\ker \varphi$ тогда и только тогда, когда она является суммой элементов, образы которых при гомоморфизме φ являются границами в некоторых комплексах $D(X)$. Такие элементы имеют вид ∂e_S , где множество S ограничено и $\operatorname{rk} \cap S = |S| - 1$. Последнее равенство означает, что $e_S = \pm e_T e_U$, где T независимо, а U – цикл. Запишем $\partial e_S = (\partial e_T) e_U \pm e_T (\partial e_U)$. Так как первое слагаемое есть сумма мономов e_P , соответствующих зависимым подмножествам P в $[n]$, оно лежит в $\ker \varphi$. Значит, и второе слагаемое лежит в $\ker \varphi$, и $\ker \varphi$ порождено над k мономами e_S с неограниченными S и элементами $e_T(\partial e_U)$, для которых U есть цикл. Это означает, что $\ker \varphi = I(\mathcal{A})$, тем самым завершая доказательство.

Теорема 3.3 позволяет получить комбинаторную формулу для ряда Гильберта $H(A, t) = \sum_{p \geq 0} \dim_R A_p t^p$ алгебры A .

СЛЕДСТВИЕ 3.4.

$$H(A, t) = \sum_{p \geq 0} \sum_{X \in L, \operatorname{rk} X = p} |\mu(X)| t^p,$$

где $\mu(X) = \mu(V, X)$ – значение функции Мёбиуса частично упорядоченного множества L на X .

Это вытекает непосредственно из теоремы 3.3, свойства 2 комплекса D и второй части теоремы Фолькмана (утверждающей, что для геометрической решетки L имеет место равенство $\dim_R H_*(L) = |\mu(\bar{0}, \bar{1})|$).

Правая часть равенства следствия 3.4 есть *многочлен Пуанкаре* частично упорядоченного множества L и обозначается $P(L, t)$.

ПРИМЕР 3.5. Пусть $\mathcal{A}$ – конфигурация в K^3 , задаваемая линейными функционалами $x, y, z, x - y, x - z, y - z$. Если $K = \mathbb{R}$, то $\mathcal{A}$ может быть получена из конфигурации гиперплоскостей отражений (зеркал) группы Коксетера типа A_3 факторизацией по общему пересечению этих гиперплоскостей. При $K = \mathbb{C}$ конфигурация $\mathcal{A}$ является первой нетривиальной в серии существенных конфигураций, дополнения которых представляют собой классифицирующие пространства для групп кос. По этой причине такие конфигурации называются *конфигурациями кос*.

Решетка пересечений L конфигурации $\mathcal{A}$ имеет 6 атомов 1, 2, 3, 4, 5, 6, соответствующих гиперплоскостям в том порядке, в котором они записаны. Элементы ранга два можно отождествлять с множествами предшествующих им атомов, т.е. $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{2, 3, 6\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{1, 6\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 4\}$. Функция Мёбиуса вычисляется просто. В частности, мы получаем

$$H(A, t) = P(L, t) = 1 + 6t + 11t^2 + 6t^3.$$

Интересно отметить, что $H(A, t) = (1 + t)(1 + 2t)(1 + 3t)$. Это свойство имеет далеко идущие обобщения, которые можно найти в [51; раздел 4.6].

4. Алгебра когомологий дополнения конфигурации гиперплоскостей

Здесь мы приводим другую гомологическую интерпретацию алгебры $A(\mathcal{A})$ в случае, когда $\mathcal{A}$ является комплексной конфигурацией. Эта интерпретация является комбинацией знаменитых теорем Брискорна и Орлика–Соломона [11], [50]. Основное утверждение заключается в том, что алгебра $A(\mathcal{A})$ естественно изоморфна кольцу когомологий дополнения M конфигурации $\mathcal{A}$. Мы приводим наиболее короткое известное нам доказательство этого утверждения.

В этом разделе мы предполагаем, что $K = \mathbb{C}$ и $k = \mathbb{Z}$. Все когомологии рассматриваются с коэффициентами в $\mathbb{Z}$.

4.1. Топологическая индукция. Пусть $(\mathcal{A}', \mathcal{A}, \mathcal{A}'')$ – тройка удаления-ограничения (см. п. 2.6), определяемая гиперплоскостью $H_n \in \mathcal{A}$. Обозначим соответствующие дополнения через M' , M и M'' . Заметим, что $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ являются конфигурациями в V , а $\mathcal{A}''$ – конфигурацией в H_n , следовательно, $M'' = H_n \setminus \bigcup_{i \neq n} (H_i \cap H_n)$. Целью этого пункта является получение точной последовательности, связывающей когомологии дополнений M' , M и M'' .

Так как $M'' = M' \cap H_n$, можно рассмотреть трубчатую окрестность N дополнения M'' в M' и расслоение $N \rightarrow M''$ со слоем, гомеоморфным $\mathbb{C}$. Пространство $N_0 = N \setminus M''$ расслаивается над M'' со слоем $\mathbb{C}^*$. Так как оба этих расслоения являются ограничениями тривиальных расслоений над H_n , они также являются тривиальными, т.е. мы имеем $(N, N_0) = M'' \times (\mathbb{C}, \mathbb{C}^*)$, с точностью до гомеоморфизма. Таким образом, $H^*(N, N_0) = H^*(M'') \otimes H^*(\mathbb{C}, \mathbb{C}^*)$. Обозначим через t образующую группы $H^2(\mathbb{C}, \mathbb{C}^*) \approx \mathbb{Z}$, соответствующую естественной ориентации пространства $\mathbb{C}$. Тогда умножение (слева) на t определяет изоморфизм групп

$$\tau: H^*(M'') \rightarrow H^*(N, N_0)(2), \quad (4.1)$$

увеличивающий градуировку на 2. (Это есть не что иное, как изоморфизм Тома в нашей простой ситуации.)

Так как $M = M' \setminus M''$, мы можем рассмотреть вырезание множества $U = M' \setminus N$ из (M', M) . Используя изоморфизм вырезания $\alpha: H^*(M', M) \rightarrow H^*(N, N_0)$, мы получаем из (4.1) следующий изоморфизм групп:

$$\alpha^{-1}\tau: H^*(M'') \rightarrow H^*(M', M)(2). \quad (4.2)$$

Подставляя изоморфизм (4.2) в точную последовательность пары (M, M') , мы получаем точную последовательность

$$\dots \rightarrow H^p(M') \xrightarrow{i^*} H^p(M) \xrightarrow{\tau^{-1}\alpha\delta} H^{p-1}(M'') \xrightarrow{j^*} H^{p+1}(M') \rightarrow \dots, \quad (4.3)$$

где $i: M \rightarrow M'$ и $j: (M', \emptyset) \rightarrow (M', M)$ суть естественные вложения, а $\delta: H^p(M) \rightarrow H^{p+1}(M', M)$ – связывающий гомоморфизм. Далее на протяжении этого раздела мы положим $\delta' = \tau^{-1}\alpha\delta$.

4.2. Основные классы когомологий. Пусть H – гиперплоскость в V , тогда $V \setminus H$ гомотопически эквивалентно $\mathbb{C}^*$ (при проекции вдоль H). Следовательно, группа $H^1(V \setminus H)$ порождается каноническим элементом β_H (соответствующим естественной ориентации в $\mathbb{C}^*$). Пусть $H = H_m \in \mathcal{A}$ и $i_{H_m}: M \rightarrow V \setminus H_m$ – естественные

вложения; тогда положим $\beta_m = i_{H_m}^*(\beta_{H_m}) \in H^1(M)$. Мы назовем элементы β_m *основными классами когомологий* в $H^*(M)$. Подставляя вместо $\mathcal{A}$ конфигурации $\mathcal{A}'$ и $\mathcal{A}''$, мы получаем основные классы когомологий $\beta'_m \in H^1(M')$ и $\beta''_m \in H^1(M'')$ ($m = 1, \dots, n-1$).

Следующие свойства (для любых p и $m = 1, \dots, n-1$) немедленно вытекают из естественности основных классов когомологий.

- (i) $i^*(\beta'_m) = \beta_m$.
- (ii) $\delta(\beta_m) = 0$.
- (iii) $\delta(a\beta_m) = \delta(a)\beta'_m$ для любого $a \in H^*(M)$.
- (iv) $\tau^{-1}(\alpha(\beta'_m)t) = \beta''_m$.
- (v) $\alpha(\delta(\beta_n)) = t$.

Из свойств (i)–(v) сразу вытекает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *В последовательности (4.3) мы имеем*

$$\begin{aligned} i^*(\beta'_{m_1} \cdots \beta'_{m_p}) &= \beta_{m_1} \cdots \beta_{m_p}, \\ \delta'(\beta_{m_1} \cdots \beta_{m_p} \beta_n) &= \beta''_{m_1} \cdots \beta''_{m_p} \end{aligned}$$

и

$$\delta'(\beta_{m_1} \cdots \beta_{m_p}) = 0$$

для любых $1 \leq m_1, \dots, m_p \leq n-1$.

Для того чтобы описать другие свойства произведений классов β_i , удобно представить эти классы дифференциальными формами (используя теорему де Рама). Каноническая образующая группы $H^1(\mathbb{C}^*)$ может быть представлена формой $\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{dz}{z}$. Класс β_m представляется прообразом этой формы на M , т.е. формой

$$\omega_m = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{d\alpha_m}{\alpha_m},$$

где α_m есть (как и выше) линейный многочлен на V , множество нулей которого совпадает с H_m .

Теперь для любого $S = \{i_1, \dots, i_p\} \subset [n]$ ($i_1 < \dots < i_p$) положим $\omega_S = \omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p}$ и $\partial\omega_S = \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} \omega_{S_j}$, где $S_j = S \setminus \{i_j\}$. Тогда имеет место следующее утверждение.

- ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2.** (i) *Если $\cap S = \emptyset$, то $\omega_S = 0$.*
(ii) *Если множество S зависимо, то $\partial\omega_S = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть $\cap S = \emptyset$, тогда существуют такие $c_j \in \mathbb{C}$ ($j = 1, \dots, p$), что $\sum_j c_j \alpha_{i_j} = 1$. Дифференцируя, мы получаем $\sum_j c_j d\alpha_{i_j} = 0$, откуда $\omega_S = 0$.

(ii) Пусть теперь множество S зависимо. Не ограничивая общности, мы можем предположить, что $\alpha_{i_p} = \sum_{j < p} c_j \alpha_{i_j}$ для некоторых $c_j \in \mathbb{C}$. Следовательно,

$$\omega_{i_p} = \sum_{j < p} \frac{c_j \alpha_{i_j}}{\alpha_{i_p}} \omega_{i_j}.$$

Отсюда мы получаем

$$\begin{aligned}\partial\omega_S &= \frac{1}{\alpha_{i_p}} \left(\sum_{j < p} (-1)^{j-1} \omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{\omega}_{i_j} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_{p-1}} \right) \wedge c_j \alpha_{i_j} \omega_{i_j} + (-1)^{p-1} \omega_{S_p} \\ &= (-1)^p \left[\frac{1}{\alpha_{i_p}} \sum_{j < p} c_j \alpha_{i_j} - 1 \right] \omega_{S_p} = 0,\end{aligned}$$

что завершает доказательство.

Применяя отображение де Рама к соотношениям между формами из предложения 4.2, мы получим аналогичные соотношения для классов когомологий. Для каждого множества S положим $\beta_S = \beta_{i_1} \cdots \beta_{i_p}$ и определим $\partial\beta_S$ аналогично $\partial\omega_S$.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. (i) Если $\cap S = \emptyset$, то $\beta_S = 0$.

(ii) Если S зависимо, то $\partial\beta_S = 0$.

4.3. Когомологии дополнения M . Так как кольцо $H^*(M)$ является коммутативным в градуированном смысле и $\beta_m \in H^1(M)$ ($m = 1, \dots, n$), соответствие $e_m \mapsto \beta_m$ определяет кольцевой гомоморфизм $\varphi: E \rightarrow H^*(M)$.

ТЕОРЕМА 4.4. Гомоморфизм φ индуцирует изоморфизм $\psi: A \rightarrow H^*(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что из следствия 4.3 вытекает, что $\varphi(I) = 0$, так что φ индуцирует кольцевой гомоморфизм $\psi: A \rightarrow H^*(M)$. Для доказательства того, что ψ является изоморфизмом, мы используем индукцию по $|\mathcal{A}|$. Если $\mathcal{A} = \emptyset$, то оба кольца равны $\mathbb{Z}$ и утверждение тривиально. Пусть $\mathcal{A} \neq \emptyset$, и рассмотрим тройку удаления-ограничения $(\mathcal{A}', \mathcal{A}, \mathcal{A}'')$, определяемую гиперплоскостью H_n . Используя для ОС-алгебр этих конфигураций обозначения из п. 2.6, мы имеем следующую диаграмму для любого p :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \psi' & & \downarrow \psi & & \downarrow \psi'' & & \\ 0 & \longrightarrow & H^p(M') & \xrightarrow{i^*} & H^p(M) & \xrightarrow{\delta'} & H^{p+1}(M'') & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (4.4)$$

Из предложения 4.1 вытекает, что эта диаграмма коммутативна. По предположению индукции отображения ψ' и ψ'' являются изоморфизмами. Мы также знаем из (2.4), что первая строка является точной. Отсюда немедленно следует, что отображение δ' сюръективно для любого p , а значит, i^* инъективно. Это означает, что вторая строка также точна, и 5-лемма показывает, что ψ есть изоморфизм.

Следующие утверждения вытекают непосредственно.

СЛЕДСТВИЕ 4.5. Гомоморфизм де Рама определяет изоморфизм между кольцом дифференциальных форм, порожденным формами ω_i ($i = 1, \dots, n$), и кольцом $H^*(M)$.

СЛЕДСТВИЕ 4.6. Многочлены Пуанкаре для M и для L совпадают (см. следствие 3.4).

5. ОС-алгебры как модули над внешними алгебрами

В этом разделе мы изучаем ОС-алгебру A как модуль конечного типа над внешней алгеброй E (модульная структура задается канонической проекцией $\pi: E \rightarrow A$). Мы вычисляем некоторые инварианты этого модуля и определяем модуль над кольцом многочленов, сопоставляемый A при соответствии Бернштейна–Гельфанда–Гельфанда (БГГ-соответствии). ОС-алгебра впервые явно рассматривалась как модуль над внешней алгеброй в [23], где можно найти основные результаты пп. 5.3–5.5. Основные результаты п. 5.2 были получены в [20].

5.1. Двойственные модули. Пусть A – ОС-алгебра, рассматриваемая как модуль над внешней алгеброй E . Вначале заметим, что в соответствии с предложением 2.18 структура ОС-алгебры произвольной конфигурации $\mathcal{A}$ определяется структурой ОС-алгебры конуса над $\mathcal{A}$. Следовательно, мы можем ограничиться рассмотрением *центральных* и, как правило, *существенных* конфигураций.

Для изучения E -модуля A удобно использовать двойственный модуль A^* . Ниже мы обсудим соответствующие определения и опишем градуировку на A^* .

Согласно общему определению двойственного модуля над кольцом мы положим

$$A^* = \text{Hom}_E(A, E).$$

В соответствии с обычным соглашением о степени однородного гомоморфизма градуированных модулей степень отображения $\varphi: A \rightarrow E$ есть d , если $\varphi(A_p) \subset E_{p+d}$ для любого p .

Любой гомоморфизм $\varphi: A \rightarrow E$ определяется лишь значением $\varphi(1)$, и необходимым и достаточным условием на $\varphi(1)$ является условие $I\varphi(1) = 0$. Множество таких элементов образует идеал I^0 , который известен как аннулятор идеала I . Очевидно, что соответствие $\varphi \mapsto \varphi(1)$ определяет изоморфизм градуированных E -модулей A^* и I^0 (в частности, A^* градуирован неотрицательными степенями). Более того, так как базис в E_1 фиксирован, линейное пространство E_n можно отождествить с k_n , т.е. с тривиальным E -модулем, градуировка которого сконцентрирована в размерности n . Тогда умножение в E определяет для любого p ($p = 1, \dots, n$) невырожденное спаривание $E_p \times E_{n-p} \rightarrow k_n$. Эти спаривания, в свою очередь, определяют изоморфизм E -модулей $\bar{A} = \text{Hom}_k(A, k_n)$ и I^0 , который отправляет линейные отображения степени p в элементы степени $n - p$. В частности, мы имеем $\dim I_p^0 = \dim A_{n-p}$ и $(I^0)^0 = I$. Заметим, что в силу нашего определения градуировок имеет место следующий изоморфизм градуированных E -модулей:

$$A^* \approx I^0 \approx \bar{A}.$$

Отсюда, в частности, вытекает следующее равенство для рядов Гильберта:

$$H(A^*, t) = t^n H(A, 1/t).$$

5.2. Чистые идеалы. Как и ранее, зафиксируем линейный порядок на $\mathcal{A}$ и будем обозначать элементы конфигурации $\mathcal{A}$ через H_i , $i \in [n]$. Напомним, что элемент $a \in E$ называется *чистым* (разложимым), если он представляется в виде произведения элементов степени 1. За исключением случая $a \in E_1$ линейные сомножители элемента a определяются неоднозначно. Назовем идеал J алгебры E *чистым*, если

он порождается множеством чистых элементов. В частности, ОС-идеал I является чистым.

В общем случае аннулятор J^0 чистого идеала J не обязан быть чистым. Мы приведем соответствующий пример в следующем пункте. Сейчас нашей целью является доказательство того факта, что аннулятор I^0 является чистым, и нахождение его чистых образующих.

Обобщая определение 2.64 из [51], мы скажем, что разбиение Π множества $[n]$ является p -независимым для некоторого p , $3 \leq p \leq \ell + 1$, если любое множество из не более чем p элементов, лежащих в различных элементах разбиения Π , независимо. Ясно, что $(\ell + 1)$ -независимые разбиения могут иметь не более чем ℓ элементов. Следуя [51], мы называем $(\ell + 1)$ -независимые разбиения *независимыми*.

Для любого разбиения Π множества $[n]$ и любого $P \in \Pi$ обозначим через i_P наименьший элемент в P и положим

$$z(\Pi) = \prod_{P \in \Pi} \prod_{i \in P \setminus \{i_P\}} (e_i - e_{i_P}). \quad (5.1)$$

Здесь (и ниже) мы используем символ $\prod$ для обозначения произведения сомножителей, взятых в индуцированном из $[n]$ порядке на Π и P , $P \in \Pi$. Очевидно, что $z(\Pi) \in E_{n-|\Pi|}$.

Теперь обозначим через $J(p)$ идеал в E , порожденный объединением $\bigcup_{j \leq p} I_j$. В частности, $J(\ell) = I$. Заметим, что каждый идеал $J(p)$ является однородным.

ЛЕММА 5.1. *Если разбиение Π множества $[n]$ является p -независимым, то*

$$z(\Pi) \in (J(p-1)^0)_{n-|\Pi|}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S \subset [n]$ – зависимое множество и $|S| \leq p$. Достаточно доказать, что $z = z(\Pi)$ аннулирует элемент ∂e_S . Так как разбиение Π является p -независимым, найдется по крайней мере один элемент $P \in \Pi$ такой, что $P \cap S$ содержит хотя бы два элемента, скажем, r и s . Тогда оба элемента z и ∂e_S делятся на $e_r - e_s$. Следовательно, $z \partial e_S = 0$, что завершает доказательство.

На время мы ограничимся рассмотрением ОС-идеала $I = J(\ell)$. Оказывается, достаточно рассматривать лишь независимые разбиения следующего специального вида. Пусть $F = (X_0 = V < X_1 < X_2 < \dots < X_\ell)$ – максимальный флаг из элементов в L . Поставим в соответствие каждому элементу X_p подмножество $[n]_p = [n]_{X_p}$ (см. п. 2.4) и положим $S_i = [n]_i \setminus [n]_{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots, \ell$). Далее, обозначим через $\Pi(F)$ разбиение $\{S_1, \dots, S_\ell\}$ множества $[n]$.

ЛЕММА 5.2. *Разбиение $\Pi(F)$ является независимым для любого максимального флага F .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В предыдущих обозначениях для F зафиксируем $i_j \in S_j$ для каждого j , $1 \leq j \leq \ell$. Достаточно доказать, что множество $T_p = \{i_1, \dots, i_p\}$ независимо для любого p , $1 \leq p \leq \ell$. Предположим, что T_p является независимым для некоторых p и выберем минимальное такое p . Тогда пересечение соответствующих гиперплоскостей есть X_{p-1} , что противоречит выбору i_p . Полученное противоречие доказывает утверждение.

Для упрощения обозначений положим $z(F) = z(\Pi(F))$ для любого максимального флага F . Две предыдущих леммы показывают, что $z(F) \in I^0$. Теперь мы еще больше сузим класс рассматриваемых разбиений. Напомним, что независимое множество $T \subset [n]$ называется **nbс**-множеством, если оно не содержит разорванных циклов. Для каждого p обозначим через **nbс** $_p$ набор всех **nbс**-подмножеств в $[n]$ мощности p . Если $T = \{i_1, \dots, i_p\}$, где $i_1 < i_2 < \dots < i_p$, то $T \in \mathbf{nbс}_p$ тогда и только тогда, когда $i_r = \min \text{cl}(\{i_r, \dots, i_p\})$ для любого r , $1 \leq r \leq p$. Здесь для $S \subset [n]$ мы обозначаем через $\text{cl}(S)$ наименьшее замкнутое множество $[n]_X$ ($X \in L$), содержащее S (см. п. 2.4). Мы также будем писать $X = \bigwedge S$.

Теперь зафиксируем $T = (i_1 < i_2 < \dots < i_\ell) \in \mathbf{nbс}_\ell$ и определим максимальный флаг $F(T) = (X_0 = V < X_1 < \dots < X_\ell)$, где $X_p = \bigwedge(\{i_{\ell-p+1}, \dots, i_\ell\})$. Для упрощения обозначений положим $z(T) = z(F(T))$.

ЛЕММА 5.3. *Для любого p зафиксируем лексикографический порядок на подмножествах мощности p в $[n]$ и соответствующий порядок мономов в E_p . Тогда для любого $T \in \mathbf{nbс}_\ell$ начальный моном элемента $z(T)$ есть $e_{\overline{T}}$, где $\overline{T} = [n] \setminus T$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\Pi = \Pi(F(T))$. По определению элемента $z(T)$ и порядка мономов начальный моном для $z(T)$ есть произведение начальных мономов элементов $z_P(T) = \prod_{i \in P \setminus \{i_P\}} (e_i - e_{i_P})$, по одному для каждого $P \in \Pi$. По определению i_P начальный моном в $z_P(T)$ есть $e_{P \setminus \{i_P\}}$. Так как T является **nbс**-множеством, мы имеем $T = \{i_P \mid P \in \Pi\}$, что завершает доказательство.

Положим $Z = \{z(T) \mid T \in \mathbf{nbс}_\ell\}$. Из предыдущей леммы следует основной результат этого пункта.

ТЕОРЕМА 5.4. *Множество Z является базисом Гребнера для I^0 (относительно градуированно-лексикографического порядка мономов).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для того чтобы доказать утверждение, мы должны показать, что $\text{In}(I^0) = \langle \text{In}(Z) \rangle$ (см. п. 2.5). Так как $Z \subset I^0$, достаточно доказать следующее вложение:

$$\text{In}(I^0) \subset \langle \text{In}(Z) \rangle, \quad (5.2)$$

так как обратное вложение очевидно. Также ясно, что

$$\text{In}(I^0) \subset \overline{\text{In}(I)}, \quad (5.3)$$

где $\overline{\text{In}(I)}$ – множество мономов, аннулирующих каждый элемент из $\text{In}(I)$. Напомним, что множество $\text{In}(I)$ состоит из всех мономов, делящихся на некоторые из мономов e_S , в которых S является разорванным циклом. Следовательно, $\overline{\text{In}(I)}$ состоит из мономов e_T , соответствующих множествам T , трансверсальным всем разорванным циклам, т.е. пересекающим каждый разорванный цикл нетривиально (мы будем называть такое множество **tbс**-множеством). Легко видеть, что набор **tbс**-множеств состоит из дополнений к **nbс**-множествам. В частности, минимальные относительно включения **tbс**-множества содержат $n - \ell$ элементов. Итак,

$$\overline{\text{In}(I)} = \langle \text{In}(Z) \rangle. \quad (5.4)$$

Теперь (5.2) вытекает из (5.3) и (5.4), что завершает доказательство.

СЛЕДСТВИЕ 5.5. Множество Z порождает идеал I^0 . В частности, I^0 является чистым идеалом, порожденным элементами размерности $n - \ell$.

Первое утверждение является стандартным в теории базисов Гребнера и может быть доказано индукцией по начальным мономам элементов из I^0 . Отсюда вытекает второе утверждение.

Из следствия 5.5 вытекает один результат для самого ОС-идеала, который может представлять самостоятельный интерес. Для любого $T \in \mathbf{nbc}_\ell$ обозначим через I_T линейный (т.е. порожденный элементами размерности 1) идеал, порожденный сомножителями элемента $z(T)$ (например, элементами $(e_i - e_{i_P})$ для всех $P \in \Pi(T)$ и $i \in P \setminus \{i_P\}$). Как частный случай известного свойства внешних алгебр мы получаем, что $(I_T)^0 = Ez(T)$, где в правой части стоит главный идеал, порожденный элементом $z(T)$.

СЛЕДСТВИЕ 5.6. ОС-идеал I является пересечением линейных идеалов. Более подробно,

$$I = \bigcap_{T \in \mathbf{nbc}_\ell} I_T.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из следствия 5.5 вытекает, что $I^0 = \sum_T Ez(T)$. Отсюда находим, что

$$I = (I^0)^0 = \left(\sum_T Ez(T) \right)^0 = \bigcap_T (Ez(T))^0 = \bigcap_T I_T.$$

Теорема 5.4 позволяет находить базис для каждого $(I^0)_p$ (как свободного k -модуля). Для этого нам нужно определить элементы $z(T) \in I^0$, соответствующие множествам $T \in \mathbf{nbc}_p$ ($1 \leq p \leq \ell$). Флаг $F(T) = (X_0 < X_1 < \dots < X_p)$ определяется таким же образом, как и для $p = \ell$, однако более не является максимальным. Точнее, его максимальный элемент X_p не является максимальным элементом в L . Множества $S_i = [n]_{X_i} \setminus [n]_{X_{i-1}}$ ($i = 1, \dots, p$) задают разбиение $\Pi = \Pi(F(T))$ множества $[n]_p = [n]_{X_p}$, которое независимо. Обобщим определение (5.1) элемента z , полагая

$$\overline{z(T)} = z(\Pi)e_{[n] \setminus [n]_p}. \quad (5.5)$$

Заметим, что если $p = \ell$, то $\overline{z(T)} = z(T)$.

Свойства элементов $z(T)$, для которых $|T| = \ell$, могут быть обобщены на случай произвольного p .

ЛЕММА 5.7. Для любого $\mathbf{nbc}$ -множества T начальный моном элемента $\overline{z(T)}$ есть $e_{\overline{T}}$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 5.3.

ЛЕММА 5.8. Для любого $T \in \mathbf{nbc}_p$ мы имеем

$$\overline{z(T)} \in (I^0)_{n-p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дополним $F(T)$ до максимального флага $\tilde{F} = (X_0 < \dots < X_p < X_{p+1} < \dots < X_\ell)$. В силу лемм 5.2 и 5.1 $z(\tilde{F}) \in I^0$. Теперь мы несколько упростим обозначения. Вначале расширим определение множеств S_i на случаи $i = p+1, \dots, \ell$. Далее положим $e(m) = e_{j_m}$, где $j_m = i_{S_m}$ ($m = p+1, p+2, \dots, \ell$). Непосредственная проверка показывает, что $\overline{z(T)} = \pm z(\tilde{F})e(p+1)e(p+2)\dots e(\ell)$. Итак, $\overline{z(T)} \in I^0$, что завершает доказательство.

Обозначим через Z_p множество элементов $\overline{z(T)}$, соответствующих всем $T \in \mathbf{nbc}_p$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.9. Для любого p множество Z_p образует базис для $(I^0)_{n-p}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как k -модуль $(I^0)_{n-p}$ изоморфен $(E/I)_p$, мы видим, что множество Z_p имеет правильное число элементов. Таким образом, нам надо лишь доказать, что множество Z_p порождает модуль $(I^0)_{n-p}$.

Пусть $e \in (I^0)_{n-p} \setminus \{0\}$. Из теоремы 5.4 вытекает, что $\text{In}(e) = \pm e s e_{\overline{T}}$ для $T \in \mathbf{nbc}_\ell$. Так как $U = \overline{[n]} \setminus (S \cup \overline{T})$ также является $\mathbf{nbc}$ -множеством, мы можем рассмотреть элемент $z(U)$. Так как $\text{In}(z(U)) = e_U$, мы имеем $e + c\overline{z(U)} \in (I^0)_{n-p}$ для некоторого $c \in k$ и $\text{In}(e + c\overline{z(U)}) < \text{In}(e)$. Теперь доказательство может быть завершено индукцией по $\text{In}(e)$.

ПРИМЕР 5.10. Рассмотрим пример 3.5 и будем использовать тот же самый порядок гиперплоскостей. Тогда

$$\begin{aligned} Z = Z_3 = \{ & (e_6 - e_2)(e_4 - e_1)(e_5 - e_1), (e_3 - e_1)(e_4 - e_1)(e_5 - e_1), \\ & (e_3 - e_2)(e_4 - e_1)(e_5 - e_1), (e_3 - e_2)(e_5 - e_2)(e_6 - e_2), \\ & (e_6 - e_4)(e_2 - e_1)(e_3 - e_1), (e_5 - e_4)(e_2 - e_1)(e_3 - e_1) \}. \end{aligned}$$

Кроме того, $|Z_4| = \dim A_2 = 11$, $|Z_5| = \dim A_1 = 6$ и $|Z_6| = \dim A_0 = 1$ (Z_6 состоит из одного монома $e_1 \dots e_6$). Например, для множеств $\{1, 2\}, \{4, 6\} \in \mathbf{nbc}_2$ мы имеем $z(\{1, 2\}) = (e_4 - e_1)e_3e_5e_6$ и $z(\{4, 6\}) = (e_5 - e_4)e_1e_2e_3$.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Фактически, доказательство предложения 5.9 также содержит доказательство того факта, что Z_p есть базис Гребнера идеала $\bigcup_{r \geq n-p} (I^0)_r$.

2. Несложно доказать, что соответствие $F \mapsto \overline{z(F)}$ индуцирует отображение $F\ell_p \rightarrow (I^0)_{n-p}$, где $F\ell$ – градуированный флаг-модуль, введенный Шехтманом и Варченко в [57]. Тогда предложение 5.9 можно вывести из результатов работы [57].

5.3. Минимальная свободная резольвента идеала I^0 . В этом пункте мы снова предполагаем, что конфигурация $\mathcal{A}$ является центральной, хотя основные результаты легко обобщаются на случай произвольной конфигурации при помощи предложения 2.18. Кроме того, до конца этого раздела мы предполагаем, что k – поле. Как только множество образующих идеала I^0 известно, следующей задачей является построение минимальной свободной резольвенты для I^0 (как E -модуля). Хотя эта задача представляется утомительной (см. [20]), мы можем доказать важное свойство этой резольвенты.

Под свободной резольвентой градуированного E -модуля M мы всегда будем иметь в виду его градуированную свободную резольвенту, т.е. точную последовательность

$$\dots \longrightarrow R_2 \longrightarrow R_1 \longrightarrow R_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

в которой все R_i являются свободными градуированными E -модулями, а все отображения являются однородными степени 0. Такая резольвента называется *линейной*, если модуль M порожден элементами одной степени, скажем, s , а каждый модуль R_i порожден элементами степени $s + i$. Последнее условие эквивалентно тому, что каждое отображение $R_p \rightarrow R_{p-1}$ в резольвенте задается матрицей, все элементы которой лежат в E_1 (что объясняет термин “линейная”). Заметим, что любая линейная резольвента автоматически является минимальной.

ТЕОРЕМА 5.11. *Минимальная свободная резольвента идеала I^0 является линейной. Числа Бетти идеала I^0 , т.е. ранги β_i компонент резольвенты, могут быть вычислены по формуле*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i t^i = (-t)^\ell \frac{H(A, -1/t)}{(1-t)^n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как мы уже знаем из следствия 5.5, идеал I^0 порожден элементами степени $n - \ell$.

Как и до этого, мы будем использовать градуированно-лексикографический порядок на мономах из E и обозначим через $\text{In}(I)$ начальный идеал в I , т.е. идеал, порожденный мономами e_S , где S пробегает все разорванные циклы. Как вытекает из общей теории базисов Гребнера, $\text{In}(I)$ является плоским вырождением идеала I . В нашей ситуации мы можем дать явное описание этого вырождения. Пусть q – некоторая переменная, тогда рассмотрим алгебру $\tilde{E} = k[q] \otimes_k E = E[q]$ и ее идеал $I(q)$, порожденный элементами

$$\partial_q e_S = \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} e_{S_j} q^{i_j - i_1}$$

для всех зависимых подмножеств $S = \{i_1 < i_2 < \dots < i_p\}$ множества $[n]$ (напомним, что $S_j = S \setminus \{i_j\}$). Тогда для любого $\lambda \in k$ мы имеем отождествление $\tilde{E}/(q - \lambda) = E$. Если $\lambda \neq 0$, то $I(\lambda) = (I(q) + (q - \lambda))/(q - \lambda)$ есть идеал в E , изоморфный I при линейном автоморфизме алгебры E , отображающем e_i в $\lambda^i e_i$. Иначе $I(0) = (I(q) + (q))/(q) = \text{In}(I)$. Заметим, что алгебра $\tilde{E}/I(q)$ является свободной (**нбс**-мономы образуют базис), следовательно, она является плоской над $k[q]$. Аналогично, $k[q]$ -модуль $\overline{A(q)} = \text{Hom}_{k[q]}(\tilde{E}/I(q), k[q])$ является плоским, а $\overline{A(\lambda)} = \overline{A(q)}/(q - \lambda)\overline{A(q)}$ изоморфно $\overline{A}$ при $\lambda \neq 0$, в то время как $\overline{A(0)} \cong \text{Hom}_k(E/\text{In}(I), k)$.

Так как E -модули A и I^0 двойственны друг другу, а E является горнштейновым кольцом, двойственный комплекс к минимальной свободной резольвенте идеала I^0 является минимальной инъективной резольвентой для A . Кроме того, если свободный модуль порожден элементами степени r , то его двойственный модуль порожден элементами степени $-r$. Следовательно, первое утверждение теоремы эквивалентно тому, что $\text{Tor}_p^E(A, k)_m = 0$ при $p > 0$ и $m \neq -n + \ell - p$. (Здесь Tor_p^E есть p -й производный функтор для тензорного произведения в категории *градуированных E -модулей*.) Так как эти линейные пространства являются гомологиями комплекса линейных пространств, обращение любого из них в нуль является открытым условием в вышеописанном плоском семействе. Следовательно, достаточно доказать, что минимальная инъективная резольвента особого слоя этого семейства, т.е. модуля $A(0) = E/\text{In}(I)$,

линейна. Это, в свою очередь, эквивалентно линейности минимальной свободной резольвенты идеала $(\operatorname{In}(I))^0$, который мы обозначим через J .

Идеал J порожден мономами, носители которых являются **tbc**-множествами длины $n - \ell$, т.е. дополнениями к элементам из **nbc** $_{\ell}$. Обозначим через ${}_S J$ идеал в $S = k[e_1, \dots, e_n]$, порожденный теми же самыми мономами (без квадратов). В соответствии с результатами из [5] (см. также [23; раздел 5]), минимальная свободная резольвента идеала J является линейной тогда и только тогда, когда то же самое верно для ${}_S J$.

По определению идеала J идеал ${}_S J$ является идеалом Стенли–Райснера симплициального комплекса Δ на множестве $[n]$, симплексами которого являются множества, не трансверсальные разорванным циклам, т.е. те, дополнения которых содержат разорванные циклы. Другими словами, Δ является симплициальным комплексом, двойственным по Александру к комплексу Δ' на $[n]$, симплексами которого являются в точности **nbc**-множества. Этот последний комплекс достаточно хорошо изучен. В частности, известно (см. [55]), что Δ' является лучшим⁵, что является достаточным условием для того, чтобы быть комплексом Коэна–Маколея (см. [62]). С другой стороны, в силу результата из [21] свободная резольвента идеала Стенли–Райснера симплициального комплекса линейна тогда и только тогда, когда его двойственный по Александру комплекс является комплексом Коэна–Маколея. Применяя этот результат к идеалу ${}_S J$, мы завершаем доказательство первого утверждения.

Для доказательства второго утверждения запишем минимальную резольвенту в виде

$$\dots \rightarrow E^{\beta-2}(\ell - n - 2) \rightarrow E^{\beta_1}(\ell - n - 1) \rightarrow E^{\beta_0}(\ell - n) \rightarrow I^0 \rightarrow 0.$$

Тогда из точности мы получаем следующее соотношение на ряд Гильберта:

$$H(I^0, t) = \sum_p (-1)^p H(E^{\beta_p}(\ell - p), t) = \sum_p (-1)^p \beta_p t^{-\ell+n+p} (1+t)^n.$$

С другой стороны, из п. 5.1 нам известно, что

$$H(I^0, t) = H(A^*, t) = t^n H(A, 1/t).$$

Сопоставляя последние два тождества, мы получаем требуемую формулу.

ПРИМЕР 5.12. Конфигурация $\mathcal{A}$ в K^{ℓ} называется *конфигурацией общего вида*, если она центральна и никакой набор из ℓ или меньшего числа гиперплоскостей в $\mathcal{A}$ не является зависимым. Скажем, что конфигурация находится в общем положении, если любое множество из не более чем $\ell + 1$ гиперплоскостей пересекается трансверсально (в частности, общее пересечение произвольного набора из более чем ℓ гиперплоскостей пусто). Легко видеть, что конфигурация $\mathcal{A}$ находится в общем положении тогда и только тогда, когда конфигурация $s\mathcal{A}$ является конфигурацией общего вида.

В случае общего положения немедленно из определения вытекает, что идеал I является $(\ell + 1)$ -й степенью $\mathfrak{m}^{\ell+1}$ максимального идеала $\mathfrak{m}$ в E . Отсюда и из предложения 2.18 следует, что для конфигураций общего вида идеал I порожден ℓ -й степенью максимального идеала подалгебры E' (порожденной разностями $e_i - e_j$).

Если конфигурация $\mathcal{A}$ находится в общем положении, то $I = \mathfrak{m}^{\ell+1}$, откуда $I^0 = \mathfrak{m}^{n-\ell}$. Явное вычисление резольвенты произвольной степени идеала $\mathfrak{m}$ дано в терминах функторов Шура в [22]. В частности, эта резольвента является линейной.

⁵В оригинале shellable. – Прим. перев.

5.4. Особые многообразия ОС-алгебр. Действие элемента $x \in E_1$ определяет на произвольном градуированном E -модуле M структуру коцепного комплекса (M, x) . Скажем, что элемент x является *особым* для M , если когомологии этого комплекса не обращаются в нуль. Другими словами, элемент x является особым, если множество элементов модуля M , аннулируемых элементом x , не совпадает с xM . Множество $\text{sing}(M)$ особых элементов алгебраического подмножества в E_1 называется *сингулярным многообразием* для M . Известно (см. [5]), что размерность многообразия $\text{sing}(M)$ есть *сложность* модуля M , определяемая как показатель роста чисел Бетти модуля M . Эта сложность играет для модулей над внешней алгеброй ту же роль, что и проективная размерность для модулей над кольцом многочленов. В этом пункте мы вычислим особое многообразие для ОС-алгебры A конфигурации $\mathcal{A}$. В этом разделе мы рассматриваем произвольные конфигурации, более не предполагая их центральными. Из определения непосредственно вытекает, что особое многообразие модуля M совпадает с особым многообразием для $\text{Hom}_k(M, k)$, в частности, $\text{sing}(A^*) = \text{sing}(A)$.

Для того чтобы сформулировать наши результаты о многообразии $\text{sing}(A)$, нам нужно ввести произведение конфигураций. *Произведением* $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ конфигураций $\mathcal{A}_i$ в K^{ℓ_i} называется конфигурация $\mathcal{A}$ в $K^{\ell_1 + \ell_2}$, состоящая из гиперплоскостей $H \times K^{\ell_2}$ для $H \in \mathcal{A}_1$ и гиперплоскостей $K^{\ell_1} \times H$ для $H \in \mathcal{A}_2$. Конфигурация называется *неприводимой*, если она аффинно не изоморфна произведению двух непустых конфигураций. Любая конфигурация может быть представлена в виде произведения неприводимых конфигураций. Это представление единственно (с точностью до взятия произведения с пустыми конфигурациями, которое не меняет ОС-алгебры). ОС-алгебра произведения конфигураций легко выражается в терминах ОС-алгебр сомножителей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.13. *ОС-алгебра конфигурации $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ есть $A(\mathcal{A}) = A(\mathcal{A}_1) \otimes_k A(\mathcal{A}_2)$, где тензорное произведение берется в категории градуированных косокоммутативных k -алгебр. Более того, $\text{sing}(A(\mathcal{A})) = \text{sing}(A(\mathcal{A}_1)) \times \text{sing}(A(\mathcal{A}_2))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через E , $E(1)$ и $E(2)$ внешние алгебры, сопоставляемые конфигурациям $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ соответственно. Очевидно, что индексное множество $[n]$ для $\mathcal{A}$ может быть отождествлено с объединением индексных множеств $[n]_1$ и $[n]_2$ для $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. Следовательно, $E_1 = E(1)_1 \oplus E(2)_1$ и $E = E(1) \otimes E(2)$ как косокоммутативные алгебры. Кроме того, минимальные зависимые множества в $[n]$, или минимальные множества с пустым пересечением, лежат или в $[n]_1$, или в $[n]_2$. Итак, множество образующих соотношений для $A(\mathcal{A})$ есть объединение таких множеств для $A(\mathcal{A}_1)$ и $A(\mathcal{A}_2)$. Отсюда вытекает первое утверждение.

Для доказательства второго утверждения зафиксируем $x = (x_1, x_2) \in E_1$, где $x_i \in E(i)_1$. Тогда

$$(A(\mathcal{A}), x) = (A(\mathcal{A}_1), x_1) \otimes (A(\mathcal{A}_2), x_2)$$

как коцепные комплексы. Теперь второе утверждение вытекает из формулы Кюннета.

Далее нам нужно больше изучить взаимосвязи между конфигурациями и их конусами. Мы будем использовать обозначения из предложения 2.18: $c\mathcal{A}$ есть конус над конфигурацией $\mathcal{A}$, cE – внешняя алгебра, соответствующая конфигурации $c\mathcal{A}$, и cA – ОС-алгебра для $c\mathcal{A}$. Напомним, что $cA = A\langle e_0 \rangle$, где e_0 – дополнительная образующая алгебры cA , соответствующая дополнительной гиперплоскости H_0 . Для каждо-

го $a \in A_1$ положим $\bar{a} = \bar{a}_0 e_0 + a$, где $\bar{a}_0 = -\sum_{i=1}^n a_i$. Заметим, что $\sum_{i=0}^n \bar{a}_i = 0$, откуда следует, что $\bar{a} \in E'$. Фактически, $\bar{a}$ является образом a при изоморфизме $E \rightarrow E'$ из п. 2.7.

Представим каждый элемент $x \in cA_p$ в виде $x = x_0 e_0 + x_1$, где $x_0 \in A_{p-1}$ и $x_1 \in A_p$. Тогда прямое вычисление показывает, что

$$\bar{a}x = (ax_0 + \bar{a}_0 x_1)e_0 + ax_1.$$

Отсюда вытекает, что мы имеем следующую точную последовательность комплексов:

$$0 \longrightarrow (A, a)(1) \longrightarrow (cA, \bar{a}) \longrightarrow (A, a) \longrightarrow 0, \quad (5.6)$$

которая индуцирует длинную точную последовательность в когомологиях:

$$\cdots \longrightarrow H^{p-1}(A, a) \longrightarrow H^p(cA, \bar{a}) \longrightarrow H^p(A, a) \xrightarrow{\delta} H^p(A, a) \longrightarrow \cdots. \quad (5.7)$$

ЛЕММА 5.14. *Для любого p связывающий гомоморфизм δ в (5.7) обращается в нуль. Другими словами, для каждого p мы имеем короткую точную последовательность*

$$0 \longrightarrow H^{p-1}(A, a) \longrightarrow H^p(cA, \bar{a}) \longrightarrow H^p(A, a) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots. \quad (5.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $x \in A_p$ такой, что $ax = 0$. Выберем в качестве представителя x в cA_p элемент $x + \partial x e_0$ (здесь дифференциал $\partial = \partial_{cA}$ определен в cA , так как конфигурация $c\mathcal{A}$ центральна). Следовательно, так как $\partial a = -\bar{a}_0$, мы имеем

$$\bar{a}(x + \partial x e_0) = \bar{a}_0 x e_0 + a(\partial x e_0) = -\partial(ax)e_0 = 0.$$

Отсюда вытекает требуемое утверждение.

Нам также потребуется один результат из [16]. Согласно этому результату для неприводимой центральной конфигурации $\mathcal{A}$ имеет место соотношение

$$\bar{\chi}(\mathcal{A}) = H(A, t)/(1+t)|_{t=-1} \neq 0 \quad (5.9)$$

(см. также [59; раздел 2]). Число $\bar{\chi}(\mathcal{A})$ называется *бета-инвариантом* конфигурации $\mathcal{A}$. Заметим, что это есть эйлерова характеристика ОС-алгебры деконизации конфигурации $\mathcal{A}$.

Теперь мы можем описать особые многообразия для неприводимых конфигураций.

ТЕОРЕМА 5.15. *Пусть $\mathcal{A}$ – конфигурация без центральных сомножителей (например, неприводимая).*

- (а) *Если $\mathcal{A}$ нецентральна, то $\text{sing}(A) = E_1$.*
- (б) *Если $\mathcal{A}$ центральна, то $\text{sing}(A)$ есть гиперплоскость E'_1 в E_1 , порожденная элементами $e_i - e_j$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $e \in E_1 \setminus \text{sing}(A)$, то A есть свободный модуль над подкольцом $k[e]/e^2$. Отсюда следует, что ряд Гильберта $1 + t$ кольца $k[e]/e^2$ является делителем ряда Гильберта $H(A, t)$ алгебры A .

Если $\mathcal{A}$ нецентральна и без центральных сомножителей, то конус $c\mathcal{A}$ неприводим. Применяя соотношение (5.9) к $c\mathcal{A}$, мы видим, что $H(A, t)$ не делится на $1 + t$. Отсюда и из утверждения предыдущего абзаца вытекает утверждение (а).

Если теперь конфигурация $\mathcal{A}$ центральна и не содержит центральных сомножителей, то она неприводима. Представим ее в виде конуса $c(d\mathcal{A})$ над деконизацией $d\mathcal{A}$. Тогда конфигурация $d\mathcal{A}$ не имеет центральных сомножителей, так что $\text{sing}(A(d\mathcal{A})) = E(d\mathcal{A})_1$. Из точной последовательности (5.8) вытекает, что $\text{sing}(A(\mathcal{A})) = \text{sing}(A(d\mathcal{A}))$ при линейном изоморфизме $E(d\mathcal{A})_1 \rightarrow E'_1 \subset E_1$. Это доказывает утверждение (б).

Из утверждений 5.15 и 5.13 мы получаем следующее общее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 5.16. Для любой конфигурации $\mathcal{A}$ многообразие $\text{sing}(A)$ является линейным подпространством в E_1 , коразмерность которого равна числу центральных сомножителей в неприводимом разложении конфигурации $\mathcal{A}$. Используя координаты векторов в каноническом базисе $(e_N)_{N \in \mathcal{A}}$ для E_1 , мы получаем, что $\text{sing}(A)$ задается системой уравнений

$$\sum_{N \in \mathcal{A}_j} x_N = 0$$

(по одному уравнению для каждого центрального сомножителя $\mathcal{A}_j$).

ПРИМЕР 5.17. Нецентральная конфигурация $\mathcal{A} = \{x, y, x + 1, y + 1\}$ не является неприводимой, но не содержит центральных сомножителей. Поэтому $\text{sing}(A) = E_1$.

5.5. Модуль $F(\mathcal{A})$. Пусть $W = A_1^*$ – двойственное векторное пространство к $A_1 = E_1$, и пусть $S = \text{Sym}(W)$ – симметрическая алгебра для W , т.е. кольцо многочленов над k .

В этом пункте мы изучаем модуль над S , сопоставляемый алгебре A при соответствии Бернштейна–Гельфанда–Гельфанда (БГГ-соответствии). Обычно БГГ-соответствие описывается как изоморфизм между производной категорией ограниченных комплексов когерентных пучков на проективизации $\mathbb{P}(W)$ и производной категорией ограниченных комплексов конечнопорожденных градуированных модулей над $E = \wedge E_1$. Однако, изучая доказательство, можно извлечь из него функтор $\mathcal{FR}$ из категории градуированных модулей над S в категорию линейных свободных комплексов над E , а также функтор $\mathcal{FL}$ из категории градуированных E -модулей в категорию линейных свободных комплексов над S . Эти функторы являются эквивалентностями категорий (см. [22; предложение 2.1]).

Начиная с градуированного E -модуля P , мы получаем следующий соответствующий комплекс $\mathcal{FL}(P)$ над S :

$$\cdots \longrightarrow S \otimes P_i \longrightarrow S \otimes P_{i+1} \longrightarrow \cdots,$$

с дифференциалом $1 \otimes p \mapsto \sum x_i \otimes e_i p$, где (x_i) и (e_i) суть двойственные базисы для W и E_1 . Для градуированного S -модуля M соответствующий комплекс $\mathcal{FR}(M)$ над E имеет вид

$$\cdots \longrightarrow \text{Hom}_k(E, M_i) \longrightarrow \text{Hom}_k(E, M_{i+1}) \longrightarrow \cdots,$$

а дифференциал определяется аналогично.

Так как минимальные инъективные резольвенты для A линейны, мы можем определить $F(\mathcal{A})$ как градуированный S -модуль, который отображается функтором $\mathcal{FR}$ в инъективную резольвенту для A . Тогда мы имеем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5.18. *Пусть M – градуированный S -модуль и P – конечнопорожденный градуированный E -модуль. Тогда $\mathcal{FL}(P)$ есть свободная резольвента для M тогда и только тогда, когда $\mathcal{FR}(M)$ есть инъективная резольвента для P .*

Это теорема позволяет получить некоторые основные свойства модуля $F(\mathcal{A})$.

СЛЕДСТВИЕ 5.19. *Модуль $F(\mathcal{A})$ порожден над S элементами степени ℓ и имеет следующую линейную свободную резольвенту:*

$$\mathcal{FL}(A): 0 \longrightarrow S \otimes_k A_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow S \otimes_k A_\ell \longrightarrow F(\mathcal{A}) \longrightarrow 0$$

(эта резольвента обычно называется комплексом Омото). В частности, имеют место следующие утверждения.

- (а) Проективная размерность модуля $F(\mathcal{A})$ равна ℓ и $\text{Ext}_S^\ell(F(\mathcal{A}), S) = k$.
- (б) Носителем модуля $F(\mathcal{A})$ является линейное пространство, коразмерность которого равна числу центральных конфигураций в неприводимом разложении конфигурации $\mathcal{A}$.
- (в) Ряд Гильберта модуля $F(\mathcal{A})$ есть

$$H(F(\mathcal{A}), t) = \sum_{i=0}^{\infty} \dim_k(F(\mathcal{A})_i) t^i = (-1)^\ell \frac{\chi(\mathcal{A}, t)}{(1-t)^n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как инъективная резольвента алгебры A линейна, из теоремы 5.18 вытекает, что комплекс Омото является (линейной) свободной резольвентой модуля $F(\mathcal{A})$. Это доказывает первое утверждение и вычисляет проективную размерность.

(а) Так как $A_i = E_i$ при $i = 0, 1$, два левых ненулевых члена нашей свободной резольвенты совпадают с двумя левыми ненулевыми членами в комплексе Кошуля $\mathcal{FL}(E)$. Это позволяет вычислить Ext в утверждении (а).

(б) Как показано в [5], особое многообразие E -модуля A есть носитель $\text{Ext}_E^*(k, k)$ -модуля $\text{Ext}_E^*(A, k)$, который совпадает (так как E – горенштейнова алгебра) с носителем модуля $\text{Ext}_E^*(k, A)$. Как хорошо известно, $\text{Ext}_E^*(k, k) = S$ (на самом деле это эквивалентно тому, что E – кошулева алгебра, см. следующий раздел). В силу результатов из [22] $\text{Ext}_E^*(k, A) = F(\mathcal{A})$.

(в) Знание свободной резольвенты для $F(\mathcal{A})$ позволяет вычислить ряд Гильберта, как и при доказательстве теоремы 5.11.

ПРИМЕР 5.20. Пусть $\mathcal{A}$ – конфигурация из n гиперплоскостей в K^ℓ , находящаяся в общем положении. Тогда алгебра A есть $E/\mathfrak{m}^{\ell+1}$. Следовательно, свободная резольвента модуля $F(\mathcal{A})$ есть усеченный комплекс Кошуля, а сам модуль $F(\mathcal{A})$ изоморфен модулю $(n - \ell)$ -х сизигий тривиального S -модуля k .

5.6. Проблемы. 1. Получить любую информацию о минимальной свободной резольвенте алгебры A (как модуля над E), например, вычислить числа Бетти алгебры A .

В настоящее время ответ известен лишь для конфигураций, находящихся в общем положении, или для центральных конфигураций общего вида, см. пример 5.12.

2. Явно построить минимальную свободную резольвенту для I^0 (эквивалентно, минимальную инъективную резольвенту для A).

В работе [20] эта проблема решена для первых двух членов резольвенты, т.е. дано представление E -модуля I^0 образующими и соотношениями.

6. Кошулевы ОС-алгебры

В этом разделе мы изучаем ОС-алгебры с точки зрения теории градуированных связных конечнопорожденных алгебр. Интересным и достаточно хорошо изученным классом таких алгебр является класс кошулевых алгебр. Свойство кошулевости для ОС-алгебр впервые изучалось в работе [60], где был получен основной результат п. 6.3 (в более общей ситуации). Здесь мы приводим значительно более короткое доказательство, использующее базисы Гребнера и результаты из [9].

Основной результат этого раздела изложен в пп. 6.4–6.6. Он утверждает, что алгебра A является кошулевой тогда и только тогда, когда дополнение M является рациональным пространством типа $K[\pi, 1]$ (для $K = \mathbb{C}$). Этот результат получен в [53]. Изучение конфигураций, дополнения которых имеют рациональный тип $K[\pi, 1]$, имеет сравнительно длинную историю. Мы упомянем работы [2], [40]–[42], [28], [25], [36], посвященные этому свойству и близким вопросам. Более подробные ссылки можно найти в [30].

Перед тем как переходить к свойству Кошуля, мы изучим достаточное условие для этого свойства – квадратичность алгебры A . Свойство квадратичности было впервые изучено Фальком в работе [27], где в качестве необходимых условий были использованы комбинаторные понятия упругих⁶ и линейно-замкнутых решеток (или, скорее, матроидов). Здесь мы следуем работе [20], где было найдено более сильное необходимое условие, опровергающее гипотезу Фалька (см. п. 6.1).

В этом разделе мы предполагаем, что конфигурация $\mathcal{A}$ является центральной, хотя большинство определений и результатов могут быть обобщены на случай произвольных конфигураций.

6.1. Квадратичные ОС-алгебры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Пусть R – градуированная алгебра $R = \sum_{p \geq 0} R_p$ над k . Мы всегда предполагаем, что R является связной (т.е. $R_0 = k$) и порождена элементами из R_1 . Тогда алгебра R естественно представляется в виде фактор-алгебры тензорной алгебры $T(R_1)$ для R_1 по некоторому однородному идеалу $J = \sum_{p \geq 2} J_p$. Алгебра R называется *квадратичной*, если идеал J порожден элементами из J_2 .

Другими словами, алгебра R является квадратичной, если все соотношения в ней вытекают из соотношений степени 2. Заметим, что если $R = N/I$, где N – квадратичная алгебра и I – ее однородный идеал, то алгебра R является квадратичной тогда и только тогда, когда идеал I порожден элементами из I_2 . В частности, ОС-алгебра

⁶В оригинале *taut.* – Прим. перев.

$A = E/I$ квадратична тогда и только тогда, когда ОС-идеал I порожден элементами из I_2 .

В течение последних нескольких лет были предприняты попытки установить свойство квадратичности ОС-алгебр непосредственно из решетки L , минуя само определение алгебры A . Эти попытки привели к нескольким необходимым условиям, которые мы обсудим ниже (начиная от слабейшего и заканчивая сильнейшим).

I. Упругие решетки. Пусть L и L' – геометрические решетки, тогда отображение $f: L' \rightarrow L$ называется *проекцией*, если оно сюръективно, биективно на атомах и сохраняет точные верхние границы (т.е. $f(X \vee Y) = f(X) \vee f(Y)$ для всех $X, Y \in L'$). Используя такое отображение f , можно всегда отождествить множества атомов решеток L' и L . Если существует проекция из L' в L , то решетка L называется *фактор-решеткой* решетки L' . Например, каждая атомная решетка является фактор-решеткой булевой решетки с тем же числом атомов. Простым упражнением является проверка того факта, что $\text{rk } L' \geq \text{rk } L$ и $\text{rk } L' = \text{rk } L$ лишь при условии $L' = L$ (и $f = \text{id}_L$).

Напомним, что множество атомов геометрической решетки L есть множество ее элементов ранга 1. Обозначим через $L[p]$ множество элементов решетки L , ранг которых не превосходит p .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2. Геометрическая решетка называется *упругой*, если она не является фактор-решеткой ни для одной решетки $L' \neq L$ с $L'[2] = L[2]$.

Если геометрическая решетка L представляется в виде решетки пересечений некоторой центральной конфигурации $\mathcal{A}$, то имеется простое необходимое условие для упругости L . Если зафиксировать линейные функционалы, ядра которых суть гиперплоскости из $\mathcal{A}$, то любая линейная зависимость между этими функционалами должна вытекать из линейных зависимостей длины 3. Конфигурации, удовлетворяющие этому свойству, называются *формальными*.

ПРИМЕР 6.3. Пусть $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ – следующие конфигурации (заданные линейными функционалами в $\mathbb{R}^3$):

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &= \{x, y, z, x + y + z, 2x + y + z, 2x + 3y + z, 2x + 3y + 4z, 3x + 5z, 3x + 4y + 5z\}, \\ \mathcal{A}_2 &= \{x, y, z, x + y + z, 2x + y + z, 2x + 3y + z, 2x + 3y + 4z, x + 3z, x + 2y + 3z\}.\end{aligned}$$

Непосредственная проверка показывает, что их решетки пересечений изоморфны, конфигурация $\mathcal{A}_1$ формальна, а $\mathcal{A}_2$ не формальна. Следовательно, их общая решетка пересечений L не является упругой. И действительно, она является фактор-решеткой решетки пересечений L' конфигурации

$$\mathcal{A}_3 = \{x, y, z, u, x + u, x + 2y + u, x + 2y + 3z + u, x + 3z, x + 2y + 3z\}$$

в $\mathbb{R}^4$ при единственной проекции, которая является биекцией на атомах и заменяет u на $x + y + z$. Решетка L' является упругой (см. ниже).

Естественным обобщением упругости является понятие локальной упругости. Геометрическая решетка L называется *локально упругой*, если для любого $X \in L$ решетка $L_X = \{Y \in L \mid Y \leq X\}$ является упругой.

II. Линейно-замкнутые решетки. Пусть снова L – геометрическая решетка с множеством атомов $\mathcal{A}$. Напомним некоторые обозначения, использованные в разделе 2. Множество атомов $\mathcal{B}$ называется зависимым, если $\text{rk}(\bigvee \mathcal{B}) < |\mathcal{B}|$. Наименьшие относительно включения зависимые множества называются циклами, а множество атомов $\mathcal{C}$ называется замкнутым, если не существует цикла $\mathcal{B}$ такого, что $|\mathcal{C} \cap \mathcal{B}| = |\mathcal{B}| - 1$. Эквивалентно, множество атомов $\mathcal{C}$ замкнуто, если существует такой элемент $X \in L$, что $\mathcal{C} = \mathcal{A}_X = \{H \in \mathcal{A} \mid H \leq X\}$.

Если L есть решетка пересечений некоторой конфигурации $\mathcal{A}$, то замкнутые подконфигурации суть те, для которых множество определяющих линейных функционалов замкнуто относительно линейных соотношений в множестве всех линейных функционалов, определяющих гиперплоскости из $\mathcal{A}$. Рассматривая линейные функционалы как векторы в двойственном пространстве, мы можем налагать более слабые естественные ограничения на множества таких векторов. Например, мы можем потребовать, чтобы такое множество содержало все функционалы, лежащие на прямой, соединяющей два элемента из этого множества. Приспосабливая это свойство к произвольным геометрическим решеткам, мы приходим к следующему определению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.4. Подмножество $\mathcal{B}$ множества атомов $\mathcal{A}$ геометрической решетки L называется *линейно-замкнутым*, если для любого $X \in L$ такого, что $\text{rk } X = 2$ и $|\mathcal{B} \cap \mathcal{A}_X| \geq 2$, мы имеем $\mathcal{A}_X \subset \mathcal{B}$. Решетка L называется *линейно-замкнутой*, если все линейно-замкнутые множества атомов являются замкнутыми.

Свойство решетки быть линейно-замкнутой сильнее, чем свойство локальной упругости.

ТЕОРЕМА 6.5. *Любая линейно-замкнутая геометрическая решетка L является локально упругой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что L не является локально упругой, т.е. найдутся $X \in L$, геометрическая решетка $L' \neq L_X$ и проекция $f: L' \rightarrow L_X$, являющаяся тождественным отображением на $L'[2] = L_X[2]$. Если бы отображение f было биективным, то оно должно было бы быть тождественным, что приводит к противоречию. Следовательно, существует элемент $Y \in L_X$ такой, что $|f^{-1}(Y)| > 1$. По определению проекции мы имеем $U = \bigvee(f^{-1}(Y)) \in f^{-1}(Y)$. Обозначим множество атомов решетки L через $\mathcal{A}$ и заметим, что $\mathcal{A}_X$ есть множество атомов для L' . Теперь выберем элемент $Z \in f^{-1}(Y)$, отличный от U , и положим $\mathcal{B} = (\mathcal{A}_X)_Z = \mathcal{A}_Z$. Множество $\mathcal{B}$ является замкнутым в L' , а значит, и линейно-замкнутым. Так как $L'[2] = L_X[2]$, множество $\mathcal{B}$ также является линейно-замкнутым в L_X . Но $\mathcal{B}$ не может быть замкнутым в L_X , так как в этой решетке $\bigvee(\mathcal{B}) = Y$, но существует большее множество $(\mathcal{A}_X)_U = \mathcal{A}_U$, для которого $\bigvee(\mathcal{A}_U) = Y$ в L_X . Отсюда вытекает, что решетка L_X не является линейно-замкнутой. Полученное противоречие завершает доказательство.

Утверждение, обратное к теореме 6.5, не верно.

ПРИМЕР 6.6. Рассмотрим конфигурацию $\mathcal{A} = \{x, y, z, x+y, x+z, y+z\}$. Ее подконфигурация $\mathcal{B} = \{x+y, x+z, y+z\}$ является линейно-замкнутой, но не замкнутой. Следовательно, решетка пересечений L конфигурации $\mathcal{A}$ не является линейно-замкнутой.

Мы хотим доказать, что решетка L является локально упругой. Так как все собственные подрешетки L_X ($X \in L$) имеют ранги, не превосходящие 3, они являются упругими по тривиальным соображениям. Поэтому надо лишь доказать упругость самой

решетки L . Предположим, что L' является геометрической решеткой с $L'[2] = L[2]$, для которой существует проекция $f: L' \rightarrow L$. Заметим, что минимальное линейно-замкнутое множество атомов в L , содержащее x, y и z , есть $\mathcal{A}$, а значит, то же самое верно и для L' . Итак, минимальное замкнутое множество атомов в L' , содержащее эти три атома, есть снова $\mathcal{A}$. Отсюда вытекает, что $\text{rk } L' = 3 = \text{rk } L$, а значит, $L' = L$.

III. 3-независимые решетки. Здесь мы определяем еще одно свойство геометрических решеток, используя понятие независимых разбиений из п. 5.2. Пусть L – геометрическая решетка ранга ℓ с множеством атомов $\mathcal{A}$, причем $|\mathcal{A}| = n$. Как и раньше, зафиксируем линейный порядок на $\mathcal{A}$ и будем использовать понятие p -независимых разбиений множества $[n]$ из п. 5.2. Введем следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.7. Пусть $3 \leq p \leq \ell$. Решетка L называется p -независимой, если любое p -независимое разбиение множества $[n]$ является независимым.

Условие 3-независимости сильнее, чем условие линейной замкнутости.

ТЕОРЕМА 6.8. Если решетка L является 3-независимой, то она является линейно-замкнутой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что L не является линейно-замкнутой. Для доказательства теоремы достаточно привести 3-независимое разбиение, имеющее более чем ℓ элементов (а значит, не являющееся независимым).

Пусть S – линейно-замкнутое подмножество в $[n]$, которое не является замкнутым. Пусть, далее, T – замыкание множества S , т.е. $T = [n]_X$, где $X = \bigvee(S)$. Включим X в максимальный флаг F в $L_{\geq X} = \{Y \in L \mid Y \geq X\}$. Зафиксируем обозначение $F = (X_r = X < X_{r+1} < \dots < X_\ell)$, где $r = \text{rk } X$. Также выберем возрастающую последовательность (S_i) ($i = 0, 1, \dots, r$) подмножеств в S таких, что $\text{rk } \bigvee(S_i) = i$. Мы имеем $S_r = S$. Теперь мы можем определить разбиение Π , состоящее из $\ell + 1$ элементов, а именно, $S_p \setminus S_{p-1}$ для $p = 1, 2, \dots, r$, $S' = T \setminus S$ и $\mathcal{A}_{X_i} \setminus \mathcal{A}_{X_{i-1}}$ для $i = r + 1, \dots, \ell$.

Мы утверждаем, что разбиение Π является 3-независимым. Пусть множество P состоит из 3 элементов, по одному из 3 различных элементов разбиения Π . Если хотя бы один из элементов множества P не принадлежит T , то независимость множества P очевидна (см. лемму 5.1). То же самое верно и если хотя бы два элемента принадлежат S_{r-1} . Поэтому единственный интересный случай – это когда $P = \{a, b, c\}$, где $a \in S_{r-1}$, $b \in Y_r = S \setminus S_{r-1}$ и $c \in S' = T \setminus S$. В этом случае мы имеем $|P \cap S| = 2$, так что зависимость множества P будет противоречить тому, что S является линейно-замкнутым. Следовательно, разбиение Π является 3-независимым, что завершает доказательство.

Опять-таки мы покажем, что новое условие строго сильнее предыдущего, т.е. утверждение, обратное к теореме 6.8, не верно.

ПРИМЕР 6.9. Пусть L – решетка пересечений следующей конфигурации в $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{A} = \{x, y, x - y, x + y, z, x + y + z, 2x + y + z, 3y + z\}.$$

Нумеруя атомы (т.е. гиперплоскости) в том порядке, в котором они приведены, мы получаем следующий набор зависимых множеств ранга 2:

$$\{\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 6, 7\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 7, 8\}, \{4, 5, 6\}\}.$$

Изображая каждую гиперплоскость точкой и проводя прямые через зависимые множества, мы получаем *матроидное изображение* этой конфигурации, показанное на рис. 1 (а).

Всего имеется 48 независимых множеств мощности 3. Непосредственно проверяя каждое такое множество, мы убеждаемся, что линейное замыкание любого из них есть множество [8]. Отсюда вытекает, что решетка L является линейно-замкнутой. С другой стороны, рассмотрим разбиение

$$\Pi = \{\{1, 3, 7\}, \{2, 4, 5\}, \{6\}, \{8\}\}.$$

Так как никакое из зависимых 3-множеств не пересекается нетривиально более чем с двумя элементами из Π , мы видим, что разбиение Π является 3-независимым. Так как Π содержит 4 элемента, оно не является независимым. Следовательно, решетка L не является 3-независимой.

Теперь мы установим связь между всеми этими условиями на геометрические решетки и свойством квадратичности ОС-алгебр.

ТЕОРЕМА 6.10. *Если алгебра A квадратична, то решетка L является 3-независимой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что I обозначает ОС-идеал, а $J(p)$ – идеал, порожденный элементами из I_j при $j \leq p$ ($p = 2, 3, \dots, \ell$). Условие теоремы означает, что $J(2) = I$, откуда $(J(2))^0 = I^0$. Пусть Π есть 3-независимое разбиение множества $[n]$. В силу леммы 5.1 $z(\Pi) \in (J(2))^0$, откуда $z(\Pi) \in I^0$.

Предположим, что Π не является независимым, т.е. существует зависимое подмножество $S \subset [n]$ такое, что $|S \cap P| \leq 1$ для любого $P \in \Pi$. Для того чтобы получить противоречие, достаточно показать, что $z(\Pi)\partial e_S \neq 0$. Действительно, имеет место следующее равенство (с точностью до знака):

$$z(\Pi)\partial e_S = \pm z(\bar{\Pi}),$$

где $\bar{\Pi}$ – разбиение, получаемое из Π объединением всех его элементов $P \in \Pi$ таких, что $S \cap P \neq \emptyset$. Так как для любого разбиения ρ мы имеем $z(\rho) \neq 0$, получаем противоречие, которое доказывает утверждение.

Из теорем 6.10 и 6.8 немедленно вытекает, что другие два свойства геометрических решеток из этого пункта также являются необходимыми для квадратичности соответствующих ОС-алгебр.

СЛЕДСТВИЕ 6.11. *Если алгебра A квадратична, то решетка L является линейно-замкнутой и локально упругой.*

Так как условие 3-независимости строго сильнее условий линейной замкнутости и упругости, ни одно из последних двух условий не является достаточным для квадратичности. Мы покажем, что первое условие также не является достаточным.

ПРИМЕР 6.12. В книге [38] Гильберта и Кон-Фоссена была рассмотрена конфигурация прямых в $\mathbb{R}^2$, названная там конфигурацией $(9_3)_2$. Ее матроидное изображение показано на рис. 1 (б). Мы положим $J = J(2)$ в этом примере.

Рис. 1. Матроидные изображения (а) конфигурации из примера 6.9; (б) конфигурации $(9_3)_2$

Соответствующая алгебра A не является квадратичной, что может быть показано следующим простым вычислением (которое на самом деле применимо ко всем трем конфигурациям типа 9_3 из [38]). Идеал J порожден 9 элементами из E_2 . Так как каждый из этих девяти элементов аннулируется элементами из некоторого 2-мерного подпространства в E_1 , мы имеем

$$\dim J_3 \leq 7 \times 9 = 63. \quad (6.1)$$

С другой стороны, так как конфигурация $\mathcal{A}$ центральна, ряд Гильберта алгебры A должен делиться на $1+t$. Тогда простое вычисление показывает, что $H(A, t) = 1 + 9t + 27t^2 + 19t^3$. Отсюда вытекает, что

$$\dim I_3 = \binom{9}{3} - 19 = 65. \quad (6.2)$$

Следовательно, $J \neq I$.

Доказательство того, что конфигурация $\mathcal{A}$ является 3-независимой, требует больших усилий. Для удобства скажем, что подмножество T в [9] *представляет* некоторый 3-цикл S , если $|T \cap S| \geq 2$. Полезным наблюдением относительно рассматриваемого матроида является то, что он допускает автоморфизм порядка 9, который может быть записан перестановкой $\tau = [261594837]$. В частности, этот автоморфизм транзитивен на множестве [9]. Теперь мы утверждаем, что для любого подмножества T в [9] имеют место следующие утверждения (достаточно рассматривать лишь случаи, когда $1 \in T$).

(1) Если $|T| = 3$, то множество T представляет по крайней мере один цикл.

Действительно, единственными элементами множества [9], которые вместе с 1 не представляют цикл, являются 6 и 8, но множество $\{6, 8\}$ представляет цикл.

(2) Если $|T| = 4$, то множество T представляет по крайней мере 2, но не больше 5 циклов.

Здесь имеются два случая. Вначале предположим, что T содержит цикл S (мы можем считать, что $S = \{1, 3, 4\}$ или $S = \{1, 2, 5\}$). Тогда проверка показывает,

что любой другой элемент множества [9] вместе с одним из элементов множества S представляет другой цикл. Отсюда следует первое утверждение. Очевидно также, что в этом случае множество T не может представлять более 4 циклов.

Теперь предположим, что T не содержит ни одного цикла. Так как два различных подмножества мощности 3 в T не могут представлять один и тот же цикл, мы снова получаем, что имеет место первое утверждение. С другой стороны, матроидное изображение, рассматриваемое как граф, не содержит полного подграфа с 4 вершинами, откуда вытекает второе утверждение.

- (3) Если $|T| = 5$, то множество T представляет не более 7 циклов. Если $|T| = 6$, то это число равно 8.

Это вытекает из (1) и первого утверждения из (2) путем перехода к дополнениям.

Теперь предположим, что Π есть 3-независимое разбиение множества [9]. Это означает, что элементы разбиения Π представляют каждый из 9 циклов. Рассматривая все возможные мощности элементов разбиения Π в случае $|\Pi| = 4$, т.е. $\{6, 1, 1, 1\}$, $\{5, 2, 1, 1\}$, $\{4, 3, 1, 1\}$, $\{4, 2, 2, 1\}$, мы выводим из второго утверждения в (2) и из (3), что элементы разбиения Π могут представлять не более 8 циклов. Следовательно, $|\Pi| \leq 3$, откуда вытекает, что разбиение Π независимо. Это показывает, что конфигурация $\mathcal{A}$ является 3-независимой.

Фактически, используя программу Macaulay 2 [34], мы можем получить базис для $(J^0)_5$ и показать, что $(J^0)_5$ не содержит ни одного чистого элемента (в частности, J^0 не является чистым идеалом). Для того чтобы описать этот базис, положим

$$x = e_1e_2e_3e_6e_8 - e_1e_2e_4e_6e_9 + e_1e_2e_4e_8e_9 - e_1e_2e_6e_8e_9 - e_2e_3e_5e_6e_9,$$

$p = (1 - \tau)(1 + \tau^3 + \tau^6)x$ и $q = \tau p$. Тогда p и q образуют базис в $(J^0)_5$.

Для любого элемента $r \in E_5$ обозначим через $\mathcal{S}(r)$ носитель r , т.е. множество всех подмножеств $\{i_1, i_2, \dots, i_5\}$, которые индексируют ненулевые мономы $e_{i_1} \cdots e_{i_5}$ в r . Предположим, что элемент r чистый, т.е. $r = a_1a_2 \cdots a_5$, где $a_i \in E_1$. Тогда коэффициенты мономов, входящих в r , являются минорами (9×5) -матрицы, i -й столбец которой есть a_i . В частности, множество $\mathcal{S}(r)$ является множеством базисов матроида на множестве [9], задаваемого строками этой матрицы.

Рассмотрим ненулевую линейную комбинацию $r = \alpha p + \beta q$. Покажем, что r не может быть чистым элементом. Мы можем предположить, что $\alpha \neq 0$ (иначе заменим p и q на τp и τq соответственно). Тогда положим $B = \{1, 2, 6, 8, 9\}$. Расписывая r , мы находим, что $B \in \mathcal{S}(r)$. При этом, однако, ни $B \cup \{5\} \setminus \{9\}$, ни $B \cup \{7\} \setminus \{9\}$ не лежат в $\mathcal{S}(r)$. Следовательно, $\mathcal{S}(r)$ не удовлетворяет основной аксиоме для множества базисов матроида. Отсюда вытекает, что $(J^0)_5$ не содержит чистых элементов.

6.2. Определение кошулевых алгебр и достаточное условие кошулевости. Вначале пусть A является произвольной положительно градуированной связной конечнопорожденной k -алгеброй. Пусть Ext_A^p есть p -й производный функтор для функтора гомоморфизма *градуированных* A -модулей. Для любых двух таких модулей M и N и любого p линейное пространство $\text{Ext}_A^p(M, N)$ является градуированным, т.е. $\text{Ext}_A^p(M, N) = \bigoplus_{q \geq 0} (\text{Ext}_A^p(M, N))_q$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.13. Алгебра A называется кошулевой, если

$$(\text{Ext}_A^p(k, k))_q = 0 \quad (6.3)$$

для любого $p \neq q$, где $k = {}_A k$ – тривиальный градуированный левый A -модуль (равный A/A_+).

Другими словами, минимальные свободные резольвенты для k (как градуированного A -модуля) линейны.

Если A является кошулевой алгеброй, то существует канонический гомоморфизм градуированных алгебр $T(A_1) \rightarrow A$, где $T(A_1)$ – тензорная алгебра линейного пространства A_1 . Напомним, что мы называли ядро этого гомоморфизма каноническим идеалом алгебры A .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.14. Пусть A – квадратичная алгебра и J – ее канонический идеал. Пусть, далее, $J_2^!$ есть аннулятор в $A_1^* \otimes A_1^* = (A_1 \otimes A_1)^*$ линейного пространства J_2 , и пусть $J^!$ – идеал в $T(A_1^*)$, порожденный элементами из $J_2^!$. Тогда квадратичная алгебра $A^! = T(A_1^*)/J^!$ называется квадратично двойственной к A .

Заметим, что $(A^!)^! = A$. Понятие квадратично двойственной алгебры позволяет дать другое определение кошулевых алгебр. A именно, алгебра A является кошулевой тогда и только тогда, когда ее комплекс Кошуля $\mathcal{K}$ точен. Здесь $\mathcal{K} = \bigoplus_{p \geq -1} \mathcal{K}_p$, где $\mathcal{K}_p = \text{Hom}_k(A_p^!, A)$ для $p \geq 0$, $\mathcal{K}_{-1} = k$. Дифференциалы $d_p: \mathcal{K}_p \rightarrow \mathcal{K}_{p-1}$ определены для $p \geq 1$ по формуле $d_p f(a) = \sum_{m=1}^n f(x_m a) e_m$, где $a \in A_{p-1}^!$, $(e_1, \dots, e_n)$ – некоторый базис в A_1 , а $(x_1, \dots, x_n)$ – двойственный базис в $A_1^!$.

Следующие утверждения (см., например, [7], [8]) мы обычно будем использовать, не ссылаясь на них.

ТЕОРЕМА 6.15. (i) Если алгебра A является кошулевой, то она квадратична (в частности, порождена элементами степени 1). Для любой квадратичной алгебры условие (6.3) выполнено при $p < 3$ и $q \neq p$.

(ii) Квадратичная алгебра A является кошулевой тогда и только тогда, когда алгебра $A^!$ является кошулевой.

(iii) Если алгебра A кошулева, то имеет место следующее соотношение между рядами Гильберта:

$$H(A, t) \cdot H(A^!, -t) = 1.$$

Утверждение, обратное к 6.15 (iii), не верно (см. [54], [56]).

Теперь мы ограничимся рассмотрением алгебр A , являющихся фактор-алгебрами внешних алгебр. Для таких алгебр, как и для модулей над коммутативными алгебрами, существует простое условие, формулируемое в терминах базисов Гребнера, достаточное для того, чтобы алгебра A была кошулевой. Пусть E – внешняя алгебра и $A = E/I$, где I – однородный идеал в E ,

ТЕОРЕМА 6.16. Если I обладает квадратичным (т.е. степени 2) базисом Гребнера, то алгебра A является кошулевой.

Доказательство этой теоремы сводится к случаю, когда I является мономиальным идеалом, порожденным элементами степени 2, аналогично тому, как это делалось при доказательстве теоремы 5.11. В мономиальном случае доказательство может быть получено индукцией по размерности A_1 (см. [33] или [60]).

6.3. Суперразрешимые конфигурации. Для того чтобы привести пример конфигураций, ОС-алгебры которых являются кошулевыми, мы введем один класс конфигураций, также представляющий самостоятельный интерес.

Пусть $\mathcal{A}$ – центральная конфигурация в пространстве V и L – ее решетка пересечений. Напомним, что решетка L является геометрической, и, в частности, ранги любых двух элементов $X, Y \in L$ удовлетворяют полумодулярному неравенству

$$\text{rk}(X) + \text{rk}(Y) \geq \text{rk}(X \vee Y) + \text{rk}(X \wedge Y). \quad (6.4)$$

Если (6.4) обращается в равенство для пары элементов $\{X, Y\}$, то эта пара называется *модулярной*. Элемент $X \in L$ называется *модулярным*, если он образует модулярную пару с любым элементом $Y \in L$. На самом деле можно потребовать меньше: элемент X является модулярным, если и только если (6.4) обращается в равенство для любого $Y \in L$ такого, что $X \wedge Y = V$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.17. Решетка L и конфигурация $\mathcal{A}$ называются суперразрешимыми, если L содержит максимальный флаг из модулярных элементов.

ПРИМЕР 6.18. Примеры суперразрешимых конфигураций легко найти среди конфигураций всех отражающих гиперплоскостей (зеркал) конечных групп Коксетера. Фактически, все такие конфигурации типов A и B являются суперразрешимыми. Наименьшими представителями в этих сериях являются $\mathcal{A}_1 = \{x, y, x - y, z, x - z, y - z\}$ (детали см. в примере 3.5) и $\mathcal{A}_2 = \{x, y, z, x \pm y, x \pm z, y \pm z\}$. Максимальный флаг $(\{x = 0\} < \{x = 0, y = 0\} < 0)$ является модулярным в обеих конфигурациях.

Мы будем называть максимальный флаг из модулярных элементов *модулярным флагом*. Оказывается, что разбиение $\Pi(F)$, соответствующее максимальному флагу F , определяет **nbc**-моном для некоторых упорядочиваний специального вида.

Зафиксируем максимальный флаг $F = (X_0 < X_1 < \dots < X_\ell)$ и положим $\mathcal{A}_p = \mathcal{A}_{X_p} \setminus \mathcal{A}_{X_{p-1}}$. Линейный порядок на гиперплоскостях из $\mathcal{A}$ называется *совместимым* с F , если номер любого элемента из $\mathcal{A}_p$ меньше, чем номер любого элемента из $\mathcal{A}_{p+1}$, для любого p .

Теперь зафиксируем порядок, совместимый с F . Как обычно, этот порядок определяет взаимно однозначное соответствие между $\mathcal{A}$ и $[n]$. Определим *частичное сечение* разбиения Π множества $[n]$ как подмножество T в $[n]$ такое, что $|T \cap P| \leq 1$ для любого $P \in \Pi$. Обычно мы будем опускать слово “частичное”.

ТЕОРЕМА 6.19. Флаг F является модулярным тогда и только тогда, когда набор сечений разбиения $\Pi = \Pi(F)$ совпадает с набором **nbc**-множеств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_\ell\}$, и предположим, что флаг F является модулярным. Сначала мы хотим доказать, что любое **nbc**-множество является сечением разбиения Π . Пусть S – некоторое **nbc**-множество. Допустим, что оно не является сечением, т.е. найдутся p и $i \neq j$ такие, что $i, j \in S \cap S_p$. Положим $Y = \vee(\{i, j\})$ и заметим, что $\text{rk } Y = 2$, откуда $\text{rk } X_p \geq 2$. Используя модулярность X_{p-1} , мы находим

$$1 \leq \text{rk}(Y \wedge X_{p-1}) = \text{rk } Y + \text{rk } X_{p-1} - \text{rk}(Y \vee X_{p-1}) \leq p + 1 - \text{rk}(Y \vee X_p) = 1.$$

Это означает, что $\text{rk}(Y \wedge X_{p-1}) = 1$, т.е. $Y \wedge X_{p-1}$ есть некоторый атом, скажем H_m , решетки L . Так как $m < i, j$ и $\{m, i, j\}$ является циклом, мы получаем противоречие с тем, что S является **nbс**-множеством.

(ii) Теперь докажем, что каждое сечение разбиения Π является **nbс**-множеством. Допустим, что это не так, и выберем минимальное относительно включения сечение T , которое не является **nbс**-множеством. Тогда найдется m , меньшее, чем минимальный элемент t множества T , такое, что множество $\bar{T} = T \cup \{m\}$ зависимо. Предположим, что $t \in S_p$. Если $m \in S_q$ для некоторого $q < p$, то множество $\bar{T}$ является сечением, что противоречит независимости сечения Π . Если же $m \in S_p$, то, применяя те же вычисления, что и в (i), мы можем найти элемент $r \in S_{p-1}$ такой, что множество $T \cup \{r\}$ зависимо, что опять-таки приводит к противоречию.

(iii) Наконец, предположим, что набор сечений разбиения Π совпадает с набором **nbс**-множеств. Зафиксируем некоторое p ($2 \leq p \leq \ell - 1$) и рассмотрим $Y \in L$ такое, что $X_p \wedge Y = V$. Выберем множество S такое, что $|S \cap S_i| = 1$ при $1 \leq i \leq p$. Это множество является независимым согласно лемме 5.2. Выберем максимальное **nbс**-подмножество T в $[n]_Y$ (используя индуцированный порядок на $[n]_Y$). Так как множество $[n]_Y$ замкнуто, T является **nbс**-множеством в $\mathcal{A}$. Отсюда в силу (i) мы получаем, что $|T \cap S_i| \leq 1$ для всех i . Ввиду условия на Y мы находим, что $T \cap S_i = \emptyset$ для $i \leq p$. Следовательно, множество $S \cup T$ является сечением разбиения Π и независимо. Вычисляя количества элементов в независимых множествах, мы получаем

$$\text{rk}(X_p \vee Y) = \text{rk } X_p + \text{rk } Y = \text{rk } X_p + \text{rk } Y - \text{rk}(X_p \wedge Y),$$

а значит, X_p является модулярным. Это завершает доказательство.

СЛЕДСТВИЕ 6.20. Пусть $\mathcal{A}$ – суперразрешимая конфигурация и $F = (X_0 < X_1 < \dots < X_\ell)$ – модулярный флаг в L . Зафиксируем порядок гиперплоскостей в $\mathcal{A}$, совместимый с F . Тогда

- 1) симплициальный **nbс**-комплекс конфигурации $\mathcal{A}$ является джойном 0-мерных комплексов; кроме того, $H(A, t) = \prod_{p=1}^{\ell} (1 + b_p t)$, где $b_p = |X_p \setminus X_{p-1}|$;
- 2) ОС-идеал I алгебры $\mathcal{A}$ имеет квадратичный базис Гребнера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) следует непосредственно из описания **nbс**-множеств в теореме 6.19. Для доказательства свойства 2) заметим, что любое подмножество в $\mathcal{A}$, которое не является **nbс**-множеством, содержит по крайней мере два элемента из некоторого X_p . Это означает, что такое множество содержит множество мощности 2, которое также не является **nbс**-множеством (согласно теореме 6.19).

СЛЕДСТВИЕ 6.21. ОС-алгебра любой суперразрешимой конфигурации является кошулевой.

ПРИМЕР 6.22. Так как конфигурации зеркал групп Коксетера типов А и В являются суперразрешимыми, их ОС-алгебры кошулевы. Интересно отметить, что ОС-алгебры, соответствующие группам типа D_n ($n \geq 4$), не являются даже квадратичными.

Нетрудно доказать, что если идеал I имеет квадратичный базис Гребнера относительно некоторого порядка гиперплоскостей, то алгебра $\mathcal{A}$ является суперразрешимой (см. [9]). С другой стороны, не известно ни одного примера не суперразрешимой конфигурации, для которой ОС-алгебра является кошулевой.

6.4. 1-минимальные модели для дифференциальных градуированных алгебр. В этом пункте мы определяем минимальные модели дифференциальных градуированных алгебр и алгебры Ли голономии.

Вначале напомним некоторые чисто алгебраические определения. До конца этого раздела мы будем предполагать, что k является полем характеристики 0. Пусть $D = \bigoplus_{n \geq 0} D_n$ – связная дифференциальная градуированная алгебра (ДГА). В отличие от раздела 2, дифференциал в этом разделе будет иметь степень 1. Под гомоморфизмом ДГА мы подразумеваем однородное мультипликативное отображение степени нуль, которое коммутирует с дифференциалами. Две ДГА называются *квази-изоморфными*, если они связаны последовательностью отображений ДГА, индуцирующих изоморфизмы в когомологиях.

Если ДГА D порождена элементами из D_1 , то в D определена каноническая (возрастающая) фильтрация: $D(0) = k$, а $D(n)$ есть подалгебра в D , порожденная элементами из $D(n-1)$ и $d^{-1}(D(n-1)) \cap D_1$. Напомним [10], что ДГА D называется *минимальной*, если $D = \wedge D_1$ (т.е. D свободно порождена элементами степени один как градуированная коммутативная алгебра) и $\bigcup_n D(n) = D$. Для любой ДГА A с $H^0(A) = k$ существует минимальная ДГА D и гомоморфизм ДГА $f: D \rightarrow A$ такой, что $f^*: H^*(D) \rightarrow H^*(A)$ есть изоморфизм в размерности 1 и мономорфизм в размерности 2. Дифференциальная градуированная алгебра D единственна с точностью до изоморфизма [35; теорема 12.1]. Дифференциальная градуированная алгебра D называется *1-минимальной моделью* для A .

На протяжении этого раздела мы будем обозначать через $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ градуированную коммутативную связную алгебру. Мы можем рассматривать A как ДГА с дифференциалом $d = 0$. Тогда 1-минимальная модель для A может быть реализована как двойственная алгебра к одной важной алгебре Ли, связанной с A . Пусть $\mathcal{FL} = \mathcal{FL}(A_1^*)$ – свободная алгебра Ли на пространстве A_1^* , градуированная длинами коммутаторов. Заметим, что пространство $\mathcal{FL}_2$ можно отождествить с $A_1^* \wedge A_1^*$. Умножение в A индуцирует коумножение $A_2^* \rightarrow A_1^* \wedge A_1^*$. Определим *алгебру Ли голономии* $G = G(A)$ алгебры A как фактор-алгебру алгебры $\mathcal{FL}$ по идеалу Ли, порожденному образом коумножения (ср. [4], [40]). Тогда G является градуированной алгеброй Ли и мы можем записать $G = \bigoplus_{n \geq 1} G_n$. Рассмотрим также фильтрацию в G идеалами Ли $\Gamma_n G$, где $\Gamma_n G$ есть n -й член нижнего центрального ряда для G , т.е. $\Gamma_1 G = G$ и $\Gamma_{n+1} G = [\Gamma_n G, G]$. Заметим, что градуировка в G тесно связана с фильтрацией, а именно, $\Gamma_n G = \bigoplus_{p \geq n} G_p$. В частности, если мы обозначим через $G(n)$ нильпотентную алгебру Ли $G/\Gamma_{n+1} G$, то $G(n) \approx \bigoplus_{i=1}^n G_i$ как линейные пространства над k .

Для любого n определим ДГА $D(n)$, свободно порожденную элементами степени один, как $D(n) = \wedge(G(n))^*$. Дифференциал d определяется на $(G(n))^*$ как двойственный к скобке Ли $G(n) \wedge G(n) \rightarrow G(n)$ и продолжается на $D(n)$ при помощи градуированной формулы Лейбница. Естественная проекция $G(n+1) \rightarrow G(n)$ индуцирует вложения ДГА $D(n) \subset D(n+1)$, и мы положим $D = \bigcup_{n \geq 1} D(n)$. Заметим, что $D(1) \approx \wedge A_1$ как градуированные алгебры с дифференциалами $d = 0$, так что существует естественный гомоморфизм ДГА $f: D(1) \rightarrow A$.

Для более детального анализа ДГА D положим $V_n = G_n^*$ для любого $n \geq 1$. Естественно, $V_1 = A_1$ и $d = 0$ на V_1 . Более важным является тот факт, что $D(n) = \wedge(\bigoplus_{i=1}^n V_i)$ и

$$d(V_n) \subset \sum_{i+j=n} V_i \wedge V_j \quad (6.5)$$

при $n > 1$, где символ $\wedge$, применяемый к различным пространствам, обозначает просто тензорное произведение. Теперь продолжим f до гомоморфизма ДГА $f: D \rightarrow A$, полагая $f = 0$ на $\bigoplus_{n>1} V_n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.23 [48; лемма 1.8 (i)]. *Вместе с определенным выше гомоморфизмом f , ДГА D является 1-минимальной моделью для A .*

Заметим, что здесь имеет место сдвиг размерностей: то, что мы здесь называем V_n , в работе [48] называлось V_{n-1} . Такой выбор градуировки более удобен для наших целей. Положим

$$C^p(q) = \bigoplus_{i_1+\dots+i_p=q} V_{i_1} \wedge \dots \wedge V_{i_p}, \quad C(q) = \bigoplus_p C^p(q)$$

и заметим, что $D = \bigoplus_q C(q)$ (как линейные пространства). Следующие легко проверяемые свойства были отмечены для некоторых частных конфигураций в работе [25], где использовалась совершенно другая конструкция 1-минимальной модели.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.24. (i) *Пространство $C(q)$ является подкомплексом в D для любого q , а значит, $H^*(D) = \bigoplus_q H^*(C(q))$.*

(ii) *Подпространство $B = \bigoplus_q H^q(C(q))$ является подалгеброй в $H^*(D)$, порожденной элементами из $H^1(D) = A_1$. Более того, эта алгебра квадратична.*

(iii) *Гомоморфизм $f^*: H^*(D) \rightarrow A$ является нулевым на $\bigoplus_{p \neq q} H^p(C(q))$.*

(iv) *Если алгебра A квадратична, то $B = A$ и f^* есть проекция $H^*(D)$ на B вдоль $\bigoplus_{p \neq q} H^p(C(q))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Инвариантность пространства $C(q)$ относительно дифференциала d вытекает непосредственно из (3.1), что доказывает первое утверждение. (ii) Обозначим через J идеал в $D(1) = \wedge V_1 = \bigoplus_q C^q(q)$, порожденный элементами из $d(V_2)$. Тогда $d(C^{q-1}(q)) = J_q$, откуда $B = \bigoplus_q H^q(C(q)) = \wedge V_1 / J$. (iii) Это следует непосредственно из конструкции отображения f . (iv) Если алгебра A квадратична, то $A = \wedge A_1 / I$, где I – некоторый однородный идеал в $\wedge A_1$, порожденный элементами из I_2 . Из конструкции алгебры D вытекает, что $V_1 = A_1$ и $d(V_2) = I_2$. Следовательно, $B = A$. Используя (iii) и переходя к когомологиям, мы получаем второе утверждение.

6.5. 1-МИНИМАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ И КОШУЛЕВЫ АЛГЕБРЫ. Здесь мы доказываем основной результат этого раздела – соотношение между 1-минимальными моделями и свойством кошулевости. Мы будем использовать универсальную обертывающую алгебру U для алгебры Ли G . Более явное описание алгебры U заключается в следующем. Пусть $T = T(A_1^*)$ – тензорная алгебра линейного пространства A_1^* и $\tau: A_1^* \otimes A_1^* \rightarrow A_1^* \otimes A_1^*$ – линейное отображение, определяемое отображениями $v \otimes w \mapsto w \otimes v$. Тогда U является фактор-алгеброй алгебры T по идеалу J , порожденному элементами из $(\text{Im}(1 - \tau)) \cap \text{Im } \Delta$, где Δ есть коумножение $A_2^* \rightarrow A_1^* \otimes A_1^*$. Это описание задает градуировку на U (которая индуцирована стандартной градуировкой на T) и показывает, что U является квадратичной алгеброй.

ЛЕММА 6.25. *Если алгебра A является квадратичной, то она совпадает с квадратично двойственной алгеброй ${}^{\perp}U$, т.е. $A = U^{\perp}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если алгебра A квадратична, то она является фактор-алгеброй алгебры $\wedge A_1$ по идеалу, порожденному ядром произведения $A_1 \wedge A_1 \rightarrow A_2$. Эквивалентно, A является фактор-алгеброй тензорной алгебры пространства A_1 по идеалу, порожденному ядром произведения $A_1 \otimes A_1 \rightarrow A_2$ и элементами $a + \tau^*a$, $a \in A_1 \otimes A_1$. Отсюда вытекает требуемое утверждение, так как компонента степени 2 этого идеала является аннулятором компоненты степени 2 идеала J .

ЗАМЕЧАНИЕ 6.26. Аналогично можно показать, что в общем случае алгебра $U^{\perp}$ является фактор-алгеброй алгебры $\wedge A_1$ по идеалу, порожденному ядром умножения $A_1 \wedge A_1 \rightarrow A_2$.

Теперь мы изучим алгебру Йонеды $\text{Ext} = \bigoplus_{p,q} (\text{Ext}_U^p(k, k))_q$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.27. *Биградуированная алгебра Ext совпадает с алгеброй $H^*(D) = \bigoplus_p H^p(D)$, где вторая (чистая) градуировка индуцируется на $H^p(D)$ градуировкой ДГА D подкомплексами $C(q)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы имеем $\text{Ext}^p = H^p(G, k) = H^p(\text{Hom}(\wedge G, k))$ (см., например, главу XIII в [12]). Пространство n -коцепей в комплексе $\overline{C} = \text{Hom}(\wedge G, k)$ состоит из кососимметрических полилинейных функций от n переменных из G с дифференциалом δ , определенным по формуле

$$(\delta f)(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (-1)^{i+j} f([x_i, x_j], x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_{n+1}).$$

Функции чистой степени q суть те, которые не обращаются в нуль только при условии $\sum_{i=1}^n \deg x_i = q$, где $\deg$ обозначает исходную градуировку на G . Такие функции образуют конечномерный подкомплекс $\overline{C}(q)$ в $\overline{C}$, причем $\overline{C} = \bigoplus_q \overline{C}(q)$. Так как комплекс $\overline{C}(q)$ конечномерен, мы имеем

$$\overline{C}(q) = \left(\bigoplus_{i_1 + i_2 + \dots + i_p = q} G_{i_1} \wedge G_{i_2} \wedge \dots \wedge G_{i_p} \right)^* = C(q)$$

как градуированные линейные пространства. Следовательно, мы можем отождествить $\overline{C}$ и D как линейные пространства. Тогда умножение в алгебре D индуцирует стандартное перетасовочное умножение кососимметрических форм из $\overline{C}$. Ограничения дифференциалов δ и d на мультипликативные образующие, очевидно, совпадают с точностью до знака. Кроме того, оба дифференциала удовлетворяют градуированной формуле Лейбница относительно умножения в алгебре D и перетасовочного умножения на $\overline{C}$. Итак, эти дифференциалы совпадают с точностью до знака, что доказывает утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.28. *Гомоморфизм градуированных алгебр $f^*: H^*(D) \rightarrow A$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда алгебра A является кошулевой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что алгебра A кошулева. Тогда она является квадратичной и U – ее квадратично двойственная алгебра, так что U также является кошулевой алгеброй. Следовательно,

$$H^p(C(q)) = (\text{Ext}_U^p(k, k))_q = 0 \quad (6.6)$$

при $q \neq p$. Теперь из предложения 6.24 (iv) вытекает, что f^* является изоморфизмом.

Обратно, пусть f^* является изоморфизмом. Тогда мы немедленно получаем, что

$$\bigoplus_{p \neq q} H^p(C(q)) = 0,$$

т.е. U – кошулева алгебра. Из предложения 6.24 (iii) вытекает, что $A \approx B$, а значит, алгебра A квадратична согласно предложению 6.24 (ii). Следовательно, A является квадратично двойственной алгеброй к U , откуда вытекает, что A – также кошулева алгебра.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.29. Из предложения 6.24 также вытекает, что оба свойства алгебры A из предложения 6.28 эквивалентны тому, что алгебра A квадратична и алгебра когомологий $H^*(D)$ порождена элементами степени 1.

6.6. Формальные топологические пространства. В этом пункте мы даем интерпретацию результатов предыдущего пункта для дополнений комплексных центральных конфигураций. Основным свойством дополнения M , используемым для такой интерпретации, является формальность.

Пространство X (связное и с конечными числами Бетти) называется *формальным* [35; с. 158], если оно имеет гомотопический тип симплициального комплекса Δ и ДГА $A_{PL}(\Delta)$ де Рама, состоящая из $\mathbb{Q}$ -полиномиальных форм на комплексе Δ , квази-изоморфна алгебре $A = H^*(X, \mathbb{Q})$ с нулевым дифференциалом.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.30. Эквивалентное определение формальности пространства X заключается в том, что его $\mathbb{Q}_\infty$ -пополнение $\mathbb{Q}(X)$ зависит только от A (см., например, [10]). Проясняющее многие детали обсуждение этого определения можно найти в [37; с. 235–236].

Непосредственно из следствия 4.5 вытекает, что дополнение M произвольной конфигурации комплексных гиперплоскостей формально. Другим хорошо известным классом формальных пространств являются компактные кэлеровы многообразия [19].

Если пространство X формально, то 1-минимальная модель алгебры A также является 1-минимальной моделью алгебры $A_{PL}(\Delta)$ и называется 1-минимальной моделью пространства X . Тогда алгебра Ли голономии $G = G(X)$ алгебры A является $\mathbb{Q}$ -версией $\mathbb{R}$ -алгебры, введенной Ченом в [13], и называется *алгеброй Ли голономии пространства X* .

Используя предложение 6.23, можно получить следующую интерпретацию алгебры голономии G формального пространства X в терминах группы $\pi_1(X)$. Пусть Γ_n есть n -й член нижнего центрального ряда группы $\pi = \pi_1(X)$, т.е. $\Gamma_1 = \pi$ и далее индуктивно $\Gamma_n = [\Gamma_{n-1}, \pi]$. Градуированная абелева группа $\text{Gr}_\Gamma^*(\pi) = \bigoplus_{n \geq 1} (\Gamma_n / \Gamma_{n+1})$ имеет естественную структуру градуированной алгебры Ли над $\mathbb{Z}$, индуцированную групповым коммутатором. Тогда мы имеем изоморфизм градуированных алгебр Ли

$G_* \approx \mathrm{Gr}_\Gamma^*(\pi_1(X)) \otimes \mathbb{Q}$, см., например, [35]. В частности, мы имеем $\dim G_n = \varphi_n$, где $\varphi_n = \mathrm{rk}(\Gamma_n/\Gamma_{n+1})$. Применяя теорему Пуанкаре–Биркгофа–Витта, мы получаем следующее выражение для ряда Гильберта универсальной обертывающей алгебры $U = U(X)$ алгебры Ли G :

$$H(U, t) = \prod_{n \geq 1} (1 - t^n)^{-\varphi_n}. \quad (6.7)$$

Теперь мы определим основное для этого раздела свойство пространства X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.31. Пространство X называется рациональным пространством типа $K[\pi, 1]$, если его 1-минимальная модель D является *минимальной моделью* (см. [64]), т.е. $f^*: H^*(D) \rightarrow A$ есть изоморфизм.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.32. Эквивалентное определение, объясняющее название, заключается в том, что $\mathbb{Q}$ -пополнение $\mathbb{Q}_\infty(X)$ пространства X асферично, т.е. $\pi_n \mathbb{Q}_\infty(X) = 0$ при $n > 1$ (см. [10; 12.8 (iii)]).

Применяя предложение 6.28, мы получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 6.33. Пусть X – формальное топологическое пространство. Тогда X является рациональным $K[\pi, 1]$ тогда и только тогда, когда A есть кошулева алгебра.

СЛЕДСТВИЕ 6.34. Если формальное пространство X является рациональным $K[\pi, 1]$, то имеет место следующая формула:

$$P(X, -t) = H(A, -t) = \prod_{n \geq 1} (1 - t^n)^{\varphi_n},$$

где $P(X, t)$ – многочлен Пуанкаре для X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 6.33 алгебра $A = H^*(X, \mathbb{Q})$ кошулева. Так как U является квадратично двойственной алгеброй к A , из теоремы 6.15 (iii) следует, что

$$H(A, -t) = H(U, t)^{-1}.$$

Теперь результат вытекает из (6.7).

Эта формула обычно называется формулой НЦР (нижнего центрального ряда). Вопрос о том, может ли формула НЦР иметь место для конфигураций, дополнения которых не являются рациональными $K[\pi, 1]$, остается открытым. Следующий результат дает отрицательный ответ на эту проблему в случае малой размерности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.35. Если $\ell = 3$ и конфигурация $\mathcal{A}$ удовлетворяет формуле НЦР, то дополнение M является рациональным пространством типа $K[\pi, 1]$.

Перед тем как доказывать это предложение, мы сведем его к конфигурации на плоскости (возможно нецентральной) при помощи процедуры деконизации. Зафиксируем гиперплоскость $H \in \mathcal{A}$, заданную уравнением $\alpha = 0$, и обозначим через $\mathcal{A}'$ деконизацию конфигурации $\mathcal{A}$ – конфигурацию в аффинной гиперплоскости H' , задаваемой уравнением $\alpha = 1$. Пусть M' есть дополнение к $\mathcal{A}'$ в $H' \cong \mathbb{C}^{\ell-1}$ и $A' = H^*(M', \mathbb{Q})$ – ОС-алгебра конфигурации $\mathcal{A}'$, а $U' = U(M')$ – ее алгебра голономии. Положим также $\varphi'_n = \mathrm{rk}(\Gamma_n \pi_1(X')/\Gamma_{n+1} \pi_1(X'))$, $n \geq 1$.

Мы знаем, что пространство M' формально и $A \cong A'\langle e \rangle$, где e – образующая степени 1 (см. предложение 2.18). Теперь мы можем установить две эквивалентности понятий для $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$. Обозначим 1-минимальную модель алгебры A' через $f': (\wedge V', d') \rightarrow (A', 0)$. Как вытекает из формулы Кюннета, $f = f' \otimes \text{id}: (\wedge V' \otimes \wedge(e), d' \otimes \text{id}) \rightarrow (A, 0)$ есть 1-минимальная модель для A . Следовательно, f^* является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $(f')^*$ является изоморфизмом. Другими словами, дополнение M является рациональным $K[\pi, 1]$ тогда и только тогда, когда M' является рациональным $K[\pi, 1]$. С другой стороны, легко видеть, что $\varphi_k = \varphi'_k$ при $k > 1$ и $\varphi_1 = \varphi'_1 + 1$. Так как $H(A, t) = H(A', t)(1 + t)$, мы получаем, что формула НЦР имеет место для конфигурации $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда она имеет место для $\mathcal{A}'$.

Обозначим многочлен Пуанкаре дополнения M' через $H(A', t) = 1 + mt + nt^2$. Тогда формула НЦР для $\mathcal{A}'$ имеет вид

$$H(U', t) = (1 - mt + nt^2)^{-1}.$$

Далее, используя теорему 6.33, мы получим, что предложение 6.35 будет вытекать из следующей простой леммы.

ЛЕММА 6.36. Пусть U' – квадратичная алгебра, для которой

$$H(U', t) = (1 - mt + nt^2)^{-1}. \quad (6.8)$$

Тогда U' является кошулевой алгеброй.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Пусть I – канонический идеал алгебры U' . Из условия (6.8) немедленно вытекает, что $m = \dim U'_1$ и $n = \dim I_2$. Для любой квадратичной алгебры естественный комплекс

$$0 \longrightarrow U' \otimes I_2 \longrightarrow U' \otimes U'_1 \longrightarrow U' \longrightarrow k \longrightarrow 0$$

является точным, за исключением, возможно, члена $U' \otimes I_2$. Так как все отображения в этом комплексе имеют степень 1, мы имеем

$$(\text{Ext}_{U'}^p(k, k))_q = 0 \quad (6.9)$$

при $0 \leq p \leq 2$ и $q \neq p$. Из условия (6.8) следует, что предыдущий комплекс действительно является точным, а значит, является градуированной свободной резольвентой модуля k . Итак, $\text{Ext}_{U'}^i(k, k) = 0$ при $i \geq 3$, что вместе с (6.9) дает требуемое утверждение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ. Из формулы двойственности Кошуля (теорема 6.15 (iii)) и (6.8) вытекает, что алгебры A' и $(U')^!$ имеют одинаковые ряды Гильберта. С другой стороны, так как алгебра A' порождена элементами степени один, она является фактор-алгеброй алгебры $(U')^!$. Следовательно, $A' \approx (U')^!$ и A' является кошулевой алгеброй.

В завершение этого пункта мы приведем пример, показывающий, что квадратичность алгебры A не является достаточным условием для кошулевости.

ПРИМЕР 6.37. Рассмотрим следующую конфигурацию ранга 3: $\{x, y, x+y, z, x-z, y-z, x+y-2z\}$. Тогда ее ОС-алгебра является квадратичной. Легко вычислить, что $H(A', t) = 1 + 6t + 10t^2$. Если M является рациональным $K[\pi, 1]$, то из следствия 6.34 и (6.7) вытекает, что ряд $(1 - 6t + 10t^2)^{-1}$ равен $H(U', t)$, откуда бы следовало, что все его коэффициенты неотрицательны. Но это противоречит тому факту, что корни многочлена $1 - 6t + 10t^2$ не являются вещественными (см. доказательство леммы 3.4 из [1]).

6.7. Проблемы. Доказать или опровергнуть следующие два утверждения.

1. ОС-алгебра $A(\mathcal{A})$ является кошулевой тогда и только тогда, когда конфигурация $\mathcal{A}$ является суперразрешимой.

В чисто алгебраических терминах это утверждение означает, что в классе ОС-алгебр свойство кошулевости эквивалентно свойству иметь квадратичный базис Гребнера (относительно градуированно-лексикографического порядка для некоторого упорядочивания образующих). В общем случае известно множество серий примеров кошулевых алгебр, не имеющих квадратичного базиса Гребнера.

Эта проблема интересна уже для конфигураций ранга 3.

2. Формула НЦР имеет место для конфигурации $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда алгебра $A(\mathcal{A})$ является кошулевой, т.е. дополнение M конфигурации $\mathcal{A}$ является рациональным $K[\pi, 1]$ (см. предложение 6.35).

Опять-таки, в чисто алгебраических терминах это утверждение означает, что для ОС-алгебр численный критерий из теоремы 6.15 (iii) является достаточным для того, чтобы алгебра была кошулевой. Напомним, что соответствующие контрпримеры для более общих алгебр можно найти в [54], [56].

7. Когомологии ОС-комплексов

В этом разделе мы изучаем ОС-алгебру A произвольной конфигурации как коцепной комплекс относительно умножения на некоторый элемент $a \in A_1$. Этот комплекс впервые появился в работах по гипергеометрическим функциям, в первую очередь, в работах Омото [2], [3], а также в связанной с ними работе [24] по когомологиям локальных систем. Начало развитию алгебраической теории этого комплекса (в основном, для случая элемента a общего положения) было положено в работе [67], где была доказана теорема 7.5. Часть этой теоремы также можно вывести из детерминантной формулы из [58]. Результаты в случае общего положения дают нижние границы для размерностей когомологий комплекса для произвольного a (см. п.7.3). Этот факт был обнаружен в [23] в более общей ситуации.

Выработка общего подхода в случае необщего положения была начата в работе [26], где были введены резонансные многообразия R_1^p . Гипотеза Фалька о том, что неприводимые компоненты многообразия R_1^1 являются линейными, была впервые доказана независимо в [15] и [44]. Это свойство было обобщено на случай произвольного R_m^p в работах [45] и [14]. Другие свойства многообразий R_m^1 и результаты 8.5 и 8.6 были получены в [46].

В большинстве результатов этого раздела основное кольцо k должно быть полем, так что мы будем предполагать это с самого начала. Напомним, что в п. 5.4 мы определили коцепной комплекс (A, a) для любого элемента $a \in E_1 = A_1$. Этот комплекс имеет вид

$$0 \longrightarrow A_0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_\ell \longrightarrow 0,$$

где дифференциал является умножением на a . Напомним также, что $H^*(A, a) = 0$ за исключением случая, когда $\sum_{H \in \mathcal{A}_j} a_H = 0$ для любого центрального множителя $\mathcal{A}_j$ конфигурации $\mathcal{A}$, где $a = \sum_{H \in \mathcal{A}} a_H e_H$.

Основным вопросом, изучаемом в этом разделе, является зависимость размерностей $\dim H^*(A, a)$ от элемента a . Некоторые топологические мотивировки этого вопроса приведены в разделе 8.

7.1. Комплекс пучков на L^{op} . В этом пункте мы представим комплекс (A, a) как комплекс глобальных сечений некоторого комплекса пучков. Топологическим пространством, на котором определены эти пучки, является частично упорядоченное множество $L^{\text{op}} = L^{\text{op}}(\mathcal{A})$ всех непустых пересечений гиперплоскостей из $\mathcal{A}$, упорядоченных *по включению*. Это частично упорядоченное подмножество имеет единственный максимальный элемент V и обладает единственным минимальным элементом только в случае, если конфигурация $\mathcal{A}$ центральна. Подмножество в L^{op} называется *возрастающим*, если вместе с каждым элементом Y оно содержит все элементы в L^{op} , большие, чем Y . Каждый элемент $X \in L^{\text{op}}$ определяет возрастающее множество $L^X = \{Y \in L^{\text{op}} \mid Y \geq X\}$ и подконфигурацию $\mathcal{A}_X = \{H \in \mathcal{A} \mid X \subset H\}$ в $\mathcal{A}$. Стандартная (*порядковая*) топология на L^{op} задается всеми возрастающими подмножествами в L^{op} . Эта топология имеет минимальную базу, состоящую из множеств L^X для всех $X \in L^{\text{op}}$.

Пучки на пространстве L^{op} можно отождествлять с функторами на L^{op} , рассматриваемом как малая категория, объектами которой являются элементы, а морфизмами – пары $(X \leq Y)$. Если $\mathcal{F}$ – контравариантный функтор из L в аддитивную категорию, то сечение соответствующего предпучка на базисном открытом множестве L^X определяется как $\mathcal{F}(X)$, а ограничение $\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ ($X \leq Y$) определяется морфизмом $\mathcal{F}(X \leq Y)$. Тогда при пучковизации мы получаем для любого подмножества $U \subset L^{\text{op}}$ объект сечений над U , определяемый по формуле

$$\Gamma(U, \mathcal{F}) = \left\{ (a_X) \in \bigoplus_{X \in U} \mathcal{F}(X) \mid \mathcal{F}(X \leq Y)(a_X) = a_Y, X, Y \in U \right\}.$$

Зафиксируем p , $0 \leq p \leq \ell$, и для каждого $X \in L^{\text{op}}$ положим $\mathcal{F}^p(X) = A_p(\mathcal{A}_X)$. Напомним (см. п. 2.3), что $A = \bigoplus_{Z \in L^{\text{op}}} A_Z$, где $A_Z = A_p(\mathcal{A}_Z)$, если $\dim Z = \ell - p$ (см. предложение 2.7). Линейные пространства A_Z служат как строительные блоки, а именно, $A_p(\mathcal{A}_X) = \bigoplus A_Z$, где сумма берется по всем элементам $Z \in L$ размерности $\ell - p$ таким, что $Z \geq X$ (см. предложение 2.7). Следовательно, если $Y \geq X$, то $\mathcal{F}^p(Y)$ является прямым слагаемым в $\mathcal{F}^p(X)$ и имеется проекция $\mathcal{F}^p(X) \rightarrow \mathcal{F}^p(Y)$. Эти проекции определяют контравариантный функтор на L , а значит, пучок $\mathcal{F}^p$ на L^{op} . Заметим, что носителем пучка $\mathcal{F}^p$ является подмножество в L^{op} , состоящее из всех элементов, размерность которых не превосходит $\ell - p$.

Предложение 7.1. *Для любого p мы имеем*

$$\Gamma(L^{\text{op}}, \mathcal{F}^p) = A_p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем p . Так как $A_p = \bigoplus_{\dim Y = \ell - p} A_Y$ и для любого $X \in L^{\text{op}}$

$$A_p(\mathcal{A}_X) = \bigoplus_{\dim Y = \ell - p, Y \geq X} A_Y,$$

имеет место каноническая проекция $\rho_X: A_p \rightarrow \mathcal{F}^p(X)$. Очевидно, $\rho = (\rho_X)_X$ является инъективным линейным отображением $A_p \rightarrow \Gamma(L^{\text{op}}, \mathcal{F}^p)$. Достаточно проверить, что отображение ρ сюръективно. Пусть $(a_X)_{X \in L^{\text{op}}} \in \Gamma(L^{\text{op}}, \mathcal{F}^p)$. Здесь $a_X \in A_p(\mathcal{A}_X)$, откуда $a_X = (a_{X,Y})_{\dim Y = \ell - p, Y \geq X}$. Для Y из этого множества ограничение сечения a_X на Y есть $a_{X,Y}$. Следовательно, так как (a_X) является сечением, $a_{X,Y}$ не зависит от X (для любого $X \leq Y$) и может быть обозначено просто $a(Y)$. Теперь, полагая $a = (a(Y))_{\dim Y = \ell - p} \in A_p$, мы получаем $\rho(a) = (a_X)$, что завершает доказательство.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. Для любых $X \in L^{\text{op}}$ и $p < \ell - \dim X$ мы имеем

$$\Gamma(L^X, \mathcal{F}^p) = A_p(\mathcal{A}_X).$$

Доказательство аналогично доказательству предложения 7.1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.3. Для любого p пучок $\mathcal{F}^p$ является вялым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{U} \subset L^{\text{op}}$ – открытое (т.е. возрастающее) непустое собственное подмножество и $a = (a_X)_{X \in \mathcal{U}} \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{F}^p)$. Пусть, далее, Z – один из максимальных элементов в $L^{\text{op}} \setminus \mathcal{U}$. Достаточно доказать, что сечение a продолжается на Z . Рассмотрим непустое множество $\mathcal{U}_Z = L^Z \cap \mathcal{U}$. Если $\dim Z \geq \ell - p$, то ограничение b сечения a на $\mathcal{U}_Z$ есть 0 и мы положим $a_Z = 0$. Если же $\dim Z < \ell - p$, то в силу предложения 7.2 существует (единственный) элемент $c \in \mathcal{F}^p(Z)$, продолжающий сечение b на Z . Тогда положим $a_Z = c$, и, тем самым, доказательство завершено.

Теперь зафиксируем элемент $a \in A_1$ и соберем пучки $\mathcal{F}^p$ в один комплекс пучков. Для этого мы для любого $X \in L^{\text{op}}$ положим $a(X) = \sum a_i e_i$, где суммирование ведется по всем индексам $i \in [n]_X$. Обозначим через $d_a(X)$ умножение слева на элемент $a(X)$. Очевидно, что для любого p множество $(d_a(X))_{X \in L^{\text{op}}}$ является гомоморфизмом $d_a(p): \mathcal{F}^p \rightarrow \mathcal{F}^{p+1}$, и эти гомоморфизмы образуют комплекс пучков

$$\mathcal{F}^0 \longrightarrow \mathcal{F}^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{F}^\ell \longrightarrow 0. \quad (7.1)$$

Кроме того, $\mathcal{E} = \ker(d_a) \subset \mathcal{F}^0$ является пучком, с единственным ненулевым ростком над V , равным k . Следовательно, мы можем аугментировать комплекс (7.1) слева и получить комплекс

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}^0 \longrightarrow \mathcal{F}^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{F}^\ell \longrightarrow 0. \quad (7.2)$$

Следующая лемма является почти тавтологией.

ЛЕММА 7.4. Комплекс (7.2) является точным (и, тем самым, определяет вялую резольвенту пучка $\mathcal{E}$) тогда и только тогда, когда комплекс $(A(\mathcal{A}_X), d_a(X))$ ациклическ для любого $X \in L^{\text{op}} \setminus \{V\}$.

7.2. Когомологии в случае элемента a общего положения.

ТЕОРЕМА 7.5. (i) Пусть $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_n\}$ – произвольная конфигурация с частично упорядоченным множеством пересечений L ранга ℓ . Предположим, что элемент $a = \sum_{i=1}^n a_i e_i \in A_1$ удовлетворяет условию

$$\sum_{X \subset H_i} a_i \neq 0 \quad (7.3)$$

для всех $X \in L^{\text{op}}$ таких, что конфигурация $\mathcal{A}_X$ неприводима. Тогда $H^p(A, a) = 0$ для любого $p < \ell$.

(ii) Пусть $\mathcal{A}$ и L – те же, что и в (i), но конфигурация $\mathcal{A}$ центральна. Предположим, что элемент a удовлетворяет условию (7.3) для всех $X \in L^{\text{op}}$, не равных минимальному элементу, но $\sum_{i=1}^n a_i = 0$. Тогда $H^p(A, a) = 0$ для любого $p < \ell - 1$ и $\dim H^{\ell-1}(A, a) = \dim H^{\ell}(A, a) = \overline{\chi}(\mathcal{A})$ (напомним, что $\overline{\chi}(\mathcal{A})$ есть бета-инвариант конфигурации $\mathcal{A}$, равный $(H(A, t)/(1+t))|_{t=-1}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем (ii) в предположении, что (i) имеет место для конфигураций меньших рангов (случай ранга 1 тривиален). Обозначим через $\mathcal{A}'$ деконизацию конфигурации $\mathcal{A}$ относительно гиперплоскости H_1 . Также обозначим через A' ОС-алгебру конфигурации $\mathcal{A}'$, а через L' – частично упорядоченное множество пересечений конфигурации $\mathcal{A}'$. Напомним, что $H(A, t) = (1+t)H(A', t)$. Положим $a' = \sum_{i=2}^n a_i e_i$.

Так как a удовлетворяет условию (7.3) для любого элемента $X \in L^{\text{op}}$, не являющегося минимальным, мы получаем, что a' удовлетворяет (7.3) для любого $X \in (L')^{\text{op}}$. Следовательно, согласно индуктивной гипотезе мы имеем

$$H^p(A', a') = 0, \quad p \neq \ell - 1. \quad (7.4)$$

Так как $\overline{\chi}(\mathcal{A})$ есть эйлерова характеристика комплекса (A', a') , мы получаем

$$\dim H^{\ell-1}(A', a') = |\overline{\chi}(\mathcal{A})|. \quad (7.5)$$

Так как $a_1 = -\sum_{i=2}^n a_i$, мы можем применить точную последовательность (5.8), которая в текущих обозначениях приобретает вид

$$0 \longrightarrow H^{p-1}(A', a') \longrightarrow H^p(A, a) \longrightarrow H^p(A', a') \longrightarrow 0. \quad (7.6)$$

Теперь доказываемое утверждение вытекает из (7.4)–(7.6).

Докажем (i) в предположении, что (ii) имеет место для конфигураций того же или меньшего ранга. Рассмотрим комплекс (7.1) вялых пучков на L^{op} и зафиксируем $X \in L^{\text{op}} \setminus \{V\}$. Так как $\mathcal{A}_X$ является центральной конфигурацией в пространстве размерности, не превосходящей ℓ , мы можем использовать утверждение (ii). Если условие (7.3) выполнено для X , то комплекс $(A(\mathcal{A}_X), a(X))$ ациклический в силу следствия 5.16. Если же X не удовлетворяет (7.3), то конфигурация $\mathcal{A}_X$ является произведением как минимум двух центральных конфигураций. Это означает, что многочлен $H(A', t)$ делится на $1+t$, откуда $\overline{\chi}(A(\mathcal{A}_X)) = 0$. Таким образом, из (ii) вытекает, что комплекс $(A(\mathcal{A}_X), a(X))$ снова ациклический. В обоих случаях из леммы 7.4 следует, что (7.2) является вялой резольвентой для $\mathcal{E}$. Используя предложение 7.1, мы получаем

$$H^p(A, a) \cong H^p(L^{\text{op}}, \mathcal{E}) \quad (7.7)$$

для любого p .

Вычисление когомологий $H^p(L^{\text{op}}, \mathcal{E})$ является рутинной комбинаторной задачей. Вначале мы можем использовать точную последовательность пучков

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \tilde{k} \longrightarrow \tilde{k}_0 \longrightarrow 0,$$

где $\tilde{k}$ – локально постоянный пучок, ростки которого равны k , а $\tilde{k}_0$ – его ограничение на $L_0 = L^{\text{op}} \setminus \{V\}$. Так как пучок $\tilde{k}$ является вялым, соответствующая когомологическая последовательность дает $H^p(L^{\text{op}}, \mathcal{E}) = \tilde{H}^{p-1}(L_0, \tilde{k}_0)$ для любого p . Теперь из того, что L^{op} является геометрической полурешеткой, вытекает, что $H^p(L^{\text{op}}, \mathcal{E}) = 0$ при $p < \ell - 1$ (см. п. 2.1). Это завершает доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.6. Условия из теоремы 7.5 не являются необходимыми для обращения в нуль когомологий $H^p = H^p(A, a)$ при $p < \ell$. Если комплекс (7.2) не является точным, то он определяет пучки когомологий $\mathcal{H}^p$ (некоторые из которых ненулевые) и спектральную последовательность с $E_2^{p,q} = H^p(L^{\text{op}}, \mathcal{H}^q)$, сходящуюся к H^{p+q} . В принципе, можно использовать эту спектральную последовательность для вычисления когомологий $H^*(A, a)$ в частных случаях. Мы приведем пример такого вычисления в предложении 7.8.

Важным для приложений частным случаем является класс конфигураций общего положения. В этом случае все конфигурации $\mathcal{A}_X$, для которых $\text{rk } X > 1$, являются приводимыми, и условие из теоремы 7.5 заключается в том, что $a_i \neq 0$ для всех i . Это условие может быть существенно ослаблено.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.7. Пусть $\mathcal{A}$ – конфигурация, находящаяся в общем положении, и $a \neq 0$. Тогда $H^p(A, a) = 0$ для любого $p < \ell$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним (см. пример 5.12), что в этом случае ОС-идеал I является $(\ell + 1)$ -й степенью максимального идеала $\mathfrak{m}$ в E . В частности, идеал I инвариантен относительно естественного действия группы $\text{GL}(n, k)$ на E . Следовательно, эта группа действует на A , и это действие транзитивно на множестве $A_1 \setminus \{0\}$.

Теперь зафиксируем элемент $a \in A_1 \setminus \{0\}$ и положим $b = \sum_{i=1}^n e_i$. Существует автоморфизм ψ алгебры A , переводящий a в b . Этот автоморфизм ψ определяет изоморфизм $(A, a) \rightarrow (A, b)$. В соответствии с теоремой 7.5 мы имеем $H^p(A, b) = 0$ для любого $p < \ell$. Следовательно, то же самое верно и для (A, a) , что завершает доказательство.

Другим частным случаем, который мы рассмотрим, является случай произвольной конфигурации, но $a = e_1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.8. Для любого целого p равенство $H^p(A, e_1) = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда не существует элемента $X \in L$ размерности $\ell - p$ такого, что $X \cap H_1 = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $L_1 = \{X \in L^{\text{op}} \mid X \subset H_1\}$ и заметим, что для $a = e_1$ мы имеем $a(X) = e_1$ при $X \in L_1$ и $a(X) = 0$ иначе. Отсюда и из следствия 5.16 вытекает, что для любого q пучок когомологий $\mathcal{H}^q$ является нулевым на L_1 , а на $L^{\text{op}} \setminus L_1$ совпадает с ограничением пучка $\mathcal{F}^q$ на это множество. Это позволяет рассмотреть короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}^q \longrightarrow \mathcal{F}^q \longrightarrow \mathcal{H}^q \longrightarrow 0, \quad (7.8)$$

где пучок $\mathcal{G}^q$ есть 0 на $L^{\text{op}} \setminus L_1$ и совпадает с ограничением $\mathcal{F}_{L_1}^q$ пучка $\mathcal{F}^q$ на L_1 . Так как пучок $\mathcal{F}^p$ является вялым, $\mathcal{F}_{L_1}^p$ также является вялым пучком (см., например, предложение 1.6 из [67]). Так как множество L_1 является замкнутым, $H^p(L, \mathcal{G}^q) = H^p(L_1, \mathcal{F}_{L_1}^q) = 0$ для всех $p > 0$. Тогда из кохомологической последовательности, соответствующей (7.8), мы получаем $H^p(L^{\text{op}}, \mathcal{H}^q) = 0$ для любого $p > 0$. Следовательно, $E_2^{p,q} = 0$ для любого q и $p > 0$. Отсюда вытекает, что $H^p(A, e_1) = E_2^{0,p} = \Gamma(L^{\text{op}}, \mathcal{H}^p)$.

Теперь предположим, что существует ненулевое сечение $s \in \Gamma(L^{\text{op}}, \mathcal{H}^p)$. По определению пучка $\mathcal{F}^p$ отсюда следует, что существует элемент $X \in L$ размерности $\ell - p$, для которого $s(X) \neq 0$. Так как, кроме того, $s = 0$ на L_1 , мы имеем $X \cap H_1 = \emptyset$.

Обратно, предположим, что существует элемент $X \in L$ размерности $\ell - p$ такой, что $X \cap H_1 = \emptyset$. Выберем $a \in A_X \setminus \{0\}$. Для любого $Y \in L$, $Y \leq X$, мы имеем $a \in A_p(\mathcal{A}_Y) = \bigoplus_{\dim Z = \ell - p, Z \geq Y} A_Z$, так как X принадлежит множеству таких Z . Тогда для любого $Y \in L^{\text{op}}$ положим $s(Y) = a(Y)$, если $Y \leq X$, и $s(Y) = 0$ иначе. Легко проверить, что $(s(Y))_{Y \in L} \in \Gamma(L^{\text{op}}, \mathcal{H}^p)$. Так как этот элемент ненулевой, доказательство завершено.

Это предложение также можно доказать, используя **nbс**-базис вместо пучков.

Весьма поучительно и полезно для приложений получить явную интерпретацию изоморфизма (7.7). Мы получим такую интерпретацию для обратного изоморфизма, что делает формулы более простыми.

Мы будем действовать в предположениях и обозначениях теоремы 7.5. В частности, (7.2) является вялой резольвентой пучка $\mathcal{E}$. Положим $\mathcal{E}^0 = \mathcal{E}$ и обозначим через $\mathcal{E}^p$ подпучок в $\mathcal{F}^p$, являющийся ядром дифференциала в резольвенте (т.е. представляющий собой p -е сизигии в резольвенте). Тогда для любого p последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}^p \longrightarrow \mathcal{F}^p \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{F}^\ell \longrightarrow 0$$

является вялой резольвентой для $\mathcal{E}^p$. Следовательно, $H^i(L^{\text{op}}, \mathcal{E}^p) = 0$ при $i \neq \ell - p - 1$ и

$$H^{\ell-p-1}(L^{\text{op}}, \mathcal{E}^p) \cong H^{\ell-1}(L^{\text{op}}, \mathcal{E}). \quad (7.9)$$

Изоморфизм (7.9) является композицией связывающих гомоморфизмов в кохомологических последовательностях, соответствующих коротким точным последовательностям

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}^i \longrightarrow \mathcal{F}^i \longrightarrow \mathcal{E}^{i+1} \longrightarrow 0. \quad (7.10)$$

Единственным нетривиальным связывающим гомоморфизмом для этой последовательности является

$$\delta: H^{\ell-i-2}(L^{\text{op}}, \mathcal{E}^{i+1}) \cong H^{\ell-i-1}(L^{\text{op}}, \mathcal{E}^i)$$

и, по определению, мы можем символически записать $\delta = d \circ d_a^{-1}$. Здесь $d_a: \mathcal{F}^i \rightarrow \mathcal{F}^{i+1}$ есть умножение на соответствующие ограничения $a(X)$ сечения a , а d — стандартный дифференциал $d: C^{\ell-i-2} \rightarrow C^{\ell-i-1}$, где мы обозначили через C^* стандартный коцепной комплекс на флагах в L^{op} с коэффициентами в $\mathcal{F}^i$. Следовательно, $\delta^{-1} = d_a \circ d^{-1}$.

Для того чтобы описать изоморфизм δ^{-1} явно, зафиксируем флаг $F = (X_1 < X_2 < \dots < X_{\ell-i} = X)$ такой, что $\dim X_j = j$ и $b \in A_i(\mathcal{A}_X) = A_i(X)$. Отсюда мы получаем

элемент $\beta \in C^{\ell-i-1}$, принимающий лишь одно ненулевое значение $\beta(F) = b$. Тогда выберем элемент $\beta' \in C^{\ell-i-2}$ такой, что $d\beta' = \beta$. Наиболее простой способ выбора элемента β' заключается в следующем. Положим $F' = (X_1 < \dots < X_{\ell-i-1} = X')$. Так как A_X является прямым слагаемым в $A_i(\mathcal{A}_{X'})$, мы можем рассматривать b как элемент из $A_i(\mathcal{A}_{X'})$. Тогда определим β' как элемент, принимающий лишь одно ненулевое значение $\beta'(F') = (-1)^{\ell-i}b$. Непосредственная проверка показывает, что $d\beta' = \beta$, так что мы можем записать $\delta^{-1}(\beta) = a(X)\beta'$.

Теперь вернемся к изоморфизму $\varphi: \tilde{H}^{\ell-1}(L^{\text{op}}, \mathcal{E}) \rightarrow H^{\ell}(A, a)$. Заметим, что любой максимальный флаг $F = (X_1 < X_2 < \dots < X_{\ell} = V)$ в L^{op} определяет коцикл F^* размерности $\ell - 1$ со значениями в $\mathcal{E}$, который принимает значение 1 на F и обращается в нуль на всех остальных флагах. С другой стороны, каждый элемент из A_{ℓ} является коциклом относительно дифференциала, определяемого умножением на a . Мы получаем следующую формулу для φ в терминах этих коциклов, беря композицию обратных связывающих гомоморфизмов для всех коротких точных последовательностей (7.10):

$$\varphi(F^*) = (-1)^{\ell(\ell+1)/2} a(X_1)a(X_2) \dots a(X_{\ell}) \in A_{\ell}. \quad (7.11)$$

Формулу (7.11) можно использовать для описания коциклов, образующих базис в $H^{\ell}(A, a)$. Для этого мы должны выбрать базис в $H^{\ell}(L^{\text{op}}, \mathcal{E})$. Если линейный порядок на $\mathcal{A}$ зафиксирован, то такой базис естественно определяется, используя естественный базис в гомологиях лучшего комплекса. Мы лишь приведем ответ, оставляя детали читателю (см. [69] и [31]).

Множество $S \in \mathbf{nbc}_{\ell}$ называется $\beta\mathbf{nbc}$ -множеством, если для любого $i \in S$ существует $i' \in [n]$ такое, что $i' < i$ и множество $(S \setminus \{i\}) \cup \{i'\}$ также независимо. С другой стороны, любое подмножество $S = \{i_1, i_2, \dots, i_{\ell}\}$ ($i_1 < i_2 < \dots < i_{\ell}$) порождает максимальный флаг $F(S) = (X_1 < X_2 < \dots < X_{\ell} = V)$ в L^{op} , где $X_p = \bigcap_{j=\ell-p+1}^{\ell} H_{i_j}$.

ТЕОРЕМА 7.9. *Коциклы $\{(F(S))^* \mid S \text{ является } \beta\mathbf{nbc}\text{-множеством}\}$ образуют базис в $H^{\ell-1}(L^{\text{op}}, \mathcal{E})$.*

СЛЕДСТВИЕ 7.10. *Элементы, задаваемые формулой (7.11) для флагов $F = F(S)$, соответствующих всем $\beta\mathbf{nbc}$ -множествам S , образуют базис в $H^{\ell}(A, a)$.*

Заметим, что определенный выше базис зависит от a . Для некоторых классов конфигураций можно найти базис в $H^{\ell}(A, a)$, который не зависит от a (при условии, что элемент a удовлетворяет условиям из теоремы 7.5). В частности, это можно сделать для конфигураций, находящихся в общем положении по отношению к бесконечности [67], и для конфигураций, объединение гиперплоскостей которых образует дивизор с нормальным пересечением [65].

7.3. Старшая размерность ненулевых когомологий. Предыдущие результаты для элемента $a \in \text{sing}(A)$ общего положения позволяют получить некоторые нижние оценки на размерности когомологий $H^p(A, a)$ для любых a и больших p .

Вначале мы должны описать процедуру приведения произвольного элемента a в общее положение в сингулярном многообразии $\text{sing}(A)$. Напомним (см. теорему 5.15 и следствие 5.16), что $\text{sing}(A)$ есть A_1 , если конфигурация $\mathcal{A}$ не содержит центральных множителей, и $\text{sing}(A)$ есть $\Delta = \{a \in A_1 \mid \sum_i a_i = 0\}$, если конфигурация $\mathcal{A}$ центральна и неприводима.

ЛЕММА 7.11. *Предположим, что поле k бесконечно.*

(i) *Пусть конфигурация $\mathcal{A}$ не содержит центральных множителей. Тогда множество всех элементов a из A_1 , удовлетворяющих условию (i) из теоремы 7.5, является открытым и плотным в A_1 в топологии Зариского.*

(ii) *Пусть конфигурация $\mathcal{A}$ центральна и неприводима. Тогда множество всех элементов $a \in \Delta$, удовлетворяющих условию (ii) из теоремы 7.5, является открытым и плотным в Δ в топологии Зариского.*

Оба утверждения непосредственно вытекают из того факта, что условия теоремы 7.5 выделяют дополнения к нескольким гиперплоскостям в A_1 и Δ соответственно.

Теперь представим конфигурацию $\mathcal{A}$ как

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \cdots \times \mathcal{A}_r \times \mathcal{B},$$

где $\mathcal{A}_i$ ($i = 1, \dots, r$) являются неприводимыми центральными конфигурациями, а $\mathcal{B}$ является конфигурацией без центральных множителей. Обозначим бета-инвариант $\bar{\chi}(\mathcal{A}_i)$ (см. теорему 7.5) через χ_i и положим $\chi_{r+1} = H(A(\mathcal{B}), -1)$, где $H(A(\mathcal{B}), t)$ есть ряд Гильберта для алгебры $A(\mathcal{B})$.

ТЕОРЕМА 7.12. *Пусть $a \in \text{sing}(A)$ (т.е. $H^*(A, a) \neq 0$). Тогда для любого p такого, что $\ell - r \leq p \leq \ell$, мы имеем*

$$\dim H^p(A, a) \geq \prod_{i=1}^{r+1} |\chi_i|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним (см. предложение 5.13), что мы можем отождествить A_1 с $\bigoplus_{i=1}^{r+1} A_1(i)$, где $A(i) = A(\mathcal{A}_i)$ при $i = 1, 2, \dots, r$ и $A(r+1) = A(\mathcal{B})$. Тогда в соответствии со следствием 5.16 проекция $a(i) = \sum_{H_j \in \mathcal{A}_i} a_j e_j$ элемента a на каждое пространство $A_1(i)$, $i = 1, 2, \dots, r$, лежит в линейном подпространстве Δ_i , задаваемом уравнением $\sum_{H_j \in \mathcal{A}_i} a_j = 0$. Если, кроме того, каждый элемент $a(i)$ ($i = 1, \dots, r$) удовлетворяет условию (ii) теоремы 7.5, то из этой теоремы мы получаем

$$\dim H^{\ell_i}(A(i), a(i)) = \dim H^{\ell_i-1}(A(i), a(i)) = |\chi_i|.$$

Обозначим через $a(r+1)$ проекцию элемента a на $A_1(r+1)$. Если $a(r+1)$ удовлетворяет условию (i) теоремы 7.5, то

$$\dim H^{\ell_{r+1}}(A_1(r+1), a(r+1)) = |\chi_{r+1}|.$$

Теперь обозначим через C подмножество в $\text{sing}(A) = \Delta_1 \oplus \cdots \oplus \Delta_r \oplus A_1(r+1)$, состоящее из всех элементов a , удовлетворяющих следующим неравенствам:

$$\dim H^{\ell_i}(A(i), a(i)) \geq |\chi_i|,$$

$$\dim H^{\ell_i-1}(A(i), a(i)) \geq |\chi_i|,$$

$$\dim H^{\ell_{r+1}}(A_1(r+1), a(r+1)) \geq |\chi_{r+1}|.$$

Так как множество C замкнуто в топологии Зариского и содержит множество, являющееся плотным в $\text{sing}(A)$, мы имеем $C = \text{sing}(A)$. Другими словами, предыдущие неравенства выполнены для любого $a \in \text{sing}(A)$. Теперь утверждение вытекает из предложения 5.13 и формулы Кюннета.

Как показано в [23], аналогичные нижние оценки могут быть получены в более общей ситуации E -модуля, имеющего линейную резольвенту.

7.4. Линейная алгебра набора множеств. Для того чтобы иметь возможность доказывать более глубокие результаты о когомологиях комплексов (A, a) , нам необходимо изучить материал из линейной алгебры, стоящий за теоремой Винберга. Пусть $\mathcal{S}$ – конечное множество и $\mathcal{X}$ – непустой набор его подмножеств такой, что любые два элемента из $\mathcal{X}$ имеют не более одного общего элемента. Мы будем всегда предполагать, что и множество $\mathcal{S}$, и набор $\mathcal{X}$ линейно упорядочены. Пусть $J = J(\mathcal{X})$ – матрица инцидентности набора $\mathcal{X}$, т.е. $|\mathcal{X}| \times |\mathcal{S}|$ -матрица, элементы которой суть $a_{X,i} = 1$ при $i \in X$ и $a_{X,i} = 0$ иначе. Также обозначим через $\mathcal{E}$ матрицу размера $|\mathcal{S}| \times |\mathcal{S}|$, все элементы которой суть 1. Нашей целью является анализ матрицы

$$Q = Q(\mathcal{X}) = J^t J - \mathcal{E}.$$

Для любой матрицы R над $\mathbb{Q}$ обозначим через $N(R)$ ядро R (состоящее из рациональных векторов-столбцов). Заметим, что $N(\mathcal{E}) = \{u \in \mathbb{Q}^{\mathcal{S}} \mid \sum_{i \in \mathcal{S}} u_i = 0\}$. Тогда для любого подпространства $N \subset \mathbb{Q}^{\mathcal{S}}$ положим $N^0 = N \cap N(\mathcal{E})$. Следующее утверждение вытекает непосредственно.

ЛЕММА 7.13. $N(Q)^0 = N(J)^0$.

Очевидно, что матрица Q симметрична и каждый ее недиагональный элемент есть либо -1 , либо 0 . Разложение матрицы Q в прямую сумму ее неразложимых подматриц определяет разбиение Π множества $\mathcal{S}$. Это разбиение можно описать в терминах набора $\mathcal{X}$ следующим образом. Пусть Γ – граф на множестве $\mathcal{S}$, ребра которого суть пары $\{i, j\}$, принадлежащие не всем множествам $X \in \mathcal{X}$. Тогда Π есть разбиение графа Γ на связные компоненты.

Мы имеем $Q = \bigoplus_{P \in \Pi} Q_P$, где каждая целочисленная матрица Q_P удовлетворяет тем же условиям, что и Q , и при это неразложима. Следовательно, мы можем применить к Q_P классификацию Винберга (см., например, [39; с. 48–49]).

Напомним результат Винберга. Пусть $R = (a_{ij})$ – неразложимая матрица размера $m \times m$ над $\mathbb{Q}$, удовлетворяющая следующим двум условиям: (а) $a_{ij} \leq 0$ при $i \neq j$ и (б) $a_{ij} = 0$ влечет $a_{ji} = 0$. Назовем рациональный вектор-столбец $u^t = (u_1, \dots, u_m)$ положительным и будем писать $u > 0$, если все $u_i > 0$ (аналогично, $u < 0$, если $-u > 0$).

Тогда R удовлетворяет одному (и только одному) из следующих трех условий:

- (i) R является матрицей *конечного типа*, т.е. является положительно определенной матрицей (эквивалентно, для любого $u > 0$ мы имеем $Ru > 0$);
- (ii) R является матрицей *аффинного типа*, т.е. является положительно полуопределенной матрицей ранга $m-1$ и ее ядро порождено положительным вектором;
- (iii) R является матрицей *неопределенного типа*, т.е. существует положительный вектор u такой, что $Ru < 0$.

Применяя эту классификацию к матрице Q_P , мы будем называть ее просто конечной, аффинной или неопределенной в зависимости от ее типа.

Следующее замечание окажется полезным. Предположим, что набор $\mathcal{X}$ не покрывает все множество $\mathcal{S}$. Тогда по крайней мере одна строка матрицы Q целиком состоит из -1 , откуда получаем, что матрица Q неприводима и неопределенного типа. Если же набор $\mathcal{X}$ покрывает все множество $\mathcal{S}$, то все диагональные элементы матрицы Q неотрицательны.

Оказывается, имеют место дополнительные ограничения на Q_P .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.14. Для матрицы $Q(\mathcal{X})$ имеется в точности две возможности:

- (i) для любого $P \in \Pi$ матрица Q_P является конечной либо аффинной;
- (ii) существует единственный элемент $P_0 \in \Pi$, для которого матрица Q_{P_0} неопределенного типа, а для всех остальных $P \in \Pi$ матрица Q_P конечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что не существует двух различных элементов $P_1, P_2 \in \Pi$ таких, что матрица $Q_1 = Q_{P_1}$ неопределенного типа, а матрица $Q_2 = Q_{P_2}$ является либо неопределенной, либо аффинной. Предположим противное, т.е. пусть найдутся такие Q_i ($i = 1, 2$). Тогда в $\mathbb{Q}^{P_i}$ найдутся векторы-столбцы $u^i > 0$ такие, что $Q_1 u^1 < 0$ и либо $Q_2 u^2 < 0$, либо $Q_2 u^2 = 0$. Мы можем также предположить, что $\sum_{j \in P_1} (u^1)_j = \sum_{j \in P_2} (u^2)_j$. Определим вектор $u \in \mathbb{Q}^{\mathcal{S}}$ условиями $u_j = (u^1)_j$ при $j \in P_1$, $u_j = -(u^2)_j$ при $j \in P_2$ и $u_j = 0$ при $j \in \mathcal{S} \setminus (P_1 \cup P_2)$. Заметим, что $\sum_{j \in \mathcal{S}} u_j = 0$, откуда $\mathcal{E}u = 0$. Тогда, используя обозначение $(\cdot, \cdot)$ для стандартного скалярного произведения, мы находим

$$0 \leq (Ju, Ju) = (Qu, u) + (\mathcal{E}u, u) = (Q_1 u^1, u^1) + (Q_2 u^2, u^2) \leq (Q_1 u^1, u^1) < 0,$$

что приводит к противоречию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.15. Набор $\mathcal{X}$ называется аффинным или неопределенным, если для матрицы $Q(\mathcal{X})$ реализуются соответственно возможности (i) или (ii) из предложения 7.14. В первом случае мы обозначим через $\Pi_1(\mathcal{X})$ множество элементов $P \in \Pi(\mathcal{X})$ таких, что матрица Q_P аффинна. Во втором случае обозначим через $P_0 \in \Pi(\mathcal{X})$ единственный элемент, для которого матрица Q_{P_0} является неопределенной.

СЛЕДСТВИЕ 7.16. Положим $N = N(\mathcal{X}) = N(Q(\mathcal{X}))$.

- (i) Если набор $\mathcal{X}$ является аффинным, то $\dim N = |\Pi_1(\mathcal{X})|$ и существует базис в N , состоящий из векторов u^P ($P \in \Pi_1(\mathcal{X})$) таких, что ограничение вектора u^P на P является положительным вектором, а его ограничение на остальные элементы из $\Pi(\mathcal{X})$ есть 0. В частности, $\dim N^0 = |\Pi_1(\mathcal{X})| - 1$.
- (ii) Если набор $\mathcal{X}$ является неопределенным, то все векторы из N обращаются в 0 на любом элементе $P \in \Pi(\mathcal{X}) \setminus \{P_0\}$.

В последнем случае из следствия 7.16 разбиение $\Pi(\mathcal{X})$ не определяет размерность $\dim N$.

Мы также будем использовать следующее наблюдение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.17. Если набор $\mathcal{X}$ является аффинным, то для любого $X \in \mathcal{X}$ мы имеем $X \cap P \neq \emptyset$ либо для всех $P \in \Pi_1(\mathcal{X})$, либо ни для одного из них.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. существуют $X \in \mathcal{X}$ и $P' \in \Pi_1(\mathcal{X})$ такие, что $X \cap P' = \emptyset$, но $X \cap P \neq \emptyset$ для некоторого $P \in \bar{\Pi} \subset \Pi_1(\mathcal{X})$ с непустым $\bar{\Pi}$.

Вначале заметим, что $|\bar{\Pi}| > 1$. Действительно, если $\bar{\Pi} = \{P\}$, то для любого элемента $u \in \mathbb{Q}^{\mathcal{S}}$ такого, что $\sum_{i \in X} u_i = 0$, ограничение u на P есть 0. Но тогда существует элемент $v \in N(\mathcal{X})^0$, не обращающийся в нуль на P и P' , что противоречит лемме 7.13. Итак, существуют два различных элемента $P_1, P_2 \in \bar{\Pi}$.

Теперь сравним $N = N(\mathcal{X})^0$ и $N' = N(\mathcal{X}')^0$, где $\mathcal{X}' = \mathcal{X} \setminus \{X\}$. С одной стороны, так как одно уравнение удалено, мы имеем $N \subset N'$. С другой стороны, разбиение $\Pi(\mathcal{X}')$ может быть получено из $\Pi(\mathcal{X})$ путем объединения элементов, пересекающихся с X . Так как мы не трогали P' , матрица $Q_{P'}$ осталась неизменной, а значит, набор $\mathcal{X}'$ является аффинным. Так как элементы P_1 и P_2 объединяются, мы имеем $|\Pi_1(\mathcal{X}')| < |\Pi_1(\mathcal{X})|$, откуда благодаря следствию 7.16 получаем $\dim N' < \dim N$. Это противоречие завершает доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.18. Пусть k – произвольное поле нулевой характеристики. Тогда ядро в k^m любой $m \times m$ -матрицы над $\mathbb{Q}$ порождено ядром этой матрицы в $\mathbb{Q}^m$. Это позволяет обобщить все результаты и понятия из этого пункта на случай поля k . Единственная разница заключается в том, что при использовании неравенств $u > 0$ и $u < 0$ мы применяем их только к рациональным векторам из k^m .

7.5. Резонансные многообразия R_m^1 . Вначале мы определим естественные подмногообразия в $\text{sing}(A)$, отражающие информацию о размерностях когомологий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.19. Пусть p и m – два положительных целых числа, причем $p \leq \ell$. Тогда резонансное многообразие R_m^p определяется как

$$R_m^p = \{a \in A_1 \mid \dim H^p(A, a) \geq m\}.$$

Ясно, что R_m^p действительно является алгебраическим подмногообразием в A_1 , так как оно задается обращением в нуль некоторых миноров матриц, все элементы которых суть линейные формы от координат a_i элемента a . Наиболее интересными из этих многообразий являются многообразия $R^p = R_1^p$, в то время как наиболее изученными являются многообразия R_m^1 . Результаты теоремы 7.12 можно, конечно, сформулировать в терминах резонансных многообразий R_m^p , соответствующих большему p , но мы оставляем это читателю.

Основной целью этого пункта является изучение многообразий R_p^1 (в особенности, для поля k нулевой характеристики) при помощи техники, разработанной в предыдущем пункте.

Рассмотрим произвольную центральную существенную конфигурацию $\mathcal{A} = \{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ и обозначим через ℓ ранг ее решетки пересечений L . Напомним, что для любого $X \in L$ мы имеем подконфигурацию $\mathcal{A}_X = \{H \in \mathcal{A} \mid H \supset X\}$, и обозначим через $[n]_X$ множество индексов элементов из $\mathcal{A}_X$.

Для упрощения обозначений мы будем использовать следующее соглашение до конца статьи. Мы отождествим X с $[n]_X$, т.е. будем рассматривать X как элемент частично упорядоченного множества L и в то же время как множество индексов гиперплоскостей H_i , которые содержат X . Для того чтобы не запутывать читателя еще больше, мы сохраним символ $\mathcal{A}_X$ для конфигурации таких гиперплоскостей H_i . Мы также обозначим через $L(p)$ подмножество в L , состоящее из элементов ранга p .

Положим $L'(2) = \{X \in L(2) \mid |X| > 2\}$. Заметим, что $L'(2)$ является множеством элементов $X \in L$ ранга 2, для которых конфигурация $\mathcal{A}_X$ неприводима. Для любых двух различных элементов $i, j \in \bar{n}$ существует единственный элемент $X_{ij} \in L$ ранга 2 такой, что $i, j \in X_{ij}$.

Для изучения когомологий $H^1(A, a)$ для $a = \sum_{i=1}^n a_i e_i \in A_1$ положим

$$Z^p(a) = \{x \in A_p \mid ax = 0\}$$

и заметим, что $H^1(A, a) = Z^1(a)/ka$.

Мы начнем со следующих трех простых лемм.

ЛЕММА 7.20. Пусть $\ell = 2$. Тогда $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in Z^1(a)$, если и только если

$$a_i \sum_{j=1}^n x_j = \left(\sum_{j=1}^n a_j \right) x_i \quad \text{для любого } i = 1, \dots, n.$$

Следовательно,

- (i) если $a \neq 0$ и $\sum_{i=1}^n a_i = 0$, то подпространство $Z^1(a)$ может быть задано уравнением

$$\sum_{i=1}^n x_i = 0;$$

- (ii) если $\sum_{i=1}^n a_i \neq 0$, то $Z^1(a) = ka$;

- (iii) если $a = 0$, то $Z^1(a) = A_1$.

При $n = 2$ выводы в случаях (i) и (ii) совпадают.

Доказательство этой леммы получается непосредственным вычислением.

Следующая лемма может быть сформулирована для произвольного p , $1 \leq p \leq \ell$. Напомним, что для любого $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in A_1$ и любого $X \in L$ мы положили $x(X) = \sum_{i \in X} x_i e_i$.

ЛЕММА 7.21. Мы имеем $x \in Z^p(a)$ тогда и только тогда, когда $x(X) \in Z^p(a(X)) \subset A_p(\mathcal{A}_X)$ для любого элемента $X \in L$ ранга $p + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним (см. предложение 2.7), что для любого p имеет место равенство

$$A_p = \bigoplus_{X \in L(p)} A_p(\mathcal{A}_X) \quad (7.12)$$

и $A(\mathcal{A}_X)$ является подалгеброй в A для любого $X \in L$. Таким образом, лемма вытекает из того факта, что $ax = 0$ тогда и только тогда, когда проекции элемента ax на все прямые слагаемые в (7.12) суть 0.

Из предыдущих двух лемм мы получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 7.22. Подпространство $Z^1(a)$ в A_1 может быть задано следующей системой:

для любого $X \in L'(2)$ такого, что $a(X) \neq 0$ и $\sum_{i \in X} a_i = 0$,

$$\sum_{i \in X} x_i = 0; \quad (7.13)$$

для любого другого $X \in L(2)$ и любой пары элементов $i < j$ из X

$$a_i x_j - a_j x_i = 0. \quad (7.14)$$

Так как нас интересуют только элементы $a \in \text{sing}(A)$, мы ограничимся рассмотрением элементов $a \in A_1^0$. Так как алгебра A является косокоммутативной, мы имеем $b \in Z^1(a)$ тогда и только тогда, когда $a \in Z^1(b)$. Итак, из следствия 5.16 вытекает, что $Z^1(a)^0 = Z^1(a)$ для любого $a \in A_1^0 \setminus \{0\}$.

Теперь мы введем основные объекты этого раздела. Для любого $a \in A_1^0$ введем подмножество $\mathcal{X}'(a)$ в $L'(2)$ как

$$\mathcal{X}'(a) = \left\{ X \in L'(2) \mid \sum_{i \in X} a_i = 0, a(X) \neq 0 \right\} \quad (7.15)$$

и подмножество $[n](a)$ в $[n]$ как

$$[n](a) = \bigcup_{X \in \mathcal{X}'(a)} X \setminus \theta(a),$$

где

$$\theta(a) = \{j \mid a_j = 0 \text{ и } X_{ij} \notin \mathcal{X}'(a) \text{ для некоторого } i \text{ такого, что } a_i \neq 0\}.$$

Заметим, что если $\ell = 3$, т.е. если проективизация конфигурации $\mathcal{A}$ является конфигурацией прямых на проективной плоскости, то $\mathcal{X}'(a)$ является множеством точек, а $\mathcal{A}(a)$ есть подконфигурация, соответствующая подмножеству $[n](a)$ и состоящая из некоторых прямых, проходящих через все точки из $\mathcal{X}'(a)$.

Нам потребуется использовать ограничение множества $\mathcal{X}'(a)$ на $[n](a)$. Этот новый набор $\mathcal{X}(a)$ состоит из элементов $X \cap [n](a)$ для всех $X \in \mathcal{X}'(a)$. Мы будем применять к наборам $\mathcal{X}'(a)$ и $\mathcal{X}(a)$ обозначения из начала этого раздела. Наиболее важным здесь является то, что через $N(\mathcal{X}(a))$ обозначается подпространство в A_1 , состоящее из всех элементов, равных 0 вне $[n](a)$, ограничение которых на $[n](a)$ лежит в ядре (над k) матрицы $Q = Q(\mathcal{X}(a))$.

Следующая теорема является основным техническим результатом этого раздела. В этой теореме и до конца этой статьи мы будем предполагать, что характеристика поля k равна 0.

ТЕОРЕМА 7.23. Пусть $a \in A_1^0 \setminus \{0\}$. Если a не обращается в нуль на $[n] \setminus [n](a)$ или набор $\mathcal{X}(a)$ является неопределенным, то $a \notin R^1$. Если a равно нулю на $[n] \setminus [n](a)$, и набор $\mathcal{X}(a)$ является аффинным, то $Z^1(a) = N(\mathcal{X}(a))^0$. В частности, в последнем случае мы имеем $\dim Z^1(a) = |\Pi_1(\mathcal{X}(a))| - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы разобьем доказательство на несколько частей. Обычно мы будем опускать элемент a из обозначений, если это не приводит к недоразумению.

(i) *Редукция к случаю, когда элемент a обращается в нуль на дополнении к $[n](a)$.*

Предположим, что для некоторого $j \in [n] \setminus [n](a)$ мы имеем $a_j \neq 0$. Тогда $j \notin \theta(a)$, откуда $j \notin \overline{[n]} = \bigcup_{X \in \mathcal{X}'(a)} X$. Это означает, что для любого $i \in [n]$ мы имеем $X_{ij} \notin \mathcal{X}'(a)$. Отсюда следует, что (7.14) имеет место для любого $x \in Z^1(a)$. Полагая $c = x_j/a_j$, мы получаем из (7.14), что $x_i = ca_i$ для любого $i \in [n]$, откуда $x = ca$. Мы заключаем, что $\dim Z^1(a) = 1$ и $a \notin R^1$. С этого места мы можем предполагать, что $a_j = 0$ для любого $j \notin [n](a)$.

(ii) *Любой элемент $x \in Z^1(a)$ обращается в нуль на дополнении к $[n](a)$.*

Пусть $x \in Z^1(a)$ и $j \notin [n](a)$. Как и выше, последнее условие означает, что либо $j \notin \overline{[n]}$, либо $j \in \emptyset$. В любом случае найдется элемент $i \in [n]$ такой, что $a_i \neq 0$ и $X_{ij} \notin \mathcal{X}'(a)$. Следовательно, имеет место равенство (7.14), откуда вытекает, что $x_j = 0$. Итак, вектор x может быть ненулевым лишь на множестве $[n](a)$. С этого места мы рассматриваем только векторы x , которые обращаются в нуль вне $[n](a)$.

(iii) Включение $Z^1(a) \subset N(\mathcal{X}(a))^0$.

По определению набора $\mathcal{X}(a)$ и из леммы 7.22 получаем, что (7.13) имеет место для любого $X \in \mathcal{X}(a)$ (а также для $X \in \mathcal{X}'(a)$), откуда $J(\mathcal{X}(a))x = 0$. Так как, кроме того, $\sum_{i=1}^n x_i = 0$, мы получаем $Q(\mathcal{X}(a))x = 0$, т.е. $x \in N(\mathcal{X}(a))^0$. Итак, $Z^1(a) \subset N(\mathcal{X}(a))^0$.

(iv) Неопределенный случай.

Предположим, что набор $\mathcal{X}(a)$ является неопределенным и $x \in Z^1(a)$. Так как $x \in N(\mathcal{X}(a))$ в силу (iii), ограничение вектора x на любой элемент P разбиения $\Pi = \Pi(\mathcal{X}(a))$ лежит в ядре матрицы $Q_P = Q(\mathcal{X}(a))_P$. Так как при $P \neq P_0$ эта матрица является невырожденной, мы получаем, что x обращается в нуль на любом $P \neq P_0$.

Теперь мы рассмотрим ограничение вектора x на P_0 . Для любой пары $i, j \in P_0$ мы имеем $X_{ij} \notin \mathcal{X}(a)$ по определению разбиения Π . Поэтому равенство (7.14) имеет место для таких i и j . Более того, так как по нашему соглашению $i, j \notin \emptyset$, мы получаем, что либо оба элемента a_i и a_j обращаются в нуль одновременно, либо ни один из них не равен нулю. Так как $a \neq 0$, элемент a не может обращаться в нуль на P_0 . Теперь из (7.13) мы получаем, что $x = sa$ на P_0 для некоторого $s \in k$ (см. (i)). Суммируя, мы видим, что $x = sa$. Отсюда вытекает, что $\dim Z^1(a) = 1$, т.е. $a \notin R^1$.

(v) Аффинный случай.

Предположим, что набор $\mathcal{X}$ является аффинным и $x \in N(\mathcal{X})^0$, т.е. $Q(\mathcal{X})x = 0$ и $\mathcal{E}x = 0$. Из леммы 7.13 мы получаем $J(\mathcal{X})x = 0$, т.е. равенство (7.13) имеет место для $X \in \mathcal{X}$. Более того, для любых $i, j \in [n](a)$ таких, что $X_{ij} \notin \mathcal{X}$, мы имеем $i, j \in P$ для некоторого $P \in \Pi$. Если матрица Q_P является конечной, то $x_i = x_j = 0$ и (7.14) имеет место по тривиальным соображениям. Если же матрица Q_P является аффинной, то ядро матрицы Q_P является одномерным и (7.14) также выполнено. Из леммы 7.22 мы получаем $x \in Z^1(a)$, что завершает доказательство.

Для большей ясности мы сформулируем отдельно качественную часть предыдущего технического результата.

СЛЕДСТВИЕ 7.24. Для любого $a \in A_1^0$ существуют подконфигурация $\mathcal{A}(a)$ (множество индексов которой содержит носитель элемента a) и набор $\mathcal{X}(a)$ пересечений коразмерности 2 гиперплоскостей из $\mathcal{A}(a)$, которые определяют, лежит элемент a в R^1 или нет. А именно, $a \in R^1$ тогда и только тогда, когда набор $\mathcal{X}(a)$ является аффинным с минимум 3 аффинными компонентами. Если этот критерий имеет место, то $Z(a) = N(\mathcal{X}(a))^0$, т.е. $Z(a)$ определяется системой линейных уравнений

$$(1) \ x_i = 0 \text{ при } i \notin [n](a); \quad (2) \ \sum_{j \in X} x_j = 0 \text{ при } X \in \mathcal{X}(a); \quad (3) \ \sum_i x_i = 0.$$

Заметим, что единственной информацией об элементе a , необходимой для того, чтобы определить, лежит ли a в R^1 , и если лежит, то найти пространство $Z(a)$, является множество элементов $X \in L$ ранга 1 и 2 таких, что $\sum_{i \in X} a_i = 0$.

При изменении a имеет место следующая симметрия.

СЛЕДСТВИЕ 7.25. Для любого $a \in R^1 \setminus \{0\}$ и $b \in Z^1(a) \setminus \{0\}$ мы имеем $Z^1(b) = Z^1(a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $b \in Z^1(a)$ и $b \neq 0$. Мы будем использовать обозначения, введенные перед теоремой 7.23. В силу этой теоремы $b = 0$ вне множества $[n](a)$ и b лежит в $N(\mathcal{X}(a))^0$ (и в $N(\mathcal{X}'(a))^0$). Кроме того, набор $\mathcal{X}(a)$ является аффинным. Таким образом, для любого элемента $P \in \Pi(\mathcal{X}(a))$ либо $b_i \neq 0$ для любого $i \in P$, либо $b = 0$ на P . Набор элементов P , удовлетворяющих первому условию, непуст; пусть P' один из таких элементов.

Выберем $X' \in \mathcal{X}'(a)$ и положим $X = X' \cap [n](a)$. Заметим, что $X \neq \emptyset$, так как $a(X') \neq 0$ и $X \in \mathcal{X}(a)$. Из того, что $b \in N(\mathcal{X}'(a))$, мы получаем $\sum_{i \in X'} b_i = 0$. Кроме того, из предложения 7.17 мы получаем $X \cap P' \neq \emptyset$, откуда $b(X) \neq 0$ и $b(X') \neq 0$. Отсюда вытекает, что $X' \in \mathcal{X}'(b)$ и $\mathcal{X}'(a) \subset \mathcal{X}'(b)$. По соображениям симметрии (так как $a \in Z^1(b)$) мы имеем $\mathcal{X}'(a) = \mathcal{X}'(b)$. Из этого и из предыдущего пункта мы также получаем, что $[n](a) \cap \mathcal{O}(b) = \emptyset$, откуда $[n](a) \subset [n](b)$. Опять-таки, из соображений симметрии вытекает, что $[n](a) = [n](b)$, и, тем самым, доказательство завершено.

Теперь мы готовы ответить на вопрос о том, как выглядят неприводимые компоненты многообразия R_1 .

СЛЕДСТВИЕ 7.26. Многообразие R^1 представляет собой объединение конечно-го числа линейных подпространств $Z(a) = N(\mathcal{X}(a))^0$, которые попарно пересекаются по 0. Следовательно, эти пространства суть в точности неприводимые компоненты многообразия R_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает непосредственно из теоремы 7.23 и следствия 7.25.

Для удобства читателя мы соберем вместе свойства многообразия R^1 , вытекающие из теоремы 7.23 и предыдущих следствий.

СЛЕДСТВИЕ 7.27. (i) Все неприводимые компоненты многообразия R_1 суть линейные подпространства в $\Delta = \{\sum_i x_i e_i \in A_1 \mid \sum_i x_i = 0\}$.

(ii) Каждая неприводимая компонента многообразия R^1 задается в Δ системой уравнений $\sum_{i \in X} x_i = 0$, где X пробегает некоторое множество элементов в L рангов 1 и 2.

(iii) Попарные пересечения неприводимых компонент суть 0.

(iv) Для любого t многообразие R_m^1 является объединением компонент многообразия R^1 , размерности которых больше, чем t .

Следствие 7.26 дает описание неприводимых компонент многообразия R_1 в терминах элементов из A_1^0 . Для того чтобы иметь дело с конкретными примерами, удобно для любой фиксированной конфигурации $\mathcal{A}$ иметь описание таких подмножеств $\mathcal{X}$, состоящих из элементов ранга два в $L = L(\mathcal{A})$, что $N(\mathcal{X})^0$ есть компонента многообразия R_1 , соответствующего конфигурации $\mathcal{A}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.28. Пусть набор $\mathcal{X} \subset L(2)'$ удовлетворяет следующим условиям:

- (i) $\mathcal{X}$ является аффинным с минимум 3 аффинными компонентами,
- (ii) ни один элемент $X \in \mathcal{X}$ не лежит в $\bigcup_{P \in \Pi \setminus \Pi_1} P$, где $\Pi = \Pi(\mathcal{X})$.

Тогда пространство $N(\mathcal{X})^0$ является неприводимой компонентой многообразия R_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{X}$ удовлетворяет условиям (i), (ii). Положим $N = N(\mathcal{X})^0$ и зафиксируем $a \in N \setminus \{0\}$. Если $X \in \mathcal{X}$, то $\sum_{i \in X} a_i = 0$. Кроме того, так как $a \neq 0$ и $\mathcal{X}$ удовлетворяет условию (ii), из предложения 7.17 вытекает, что $a(X) \neq 0$. Следовательно, $X \in \mathcal{X}'(a)$ и $\mathcal{X} \subset \mathcal{X}'(a)$. Более того, так как набор $\mathcal{X}$ является аффинным, он покрывает всю конфигурацию $\mathcal{A}$ и для любого $X_{ij} \notin \mathcal{X}$ либо оба элемента a_i и a_j равны 0, либо оба не равны 0. Отсюда вытекает, что $\emptyset(a) = \emptyset$, откуда $[n](a) = [n]$ и $\mathcal{X}(a) = \mathcal{X}'(a)$. Итак, $\mathcal{X} \subset \mathcal{X}(a)$.

С другой стороны, пусть $X \in \mathcal{X}(a)$. Предположим, что $X \notin \mathcal{X}$. Тогда X лежит в компоненте P разбиения Π , и, так как $a(X) \neq 0$, эта компонента является аффинной. Отсюда, в свою очередь, вытекает, что $a(X)$ пропорционален положительному рациональному вектору. Следовательно, $\sum_{i \in X} a_i \neq 0$. Это противоречие показывает, что $X \in \mathcal{X}(a)$ и $\mathcal{X} = \mathcal{X}(a)$. Теперь результат вытекает из следствия 7.26.

Имеются другие неприводимые компоненты многообразия R_1 для конфигурации $\mathcal{A}$, которые не описываются предложением 7.28. Такие компоненты происходят из подконфигураций в $\mathcal{A}$. Например, за исключением случая $\text{rk } L = 2$, все локальные компоненты происходят из собственных подконфигураций. С другой стороны, не все неприводимые компоненты для подконфигурации являются неприводимыми компонентами для самой конфигурации $\mathcal{A}$. Например, если $\text{rk } L = 2$, то единственная неприводимая компонента многообразия R_1 происходит из всей конфигурации $\mathcal{A}$.

Имеется возможность описать все пары $(\mathcal{B}, \mathcal{X}')$, которые определяют неприводимую компоненту для $\mathcal{A}$. Здесь $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, а набор $\mathcal{X}' \subset L'(2)$ таков, что его ограничение $\mathcal{X}$ на $\mathcal{B}$ удовлетворяет условиям из предложения 7.28 для $\mathcal{B}$. Мы можем упростить это описание, вводя чисто аффинные покрытия. Назовем покрытие $\mathcal{X}$, состоящее из конечных множеств, чисто аффинным, если матрица $Q(\mathcal{X})$ является аффинной и не имеет конечных компонент. Заметим, что если в предложении 7.28 мы потребуем, чтобы набор $\mathcal{X}$ являлся чисто аффинным, то условие (ii) будет выполнено автоматически.

Мы скажем также, что набор $\mathcal{X} \in L$ покрывает подконфигурацию $\mathcal{B}$, если он покрывает множество индексов гиперплоскостей в $\mathcal{B}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.29. Пусть $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ и $\mathcal{X}' \subset L'(2)$ – такой набор, что его ограничение $\mathcal{X}$ на $\mathcal{B}$ является чисто аффинным с минимум 3 компонентами. Тогда $N(\mathcal{X})^0$ является неприводимой компонентой многообразия R_1 тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}$ является максимальной относительно вложения подконфигурацией в $\mathcal{A}$, ограничение набора $\mathcal{X}'$ на которую является чисто аффинным. Более того, отображение $\psi: (\mathcal{B}, \mathcal{X}') \mapsto N(\mathcal{X})^0$ определяет взаимно однозначное соответствие между парами, удовлетворяющими предыдущему свойству, и неприводимыми компонентами многообразия R_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Выберем ненулевой элемент $a \in R_1$ и рассмотрим неприводимую компоненту, содержащую a . Из теоремы 7.23 следует, что эта компонента есть $N(\mathcal{X}(a))^0$, где $\mathcal{X}(a)$ есть некоторое покрытие подконфигурации $\mathcal{A}(a)$. Пусть $\mathcal{B}(a)$ – подконфигурация в $\mathcal{A}(a)$, соответствующая объединению аффинных компонент этого покрытия. Мы сохраним обозначение $\mathcal{X}(a)$ для ограничения этого покрытия на $\mathcal{B}(a)$. Тогда $\mathcal{X}(a)$ является чисто аффинным покрытием с минимум 3 компонентами.

Если ограничение $\mathcal{X}_1$ набора $\mathcal{X}'(a)$ на некоторую конфигурацию $\mathcal{B}_1 \supset \mathcal{B}(a)$ является чисто аффинным, то $Z(a) \supset N(\mathcal{X}_1)^0 \supset N(\mathcal{X}(a))^0$, а значит, эти множества совпадают. В частности, для любого $H_i \in \mathcal{B}_1 \setminus \mathcal{B}(a)$ существует элемент в $N(\mathcal{X}(a))^0$, не обращающийся в нуль на i . С другой стороны, либо i лежит в конечной компоненте, либо $i \in \mathcal{O}(a)$. Отсюда вытекает, что любой элемент из $N(\mathcal{X}(a))^0$ обращается в нуль на i . Это противоречие показывает, что $\mathcal{B}(a)$ удовлетворяет условию нашего предложения, а значит, отображение ψ сюръективно.

(ii) Пусть $(\mathcal{B}, \mathcal{X}')$ удовлетворяет условию предложения. Зафиксируем некоторый элемент $a \in N(\mathcal{X})^0$, $a \neq 0$, и сравним $(\mathcal{B}, \mathcal{X}')$ с $(\mathcal{B}(a), \mathcal{X}(a)')$. Выберем $X \in \mathcal{X}'$. Так как $a(X) \neq 0$ и $\sum_{i \in X} a_i = 0$, мы имеем $X \in \mathcal{X}'(a)$. Следовательно, $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}'(a)$.

С другой стороны, выберем $X \in \mathcal{X}'(a)$ и положим $\Pi = \Pi(\mathcal{X})$ (это есть разбиение конфигурации $\mathcal{B}$). Используя те же свойства элемента a для нашего X , мы получаем, что существуют по крайней мере два различных элемента $P_1, P_2 \in \Pi$ таких, что $P_m \cap X \neq \emptyset$ ($m = 1, 2$). Следовательно, взяв по одному индексу из каждого из этих пересечений, мы можем найти $X_{ij} \in \mathcal{X}'$ и $X_{ij} = X$. Отсюда $\mathcal{X}' = \mathcal{X}'(a)$.

Теперь легко проверить, что $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}(a)$, и вывести из максимальности конфигурации $\mathcal{B}$, что $\mathcal{B} = \mathcal{B}(a)$. Отсюда следует, что

$$N(\mathcal{X})^0 = N(\mathcal{X}(a))^0, \quad (7.16)$$

а значит, это есть некоторая неприводимая компонента многообразия R_1 .

(iii) Инъективность отображения ψ вытекает непосредственно из (7.16). Это завершает доказательство.

Другой способ определения неприводимых компонент многообразия R^1 заключается в аксиоматизации свойств разбиений $\Pi_1(\mathcal{X}(a))$. Эти свойства, которые выделяют класс так называемых *смежных* разбиений, можно найти в [26].

7.6. Примеры. В этом пункте мы приводим некоторые примеры неприводимых компонент многообразия R^1 и других понятий, разработанных в предыдущем пункте.

Локальные компоненты. Зафиксируем элемент $X \in L'(2)$ и положим $\mathcal{X} = \{X\}$, $\mathcal{B} = \mathcal{A}_X$. Тогда $Q(\mathcal{X})$ есть 0-матрица, $\Pi(\mathcal{X})$ есть разбиение конфигурации $\mathcal{B}$ на одиночные элементы, а $N(\mathcal{X})^0$ есть подпространство в $A_1(\mathcal{A}_X)$, состоящее из векторов, суммы координат которых равны 0. Условия из предложения 7.29, очевидно, выполнены, так что $N(\mathcal{X})^0$ является неприводимой компонентой многообразия R_j^1 для $j \leq m - 2$, где $m = |\mathcal{A}_X|$. Такие компоненты называются *локальными*.

Для того чтобы получить представление о нелокальных компонентах многообразия R^1 , мы начнем с аффинных матриц.

Аффинные неразложимые матрицы. Напомним, что для любого покрытия $\mathcal{X}$ множества $[n]$ соответствующая матрица $Q = Q(\mathcal{X}) = (q_{ij})$ является симметричной $(n \times n)$ -матрицей с $m_i = q_{ii} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $q_{ij} = -1$ или 0 при $i \neq j$. Такие матрицы Q могут быть параметризованы парами (Γ, m) , где Γ есть граф на n вершинах $v_1, \dots, v_n$ с ребрами $\{v_i, v_j\}$ для $q_{ij} = -1$, а $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ — вектор, сопоставляющий метку каждой вершине графа Γ . Мы запишем $Q = Q(m, \Gamma)$. Разложение матрицы Q в прямую сумму неразложимых компонент соответствует разбиению графа Γ на связные компоненты.

Мы начнем со следующих двух общих наблюдений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.30. Пусть Γ – произвольный (конечный) связный граф. Тогда множество $\mathcal{M}(\Gamma)$ векторов $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$, для которых матрица $Q(m, \Gamma)$ является аффинной, конечно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что Γ имеет n вершин. Для каждого вектора $m \in \mathcal{M}(\Gamma)$ обозначим через Q_r главную подматрицу матрицы $Q = Q(m, \Gamma)$ такую, что определяющие ее строки соответствуют r минимальным числам m_i . Обозначим также через D_r определитель матрицы Q_r . Не ограничивая общности, мы можем предполагать, что $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_n$. Лемма 4.4 из [39] показывает, что при $r < n$ матрица Q_r является прямой суммой конечных матриц, откуда $D_r > 0$. Следовательно, при фиксированных $r < n$ и Q_r определитель D_n можно рассматривать как многочлен от $m_{r+1}, \dots, m_n$ с положительным коэффициентом D_r при члене старшей степени $m_{r+1} \cdots m_n$. Так как $D_n = 0$, множество возможных значений для m_{r+1} ограничено сверху, а значит, m_{r+1} может принимать лишь конечное число значений. Теперь результат получается индукцией по r .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.31. Пусть Γ – связный граф на n вершинах с множеством ребер E . Пусть, далее, $\mathcal{M}'$ – множество всех положительных целочисленных векторов-столбцов u ($u^t = (u_1, \dots, u_n)$) таких, что координаты u_i попарно взаимно просты и каждое число u_i делит $u^{(i)} = \sum_{\{i,j\} \in E} u_j$. Определим $m = f(u)$ по формуле $m_i = u^{(i)}/u_i$. Тогда

- (i) $m \in \mathcal{M}(\Gamma)$,
- (ii) вектор u лежит в ядре матрицы $Q(m, \Gamma)$,
- (iii) отображение $f: \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M}(\Gamma)$ биективно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $u \in \mathcal{M}'$ и рассмотрим матрицу $Q = Q(f(u), \Gamma)$. Очевидно, что $Qu = 0$, поэтому Q является аффинной матрицей (см. [39; следствие 4.3]). Это доказывает (i) и (ii). Теперь пусть Q – произвольная целочисленная аффинная матрица. Тогда ее ядро содержит единственный положительный целочисленный вектор с попарно взаимно простыми координатами, откуда вытекает (iii).

Примеры аффинных неразложимых матриц включают некоторые хорошо известные классы.

1. *Матрицы Лапласа графов.* Здесь G есть произвольный связный граф на вершинах $v_1, \dots, v_n$, а Q – его матрица Лапласа, т.е. $Q = Q(d, \Gamma)$, где d_i – степень вершины v_i . Легко видеть, что d удовлетворяет формуле для m из предложения 7.31 с $u_i = 1$ для всех i .

2. *Аффинные обобщенные матрицы Картана.* Здесь Γ есть расширенная схема Дынкина без кратных ребер и $m_i = 2$ для всех i . Заметим, что для схем всех типов, кроме $A_\ell^{(1)}$, метки на вершинах отличаются от предыдущего примера.

3. *Полные графы.* Пусть Γ – полный граф на n вершинах. Тогда нетрудно описать все возможные наборы меток m , для которых матрица $Q = Q(m, \Gamma)$ является аффинной.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.32. Для полного графа Γ матрица $Q = Q(m, \Gamma)$ является аффинной тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i + 1} = 1. \quad (7.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с предложением 7.31 матрица Q является аффинной тогда и только тогда, когда следующая система имеет положительное целочисленное решение:

$$(m_i + 1)x_i = \sum_{j=1}^n x_j, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (7.18)$$

Очевидно, что это эквивалентно условию (7.17).

Заметим, что для матрицы Лапласа полного графа мы имеем $m_i = n - 1$ для всех i .

4. *Кусты.* Пусть Γ – куст с $n + 1$ вершиной. Под этим мы подразумеваем, что Γ является деревом с корнем v_0 степени n , для которого все остальные вершины $v_1, \dots, v_n$ (мы немного изменили нумерацию) являются листьями. Рассуждение, аналогичное использованному при доказательстве предложения 7.32, показывает, что матрица Q аффинна тогда и только тогда, когда

$$m_0 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i}. \quad (7.19)$$

Если условие (7.19) выполнено, то ядро матрицы Q порождено вектором

$$u^t = \left(1, \frac{1}{m_1}, \dots, \frac{1}{m_n}\right).$$

В качестве конкретного примера приведем полный список векторов m для расширенной схемы Дынкина $D_4^{(1)}$. Он состоит из 20 следующих векторов (с точностью до перестановки листьев): $(4, 1, 1, 1, 1)$ (матрица Лапласа), $(3, 2, 2, 1, 1)$, $(2, 2, 2, 2, 2)$ (матрица Картана), $(2, 3, 3, 3, 1)$, $(2, 6, 3, 2, 1)$, $(2, 4, 4, 2, 1)$, $(1, 4, 4, 4, 4)$, $(1, 3, 4, 4, 6)$, $(1, 12, 4, 3, 3)$, $(1, 6, 6, 3, 3)$, $(1, 12, 12, 3, 2)$, $(1, 15, 10, 3, 2)$, $(1, 18, 9, 3, 2)$, $(1, 24, 8, 3, 2)$, $(1, 42, 7, 3, 2)$, $(1, 8, 8, 4, 2)$, $(1, 12, 6, 4, 2)$, $(1, 20, 5, 4, 2)$, $(1, 10, 5, 5, 2)$, $(1, 6, 6, 6, 2)$.

Реализуемые аффинные матрицы. Теперь вспомним, что аффинные матрицы, которые мы рассматривали в предыдущем пункте, строились при помощи $(0-1)$ -матриц J . Точнее,

$$Q = J^t J - \mathcal{E}. \quad (7.20)$$

Более того, матрица J не имеет нулевых строк или столбцов и любые два столбца могут иметь элемент 1 не более чем в одной общей строке. Если (7.20) выполнено для матрицы J , удовлетворяющей предыдущим условиям, то мы скажем, что матрица Q является *реализуемой* при помощи матрицы J .

Не все аффинные матрицы являются реализуемыми.

ПРИМЕР 7.33. Пусть Q – матрица Лапласа графа Γ на вершинах $\{v_1, \dots, v_5\}$, который представляет собой полный граф на $\{v_2, \dots, v_5\}$, дополненный единственным ребром $\{1, 5\}$. Мы хотим убедиться в том, что матрица Q не реализуема. Более того, рассмотрим неразложимую компоненту S (соответствующую строкам 1–4) матрицы $Q + \mathcal{E}$:

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что $S = J^t J$ для некоторой $(0-1)$ -матрицы J . Тогда первый столбец матрицы J содержит в точности две единицы в некоторых строках, а каждый из других трех столбцов содержит 1 в одной из этих строк. Следовательно, какие-то два из этих трех столбцов содержат 1 в общей строке, что приводит к противоречию. Итак, матрицы S и Q не реализуемы.

Если некоторая аффинная матрица реализуема, то она может иметь несколько различных реализаций (даже с точностью до перестановки строк в J). Очевидно, что число реализаций конечно. Например, матрица Картана типа $D_4^{(1)}$ имеет 3 различных реализации. Для некоторого порядка вершин эти реализации имеют вид

$$J_i \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Реализации с минимум тремя компонентами. Более интересной для нас задачей является реализация разложимых матриц с минимум 3 компонентами. Для любой компоненты P мы обозначим ограничение матриц Q и J на эту компоненту через Q_P и J_P соответственно. Множество всех компонент мы будем обозначать через Π .

Этот класс матриц оказывается еще более ограниченным. При изучении этого класса мы иногда будем использовать двойственный подход к описанию матрицы J , реализующей матрицу Q . Каждый столбец C_i матрицы J можно рассматривать как подмножество множества R строк матрицы J . Мы всегда будем предполагать, что матрица J_P не имеет нулевых строк, так что система $\mathcal{C}(P) = \{C_i\}_{i \in P}$ является покрытием множества R для любого $P \in \Pi$. Если $P' \in \Pi$ и $P' \neq P$, то для любого $j \in P'$ столбец C_j *трансверсален* к $\mathcal{C}(P)$. Напомним, что это означает, что $C_j \cap C_i \neq \emptyset$ для любого $i \in P$, откуда $|C_i \cap C_j| = 1$. Отсюда немедленно вытекают следующие неравенства:

$$|\overline{P}| \leq |C_j| \leq |P|, \quad (7.21)$$

где $j \in P'$, а $\overline{P}$ – подмножество в P такое, что $C_i \cap C_r = \emptyset$ для любых $i, r \in \overline{P}$.

Неравенства (7.21) позволяют нам классифицировать некоторые серии реализуемых матриц с минимум тремя (или даже двумя) аффинными компонентами.

ТЕОРЕМА 7.34. Пусть $Q = Q(t, \Gamma)$ – реализуемая матрица, граф Γ которой имеет по крайней мере две связных компоненты, каждая из которых является полным графом с минимум двумя вершинами. Тогда существует целое $n \geq 2$ такое, что все диагональные элементы матрицы Q равны $n-1$, $p = |\Pi| \leq n+1$

и $|P| = n$ для любого $P \in \Pi$. Более точно, реализации матрицы Q параметризуются (с точностью до выбора порядка) всеми $(n-1) \times (p-2)$ -матрицами n -перестановок $\{\sigma(i, j)\}$ ($1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq j \leq p-2$), которые удовлетворяют следующим свойствам:

- (i) любая перестановка $\sigma(i, j)$ свободна, т.е. не имеет неподвижных точек;
- (ii) любые две перестановки, стоящие в одной строке или в одном столбце, являются дизъюнктивными, т.е. образы любого элемента при этих перестановках различны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале заметим, что для любой матрицы, соответствующей полному графу, все пары $\{C_i, C_j\}$ в любой реализации матрицы J являются дизъюнктивными. Тогда из (7.21) вытекает, что $|C_i| = |P|$ для любого i и любого $P \in \Pi$. Положим $n = |P|$. Так как каждая матрица Q_P имеет размер минимум 2×2 , мы имеем $n \geq 2$. Очевидно, все диагональные элементы матрицы Q равны $n-1$.

Теперь упорядочим все элементы в Π как $P_0, P_1, \dots, P_{p-1}$. Упорядочивая элементы в P_s ($s = 0, 1$) и строки матрицы J соответствующим образом, мы можем предположить, не ограничивая общности, что

- (i) $C_i = \{n(i-1) + 1, \dots, ni\}$ при $i \in P_0$, т.е. $1 \leq i \leq n$,
- (ii) $C_j = \{j-n, j, \dots, j+(n-2)n\}$ при $j \in P_1$, т.е. $n+1 \leq j \leq 2n$,
- (iii) для любого $r > 0$ первые n строк матрицы $J_r = J_{P_r}$ образуют единичную матрицу.

Теперь разобьем все строки матрицы J на блоки по n последовательных строк с $jn+1$ по $(j+1)n$ ($j = 0, 1, \dots, n-1$). Заметим, что из условий на матрицы J_0 и J_1 вытекает, что их блоки фиксированы: все блоки в J_1 равны единичной матрице (размера $n \times n$), а i -й блок в J_0 имеет i -й столбец, состоящий из единиц, а остальные столбцы – нулевые. Таким образом, мы можем сконцентрировать наше внимание на блоках в матрицах J_r с $r > 1$.

Так как первый блок в каждой матрице J_r равен единичной матрице, любой другой блок определяет n -перестановку. Мы получаем некоторую $((n-1) \times (p-2))$ -матрицу перестановок. Очевидно, что условия на матрицу J эквивалентны условиям (i) и (ii) из нашей теоремы. Отсюда вытекают все еще не доказанные утверждения.

Реализация конфигурациями. Еще одним вопросом является выяснение того, существует ли конфигурация над данным полем, для которой матрица Q , определяемая как в теореме 7.34, дает неприводимую компоненту многообразия R^1 . Пересекая произвольную конфигурацию $\mathcal{A}$ некоторым 3-мерным пространством, находящимся в общем положении с $\mathcal{A}$, и проецируя, мы можем свести наш вопрос к конфигурациям прямых на проективной плоскости.

Мы можем описать такие конфигурации над $\mathbb{C}$, реализующие матрицы J из теоремы 7.32 в случае $n = 2$ и $n = 3$. При $n = 2$ это конфигурация Коксетера типа A_3 , задаваемая прямыми $\{x, y, z, x-y, x-z, y-z\}$, а при $n = 3$ – конфигурация Гессе из 12 прямых, содержащих 9 флексов неособой кубики (например, можно взять прямые $\{x, y, z, x+\zeta^i y+\zeta^j z\}$, где $\zeta = \exp(2\pi\sqrt{-1}/3)$, а i, j независимо пробегают значения 0, 1 и 2). В следующем разделе мы докажем, что при $n > 3$ матрицы J не соответствуют никаким конфигурациям над $\mathbb{C}$.

Другим примером является конфигурация 9 прямых, проективно двойственная конфигурации Гессе, также называемая конфигурацией Чевы (3) (или представлением

плоскости порядка 3). Все 12 точек в этой конфигурации не определяют ни одной неприводимой компоненты резонансного многообразия R^1 , так как все компоненты соответствующей матрицы Q являются конечными. Любое подмножество из 9 точек такое, что через оставшиеся 3 точки проходят все 9 прямых, определяет нелокальную компоненту многообразия R^1 типа, описанного в теореме 7.34 с $n = p = 3$.

Относительно теоремы 7.34 заметим, что она полностью покрывает случай конфигураций прямых с лишь тройными кратными точками, многообразия R^1 для которых содержат нелокальные компоненты. Действительно, если любая строка матрицы J содержит в точности три единицы, то матрица Q может иметь не более трех компонент. Следовательно, число компонент есть в точности три, и каждая из них соответствует полному графу. Из предыдущей теоремы вытекает, что всего имеется $3n$ прямых (для некоторого n), разбитых на 3 группы одинаковой длины n , таких, что прямые в каждой группе находятся в общем положении и через каждую кратную точку проходит по одной прямой из каждой группы. В следующем разделе мы покажем, что такие конфигурации (или, эквивалентно, их двойственные конфигурации) не могут существовать при $n > 5$.

Другая серия реализуемых матриц Q получается из аффинных матриц, соответствующих кустам. Пусть Γ – граф из трех связных компонент, каждая из которых представляет собой куст с $r + 1$ вершиной. Пусть ограничение вектора меток m на каждую связную компоненту имеет вид $(1, r, \dots, r)$, где метка 1 соответствует корню куста. Тогда матрица $Q(m, \Gamma)$ имеет три аффинных компоненты и реализуема. В качестве J можно взять матрицу инцидентности всех прямых и всех точек комплексной конфигурации прямых типа $\mathcal{A}_{r,1,3}$, задаваемой как $\{x, y, z, x^r - y^r, x^r - z^r, y^r - z^r\}$ (см. [15; замечание 6.3]).

Матрицы Картана. В оставшейся части этого пункта мы классифицируем все реализуемые матрицы с несколькими аффинными компонентами такие, что по крайней мере три из этих компонент являются матрицами Картана. Мы используем прямое рассуждение: для заданной неразложимой матрицы мы рассматриваем все ее реализации и перечисляем все возможности для столбцов других неразложимых компонент в каждой реализации. Изучая этот список, мы можем определить, какие компоненты могут быть реализованы совместно с изначальной матрицей. Для того чтобы уменьшить перебор, мы используем следующее простое наблюдение.

ЛЕММА 7.35. Пусть Γ – граф на вершинах $\{v_1, \dots, v_n\}$, $m = (m_1, \dots, m_n)$ – вектор меток на его вершинах и $Q = Q(m, \Gamma)$. Пусть Π – разбиение множества вершин графа Γ на связные компоненты. Зафиксируем $P \in \Pi$ и $v_i \in P$. Пусть J – реализация матрицы Q , а матрица J' получается из J удалением i -го столбца и всех строк, ограничение которых на $P \setminus \{v_i\}$ есть 0. Тогда матрица J' является реализацией матрицы $Q' = Q(m', \Gamma')$, где Γ' – подграф в Γ на множестве вершин $\{v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n\}$, причем $m'_j \leq m_j$ для всех $j \neq i$ и $m'_j = m_j$ на $P \setminus \{v_i\}$.

Так как мы рассматриваем матрицы Картана, для вектора меток m мы имеем $m_i = 2$ для всех i . Заметим, что в терминах конфигураций прямых это означает, что мы рассматриваем только такие системы кратных точек, что любая прямая, проходящая через эти точки, содержит в точности 3 из них. При этом условия неразложимые аффинные матрицы являются матрицами Картана расширенных схем Дынкина без кратных ребер, т.е. типов $A_p^{(1)}$ ($p \geq 2$), $D_p^{(1)}$ ($p \geq 4$) и $E_p^{(1)}$ ($p = 6, 7, 8$).

Заметим, что все эти графы, кроме $A_2^{(1)}$, содержат в качестве подграфа граф $\Gamma_0 = A_3$. Поэтому наиболее важным для анализа является граф Γ_0 .

Следующие факты о Γ_0 могут быть получены непосредственной проверкой.

(i) Матрица Картана графа Γ_0 имеет единственную (с точностью до порядка) реализацию вида

$$J_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Имеется в точности два максимальных множества столбцов, трансверсальных к набору, состоящему из столбцов матрицы J_0 , любые два из которых пересекаются не более чем по одному элементу. Записанные в виде матриц, эти множества имеют вид

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Соответствующие симметрические матрицы $R_i = T_i^t T_i - \mathcal{E}$ ($i = 1, 2$) имеют вид

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Эти матрицы соответствуют следующим графам Γ_1 и Γ_2 с помеченными вершинами.

(iii) Теперь предположим, что граф Γ содержит по крайней мере три расширенных схемы Дынкина без кратных ребер в качестве связных компонент и по крайней мере одна из них, скажем, Γ' , содержит подграф A_3 (т.е. эта компонента не есть $A_2^{(1)}$). Предположим, что соответствующая матрица Картана $Q = Q(m, \Gamma)$ ($m = (2, \dots, 2)$) реализуема матрицей J . Обозначим через J' подматрицу в J , состоящую из столбцов матрицы J , соответствующих вершинам графа Γ' , и обозначим через J'' матрицу, состоящую из других столбцов. Тогда из леммы 7.35 вытекает, что матрица J'' может быть получена либо из J_1 , либо из J_2 добавлением трех новых строк, которые образуют единичный блок с первыми тремя строками из матрицы J_i и имеют все 0 на остальных позициях, и возможным удалением некоторых столбцов. Добавление трех

новых строк не изменяет граф Γ_i , а лишь превращает все метки в $(2, 2, \dots, 2)$. Следовательно, при удалении некоторых вершин либо из Γ_1 , либо из Γ_2 должен получаться граф, имеющий в качестве связных компонент по крайней мере две расширенных схемы Дынкина. Однако проверка показывает, что это невозможно, что приводит к противоречию. Итак, матрица Q не реализуема.

(iv) Остается лишь случай, когда каждая компонента матрицы Q является матрицей Картана для $A_2^{(1)}$. Этот случай покрывается теоремой 7.34. Более того, так как группа перестановок на множестве $\{1, 2, 3\}$ содержит лишь два элемента без неподвижных точек, реализация матрицы Q единственна (с точностью до порядка). Максимальное число компонент матрицы Q есть 4, и если Q имеет 4 аффинных компоненты, то она реализуется следующей матрицей J_C :

$$J_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если же матрица Q имеет три аффинных компоненты, то она реализуется матрицей, составленной из 9, 10 или 11 первых столбцов матрицы J_C .

Напомним, что матрица J_C была реализована набором всех кратных точек в конфигурации Гессе. Более того, эта реализация проективно единственна над $\mathbb{C}$ (см. [68; пример 4.2]). Отсюда мы получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 7.36. Пусть $\mathcal{A}$ – проективная конфигурация прямых, в которой каждая прямая содержит в точности 3 кратных точки. Пусть, далее, множество всех кратных точек задает некоторую компоненту многообразия R^1 . Тогда конфигурация $\mathcal{A}$ может содержать от 9 до 12 прямых. Если она содержит 12 прямых, то она является конфигурацией Гессе.

Аналогично можно изучить случай, когда $m_i \leq 2$ для любого i . Единственной дополнительной возможностью здесь является наличие трех компонент, каждая из которых является аффинной матрицей, соответствующей кусту с 2 листьями.

7.7. Проблемы. В то время как доказаны некоторые факты о многообразии R_m^1 , очень мало известно о многообразиях R_m^p при $p > 1$. Одной из особо интересных проблем является описание неприводимых компонент многообразия R_m^p явными уравнениями (напомним, что известно, что эти компоненты являются линейными подпространствами в A_1). Мы предполагаем, что в качестве этих уравнений можно взять уравнения вида

$$\sum_{H_i \supset X} x_i = 0$$

для некоторого $X \in L$ и $x = \sum_i x_i e_i \in A_1$. Этот вид подсказан детерминантной формулой из [57], но доказательство имеется лишь для $p = 1$ (см. следствие 7.24) и в очень немногих других случаях.

Другой подход к изучению случая $p > 1$ заключается в изучении всего идеала $Z(a)$ алгебры A , аннулирующего элемент $a \in A_1$. Например, интересно описать случай, когда идеал $Z(a)$ порожден элементами степени 1.

8. Когомологии локальных систем на дополнениях к конфигурациям

Исторически, именно взаимоотношения между когомологиями $H^*(A, a)$ и когомологиями локальных систем на дополнениях гиперплоскостей M мотивировали изучение когомологий $H^*(A, a)$. В этом разделе мы ни в какой мере не претендуем на полный обзор темы, вынесенной в название. За этим мы отправляем читателя к работам [52], [29], [47], [43] и другим приведенным там ссылкам. Мы же лишь обсуждаем некоторые результаты, которые могут быть применены к вычислению когомологий $H^*(A, a)$ и, в частности, к доказательству более сильных версий результатов из предыдущего раздела. Результаты п. 8.3 взяты из [46].

8.1. Когомологии локальных систем общего положения и $H^*(A, a)$. В этом разделе все конфигурации рассматриваются над $\mathbb{C}$ и проецивизируются. Другими словами, $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_n\}$ есть множество проективных гиперплоскостей в $\mathbb{P}^{\ell-1}$. Как и раньше, положим $M = \mathbb{P}^{\ell-1} \setminus \bigcap_i H_i$. Если A есть ОС-алгебра (над $\mathbb{C}$) соответствующей центральной конфигурации в $\mathbb{C}^\ell$, то алгебра $H^*(M, \mathbb{C})$ может быть отождествлена с градуированной подалгеброй $\bar{A}$ в A , порожденной элементами из $\bar{A}_1 = \Delta = \{x = \sum_i x_i e_i \mid \sum_i x_i = 0\}$.

Элемент $a \in \bar{A}_1$ определяет локальную систему $\mathcal{L}(a)$ на M , ассоциированную с одномерным представлением группы $\pi_1(M)$, переводящим образующую этой группы, соответствующую гиперплоскости H_i , в $\exp(2\pi i a_i)$. Другими словами, 1-форма $\omega_a = \sum_i a_i d\alpha_i / \alpha_i$ на M определяет интегрируемую связность $\nabla_a = d + \omega_a$ в тривиальном векторном расслоении ранга 1 (здесь d обозначает дифференциал де Рама). Локальная система $\mathcal{L}(a)$ образована горизонтальными сечениями относительно этой связности. Когомологии $H^*(M, \mathcal{L}(a))$ можно определить как когомологии комплекса

$$\Omega = (0 \longrightarrow \Omega^* \longrightarrow \Omega^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow \Omega^{\ell-1} \longrightarrow 0),$$

который является глобальным комплексом де Рама на M , снабженным подкрученным дифференциалом $d + \omega_a \wedge$. Следствие 4.5 дает вложение комплексов $(\overline{A}, a) \subset \Omega$, при котором элемент $e_i - e_j$ переходит в $d\alpha_i/\alpha_i - d\alpha_j/\alpha_j$.

Отметим следующие простые, но важные свойства когомологий локальных систем, которые вытекают непосредственно из определений.

ЛЕММА 8.1. *Для любого $a \in \overline{A}_1$ имеем*

- (i) $H^*(\overline{A}, a) = H^*(\overline{A}, \lambda a)$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}^*$;
- (ii) $H^*(M, \mathcal{L}(a)) = H^*(M, \mathcal{L}(a + z))$ для любого $z = (z_i) \in \mathbb{Z}^n$ такого, что $\sum_{i=1}^n z_i = 0$.

Следующий результат связывает когомологии $H^*(M, \mathcal{L}(a))$ и $H^*(\overline{A}, a)$ для элемента a достаточно общего положения. Доказательство этого результата хорошо известно и может быть найдено либо в оригинальных работах [24], [59], либо в книге [52].

ТЕОРЕМА 8.2. *Пусть $a \in \overline{A}_1$ и для всех элементов $X \in L$ таких, что конфигурация $\mathcal{A}_X$ неразложима, сумма $\sum_{i \in X} a_i$ не равна положительному целому числу. Тогда вложение $(\overline{A}, a) \subset \Omega$ является квазиизоморфизмом. В частности,*

$$\dim H^p(M, \mathcal{L}(a)) = \dim H^p(\overline{A}, a)$$

для любого p .

Идея доказательства заключается в том, чтобы раздуть $\mathbb{P}^{\ell-1}$ вдоль подпространств X , а затем применить теорему о квазиизоморфизме из [17].

Теперь из теоремы 8.2 и леммы 8.1 мы получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.3. *Для любого $a \in \overline{A}_1$ и любого p*

$$\dim H^p(M, \mathcal{L}(a)) \geq \dim H^p(\overline{A}, a).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \in \overline{A}_1$. Зафиксируем вещественное число $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $X \in L$ и $0 < t < \varepsilon$ число $(1 - t) \sum_{i \in X} a_i$ не является положительным целым. Тогда из теоремы 8.2 и леммы 8.1 (i) мы получаем, что для любого p имеет место равенство

$$H^p(M, \mathcal{L}((1 - t)a)) = H^p(\overline{A}, (1 - t)a) = H^p(\overline{A}, a).$$

Используя свойство полунепрерывности сверху размерностей когомологий при $t \rightarrow 0$, мы получаем требуемое утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 8.4. *Для любых $a \in \overline{A}_1$ и p имеем*

$$\dim H^p(M, \mathcal{L}(a)) \geq \sup_{z \in \mathbb{Z}^n} \dim H^p(\overline{A}, a + z).$$

8.2. Характеристические многообразия. Характеристические многообразия для когомологий $H^*(M, \mathcal{L}(a))$ определяются аналогично резонансным многообразиям для $H^*(A, a)$. Множество всех локальных систем ранга 1 на M можно отождествить с тором $H^1(M, \mathbb{C}^*) = \text{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{C}^*) \cong (\mathbb{C}^*)^n$. Для данных целых $m, p \geq 1$ *характеристическое многообразие* Σ_m^p дополнения M есть алгебраическое подмногообразие в торе, состоящее из тех локальных систем $\mathcal{L}$, для которых $\dim H^p(M, \mathcal{L}) \geq m$. Многообразия Σ_m^p также называются *носителями когомологий*.

Наибольшее число известных результатов о многообразиях Σ_m^p относится к случаю $p = 1$. С этого момента мы рассматриваем лишь этот случай и полагаем $\Sigma^1 = \Sigma_1^1$. В силу скрученной версии теоремы Лефшеца (см. [61]) группа $\pi_1(M)$ не изменится, если мы заменим конфигурацию $\mathcal{A}$ ее пересечением с плоскостью общего положения. По этой причине мы всегда будем предполагать, что $\mathcal{A}$ является конфигурацией прямых в (комплексной) проективной плоскости $\mathbb{P}^2$.

Имеется эквивалентное определение многообразий Σ_m^1 в терминах инварианта Александера дополнения M . Пусть Λ – групповое кольцо для $H^1(M)$. Так как $H^1(M)$ является свободной абелевой группой с n фиксированными образующими, кольцо Λ можно отождествить с кольцом лорановских многочленов от n образующих. Если M' – максимальное абелево накрытие дополнения M , то $B = H_1(M')$ является модулем над Λ . Этот модуль часто называется *инвариантом Александера* дополнения M (или конфигурации $\mathcal{A}$). Для любого целого числа $m \geq 1$ и любого представления

$$\mathcal{K}_1 \xrightarrow{f} \mathcal{K}_0 \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

группы B образующими и соотношениями определен идеал F_m в кольце Λ , порожденный всеми минорами матрицы отображения f коразмерности $m - 1$. Тогда Σ_m^1 есть подмногообразие в $(\mathbb{C}^*)^n$, задаваемое идеалом $F_m \otimes \mathbb{C}$ в кольце $\Lambda \otimes \mathbb{C}$.

Известно, что многообразие R^1 тесно связано с компонентами многообразия Σ^1 , проходящими через единицу $\mathbf{1}$ тора $(\mathbb{C}^*)^n$. Мы приведем следующие факты без доказательств.

(1) Для любой неприводимой компоненты $\mathcal{W}$ многообразия Σ_m^1 положительной размерности найдутся s ($s > m$) точек $p_1, \dots, p_s$ в $\mathbb{P}^1$ и отображение $f: M \rightarrow C = \mathbb{P}^1 \setminus \{p_1, \dots, p_s\}$ такие, что $\mathcal{W} = f^*(H^1(C, \mathbb{C}^*))$ [6], [46].

(2) Пусть W – неприводимая компонента многообразия R_m^1 . Тогда образ W при отображении $a \mapsto \mathcal{L}(a)$ является универсальным накрытием некоторой неприводимой компоненты (проходящей через $\mathbf{1}$) многообразия Σ_{s-1}^1 для некоего $s > m$ [46]. Любая компонента многообразия Σ^1 положительной размерности, содержащая $\mathbf{1}$, накрывается вышеописанным образом некоторой компонентой многообразия R^1 .

(3) Касательный конус к Σ_m^1 в точке $\mathbf{1}$ совпадает с R_m^1 [15].

(4) Для всех классов сопряженности по модулю $\mathbb{Z}^n$ элемента $a \in R^1$, кроме конечного числа, мы имеем

$$\dim H^1(M, \mathcal{L}(a)) = \sup_{z \in \mathbb{Z}^n} \dim H^1(A, a + z)$$

(см. [46]).

8.3. Пучки кривых. Используя соотношения между когомологиями $H^1(A, a)$ и $H^1(M, \mathcal{L}(a))$, мы можем усилить некоторые результаты из п. 7.6. Как и в п. 7.6, мы ограничимся рассмотрением конфигураций прямых на проективной плоскости $\mathbb{P}^2$.

Вначале мы покажем, что матрица $Q = Q(\mathcal{X})$, соответствующая набору $\mathcal{X}$ точек на $\mathbb{P}^2$, имеет естественную геометрическую интерпретацию. Пусть P' – раздутие проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ в точках из набора $\mathcal{X}$. Пусть далее F – свободная абелева группа, образующие которой соответствуют собственным прообразами в P' прямых из конфигурации $\mathcal{A}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.5. *Форма пересечений на P' индуцирует симметрическую билинейную форму на F , матрица которой есть $-Q$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Элементы матрицы билинейной формы, индуцированной на F формой пересечений на P' , описываются следующим образом. Если две прямые в P пересекаются в точке из $\mathcal{X}$, то матричный элемент, соответствующий этим прямым, есть 0; если прямые пересекаются в точке, не принадлежащей $\mathcal{X}$, то матричный элемент есть 1; диагональный элемент, соответствующий некоторой прямой, равен $1 - m$, где m – число точек из $\mathcal{X}$ на этой прямой (это описание вытекает из того факта, что раздутие в точке уменьшает индекс пересечения на 1). Сравнивая это с определением матрицы Q из п. 7.5, мы получаем доказательство требуемого утверждения.

Для изучения соотношений между компонентами многообразий R^1 и Σ^1 достаточно ограничиться рассмотрением *существенных* компонент. Мы назовем компоненту W многообразия R^1 существенной, если $\mathcal{B} = \mathcal{A}$ в обозначениях предложения 7.29. Существенная компонента определяется покрытием конфигурации $\mathcal{A}$ некоторым набором подмножеств $\mathcal{X}$, и мы иногда будем отмечать это, используя для W обозначение $W(\mathcal{X})$. Например, локальная компонента, определяемая элементом $X \in L'(2)$, является существенной, если все прямые из конфигурации проходят через X .

Компонента $\mathcal{W}$ многообразия Σ^1 является существенной, если она покрывается (в смысле свойства (2) из предыдущего пункта) существенной компонентой $W(\mathcal{X})$ многообразия R^1 . Мы иногда будем обозначать $\mathcal{W}$ через $\mathcal{W}(\mathcal{X})$. Эквивалентно, компонента $\mathcal{W}$ многообразия Σ^1 является существенной, если не существует подконфигурации $\mathcal{A}'$ в $\mathcal{A}$ такой, что для некоторой компоненты $\mathcal{W}'$ характеристического многообразия для $\mathcal{A}'$ мы имеем $\mathcal{W} = i^*(\mathcal{W}')$, где отображение групп характеров $i^*: H^1(M(\mathcal{A}'), \mathbb{C}^0) \rightarrow H^1(M(\mathcal{A}), \mathbb{C}^0)$ индуцировано вложением. Заметим, что все существенные компоненты многообразия Σ^1 имеют положительную размерность и содержат **1**.

Пусть $\mathcal{W}$ – существенная компонента многообразия Σ^1 . Нашей ближайшей целью является построение пучка кривых в P' , соответствующего компоненте $\mathcal{W}$.

Пусть $f: M \rightarrow \mathbb{P}^1 \setminus \{p_1, \dots, p_m\}$ – отображение, соответствующее компоненте $\mathcal{W}$ в силу свойства (1) из предыдущего пункта. Отображение f определяет рациональное отображение $\tilde{f}: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$, которое регулярно вне множества коразмерности 2 (см. [49]), т.е. вне конечного числа точек. Так как отображение f регулярно вне $\bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$, мы имеем

$$\bigcup \tilde{f}^{-1}(p_i) \subset \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H. \quad (8.1)$$

Кривые, которые являются замыканиями слоев отображения $\tilde{f}$, не имеют общих неприводимых компонент. Действительно, если предположить, что C является такой компонентой, то из (8.1) вытекает, что C должна быть прямой, а $\mathcal{W}$ – образом компоненты конфигурации, получаемой из $\mathcal{A}$ удалением прямой C . Это противоречит предположению о том, что $\mathcal{W}$ – существенная компонента.

Положим $f' = \tilde{f} \circ \sigma$, где $\sigma: P' \rightarrow \mathbb{P}^2$ – раздутие. Обозначим пучок замыканий слоев отображения f' через $\pi(\mathcal{W})$ и будем называть его *пучком, соответствующим компоненте $\mathcal{W}$* . Слои $(f')^{-1}(p_i)$ будем называть *специальными*. Из предыдущего абзаца вытекает, что пучок $\pi(\mathcal{W})$ не имеет базисных точек. Кроме того, из теоремы Бертини вытекает, что слой общего положения пучка $\pi(\mathcal{W})$ является неособым.

ТЕОРЕМА 8.6. Пусть $\mathcal{W}(\mathcal{X})$ – существенная компонента многообразия Σ^1 . Тогда множество специальных слоев пучка $\pi = \pi(\mathcal{W}(\mathcal{X}))$ находится во взаимно-однозначном соответствии с разбиением $\Pi(\mathcal{X})$, т.е. с блоками матрицы $Q(\mathcal{X})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть D_i – свободная абелева группа, порожденная прямыми из конфигурации $\mathcal{A}$, собственные преобразования которых лежат в $(f')^{-1}(p_i)$. Очевидно, что подгруппы D_i и D_j ортогональны в F относительно формы пересечений. С другой стороны, ни одна из исключительных кривых в P' не принадлежит специальному слою пучка π , и специальные слои пучка π являются связными в силу теоремы Зариского о связности (см. [49; 3.24]). Итак, форма пересечений неразложима на D_i .

Далее вспомним [18; exp. X], что для любого слоя некоторого расслоения на поверхности существует единственная линейная комбинация z_0 компонент этого слоя с положительными целыми коэффициентами такая, что

- (а) для любой комбинации z компонент этого слоя имеет место неравенство $(z, z) \leq 0$, которое обращается в равенство, если и только если z является целым кратным z_0 ;
- (б) $(z, z_0) = 0$ для любой комбинации z , носитель которой принадлежит данному слою.

Отсюда вытекает, что форма пересечений на каждой группе D_i аффинна, что завершает доказательство.

Существование пучка, специальные слои которого образуют разбиение конфигурации, налагает сильные ограничения на конфигурацию. Например, имеет место следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.7. Пусть $\mathcal{A}$ – конфигурация из $t \cdot n$ ($t \geq 3, n \geq 2$) прямых, для которой

- (а) матрица Q , соответствующая всем кратным точкам пересечения, представляется в виде суммы t равных блоков, и прямые, соответствующие каждому блоку, находятся в общем положении;
- (б) через любую кратную точку пересечения проходит по одной прямой из каждой группы;
- (в) каждая прямая содержит n кратных точек пересечения.

Тогда $t \leq 5$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как вытекает из (в), каждая группа прямых является аффинной. Следовательно, существует пучок π , специальные слои которого соответствуют блокам матрицы Q . Вычислим эйлерову характеристику многообразия P' , являющегося раздутием проективной плоскости с центром в кратных точках конфигурации. Из условий (в) и (а) вытекает, что всего имеется n^2 кратных точек, а значит, эйлерова характеристика многообразия P' есть $\mathcal{E}_1 = 3 + n^2$. С другой стороны, P' является разветвленным накрытием над $\mathbb{P}^1$ с m специальными слоями, соответствующими n прямым в общем положении, а слой общего положения является неособой плоской кривой степени n . Эйлерова характеристика каждого из вышеописанных специальных слоев равна $2n - \frac{n(n-1)}{2}$. Эйлерова характеристика слоя общего положения равна $3n - n^2$. Отсюда $\mathcal{E}_1 \geq \mathcal{E}_2$, где $\mathcal{E}_2 = (2 - m) \cdot (3n - n^2) + m \cdot (2n - \frac{n(n-1)}{2})$ (неравенство имеет место в силу полунепрерывности эйлеровой характеристики и возможного наличия других особых слоев). Но $\mathcal{E}_2 > \mathcal{E}_1$ при $m \geq 6$, откуда получаем требуемое утверждение.

Заметим, что если $m = n + 1$ в предыдущей теореме, то из доказательства вытекает, что $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ тогда и только тогда, когда $n = 2, 3$. В этих случаях мы имеем пучок, все особые слои которого составлены из прямых конфигурации.

Аналогичное рассуждение приводит к ограничению на размер конфигурации, имеющей данное число кратных точек на каждой прямой и большую размерность $\dim R_1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.8. Пусть $\mathcal{A}(r, m)$ – класс конфигураций, все прямые в которых содержат не более m кратных точек пересечения и для которых $\dim R_1 = r$. Пусть Π – разбиение конфигурации из данного класса, соответствующее компоненте размерности r многообразия R^1 . Тогда имеется функция $F(r, m) \leq 2m + 1$ такая, что число прямых в каждом из $r + 1$ элементов разбиения Π не превосходит $F(r, m)$. В частности, число прямых в такой конфигурации не превосходит $(r + 1)F(r, m) < (r + 1)(2m + 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждение аналогично использованному при доказательстве предыдущего предложения. Пусть d – максимальное число прямых в каждом специальном слое пучка. Тогда эйлерова характеристика многообразия P' больше, чем $\mathcal{E}_2 = (2 - r)(3d - d^2) + r(2d - d(d - 1)/2)$ (это следует из полунепрерывности эйлеровой характеристики). С другой стороны (используя раздутие), эта эйлерова характеристика больше или равна $\mathcal{E}_1 = 3 + d \cdot m \cdot r$. Мы имеем $\mathcal{E}_2 > \mathcal{E}_1$, откуда получаем противоречие, за исключением случая, когда $\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$ как многочлен от d имеет положительный корень $F(r, m)$ (что является ограничением на d). Непосредственное вычисление показывает, что при $r \rightarrow \infty$ положительный корень многочлена $\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$ является возрастающей функцией от r , предел которой есть $2m + 1$.

8.4. Проблемы. Соотношения между резонансными многообразиями и соответствующими характеристическими многообразиями все еще остаются таинственными. Суть в том, что могут существовать компоненты характеристических многообразий, не проходящие через **1**. Такие компоненты размерности 0 уже были известны некоторое время назад. Компоненты размерности 1 были найдены Сушиу в работе [63], что дало решение некоторых проблем из [47]. Неизвестно, могут ли эти компоненты быть

обнаружены при помощи алгебры A или, в более общем случае, при помощи комбинаторики конфигурации. Вообще говоря, они не могут быть обнаружены при помощи резонансных многообразий, так что здесь должны быть привлечены другие комбинаторные инварианты. Любое продвижение в этом направлении представляет большой интерес.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] D. Anick. Non-commutative graded algebras and their Hilbert series // J. Algebra. 1982. V. 78. P. 120–140.
- [2] K. Aomoto. Un théorème du type de Matsushima–Murakami concernant l'intégrale des fonctions multiformes // J. Math. Pures Appl. (9). 1973. V. 52. P. 1–11.
- [3] K. Aomoto. Les équations aux différences linéaires et les intégrales des fonctions multiformes // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA. 1975. V. 22. P. 271–297.
- [4] K. Aomoto. Poincaré series of the holonomy Lie algebra attached to a configuration of lines // Preprint. Nagoya: Nagoya University, 1984.
- [5] A. Aramova, L. A. Avramov, J. Herzog. Resolutions of monomial ideals and cohomology over exterior algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 2000. V. 352. P. 579–594.
- [6] D. Arapura. Geometry of cohomology support loci for local systems. I // J. Algebraic Geom. 1997. V. 6. P. 563–597.
- [7] J. Backelin, R. Fröberg. Koszul algebras, Veronese subrings and rings with linear resolutions // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 1985. V. 30. P. 85–97.
- [8] A. Beilinson, V. Ginzburg, W. Soergel. Koszul duality patterns in representation theory // J. Amer. Math. Soc. 1996. V. 9. P. 473–527.
- [9] A. Björner, G. Ziegler. Broken circuit complexes: factorizations and generalizations // J. Combin. Theory Ser. B. 1991. V. 51. P. 96–126.
- [10] A. Bousfield, V. Gugenheim. On PL De Rham Theory and Rational Homotopy Type. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1976. (Mem. Amer. Math. Soc. V. 179.)
- [11] E. Brieskorn. Sur les groupes de tresses // Lecture Notes in Math. 1973. V. 317. P. 21–44.
- [12] А. Картан, С. Эйленберг. Гомологическая алгебра. М.: ИЛ, 1960.
- [13] K. T. Chen. Iterated integrals of differential forms and loop space cohomology // Ann. of Math. (2). 1973. V. 97. P. 217–246.
- [14] D. Cohen, P. Orlik. Arrangements and local systems // Math. Res. Lett. 2000. V. 7. № 2–3. P. 299–316.
- [15] D. Cohen, A. Suciu. Characteristic varieties of arrangements // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1999. V. 127. № 1. P. 33–53.
- [16] H. Crapo. A higher invariant for matroids // J. Combin. Theory. 1967. V. 2. P. 406–417.
- [17] P. Deligne. Equations différentielles à points singuliers réguliers. Berlin: Springer-Verlag, 1970. (Lecture Notes in Math. V. 163.)
- [18] P. Deligne, N. Katz. Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique (SGA 7 II). Berlin: Springer-Verlag, 1973. (Lecture Notes in Math. V. 340.)
- [19] P. Deligne, P. Griffiths, J. Morgan, D. Sullivan. Real homotopy theory of Kähler manifolds // Invent. Math. 1975. V. 29. P. 245–274.
- [20] G. Denham, S. Yuzvinsky. Annihilators of ideals of exterior algebras // Preprint, CO/0010168, 2000.
- [21] J. Eagon, V. Reiner. Resolutions of Stanley–Reisner rings and Alexander duality // J. Pure Appl. Algebra. 1998. V. 130. P. 265–275.
- [22] D. Eisenbud, F.-O. Schreyer. Free resolutions over exterior algebras // Preprint, AG/0005055, 2000.
- [23] D. Eisenbud, S. Popescu, S. Yuzvinsky. Hyperplane arrangement cohomology and monomials in the exterior algebra // Preprint, AG/9912212, 1999.
- [24] H. Esnault, V. Schechtman, E. Viehweg. Cohomology of local systems of the complement of hyperplanes // Invent. Math. 1992. V. 109. P. 557–561; 1993. V. 112. P. 447.
- [25] M. Falk. The minimal model of the complement of an arrangement of hyperplanes // Trans. Amer. Math. Soc. 1988. V. 309. P. 543–556.

- [26] M. Falk. Arrangements and cohomology // *Ann. Combin.* 1997. V. 1. P. 135–157.
- [27] M. Falk. Line closed matroids and quadratic algebras // Preprint, CO/0010167, 2000.
- [28] M. Falk, R. Randell. The lower central series of a fiber-type arrangement // *Invent. Math.* 1985. V. 82. P. 77–88.
- [29] M. Falk, R. Randell. On the homotopy theory of arrangements // *Adv. Stud. Pure Math.* 1987. V. 8. P. 101–124.
- [30] M. Falk, R. Randell. On the homotopy theory of arrangements. II // Preprint, CO/0002107, 2000.
- [31] M. Falk, H. Terao. β nbases for cohomology of local systems on hyperplane complements // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1997. V. 349. P. 189–202.
- [32] J. Folkman. The homology groups of a lattice // *J. Math. Mech.* 1966. V. 15. P. 631–636.
- [33] R. Fröberg. Determination of a class of Poincaré series // *Math. Scand.* 1975. V. 37. P. 29–39.
- [34] D. Grayson, M. Stillman. Macaulay 2, Version 0.8.54; <http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2>.
- [35] Ф. А. Гриффитс, Д. В. Морган. Рациональная теория гомотопий и дифференциальные формы. М.: Наука, 1990.
- [36] R. Hain. The existence of higher logarithms // *Compositio Math.* 1996. V. 100. P. 247–276.
- [37] S. Halperin, J. Stasheff. Obstructions to homotopy equivalences // *Adv. Math.* 1979. V. 32. P. 233–279.
- [38] Д. Гильберт, С. Э. Кон-Фоссен. Наглядная геометрия. М.: Наука, 1981.
- [39] В. Кац. Бесконечномерные алгебры Ли. М.: Мир, 1993.
- [40] T. Kohno. On the holonomy Lie algebra and the nilpotent completion of the fundamental group of the complement of surfaces // *Nagoya Math. J.* 1983. V. 92. P. 21–37.
- [41] T. Kohno. Série de Poincaré–Koszul associée aux groupes de tresses pures // *Invent. Math.* 1985. V. 82. P. 57–75.
- [42] T. Kohno. Rational $K[\pi, 1]$ arrangements satisfy the lower central series formula // Preprint. Nagoya: Nagoya University, 1985.
- [43] T. Kohno. Homology of a local system on the complement of hyperplanes // *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* 1986. V. 62. P. 144–147.
- [44] A. Libgober. Characteristic varieties of algebraic curves // Preprint, AG/9801070, 1998.
- [45] A. Libgober. First order deformations for rank one local systems with a non-vanishing cohomology // Preprint. Chicago: University of Illinois, 1999.
- [46] A. Libgober, S. Yuzvinsky. Cohomology of the Orlik–Solomon algebras and local systems // *Compositio Math.* 2000. V. 121. №3. P. 337–361.
- [47] A. Libgober, S. Yuzvinsky. Cohomology of local systems // *Adv. Stud. Pure Math.* (to appear).
- [48] M. Markl, S. Papadima. Homotopy Lie algebras and fundamental groups via deformation theory // *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*. 1992. V. 42. №4. P. 905–935.
- [49] Д. Мамфорд. Алгебраическая геометрия. I. Комплексные проективные многообразия. М.: Мир, 1979.
- [50] P. Orlik, L. Solomon. Combinatorics and topology of complements of hyperplanes // *Invent. Math.* 1980. V. 56. P. 167–189.
- [51] P. Orlik, H. Terao. Arrangements of Hyperplanes. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
- [52] P. Orlik, H. Terao. Arrangements and hypergeometric integrals // Preprint. Madison: University of Wisconsin, 2000.
- [53] S. Papadima, S. Yuzvinsky. On rational $K[\pi, 1]$ spaces and Koszul algebras // *J. Pure Appl. Algebra*. 1999. V. 144. P. 157–167.
- [54] Л. Е. Посицельский. Соотношение между рядами Гильберта квадратично-двойственных алгебр не влечет кошулевости // *Функц. анализ и его прил.* 1995. Т. 29. №3. С. 83–87.
- [55] J. Provan. Decompositions, shellings, and diameters of simplicial complexes and convex polyhedra // Thesis. Cornell Univ., 1977.
- [56] J.-E. Roos. On the characterization of Koszul algebras. Four counter-examples // *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 1995. V. 321. P. 15–20.

- [57] V. Schechtman, A. Varchenko. Hypergeometric solutions of Knizhnik–Zamolodchikov equations // *Lett. Math. Phys.* 1990. V. 20. P. 279–283.
- [58] V. Schechtman, A. Varchenko. Arrangements of hyperplanes and Lie algebra homology // *Invent. Math.* 1991. V. 106. P. 139–194.
- [59] V. Schechtman, H. Terao, A. Varchenko. Local systems over complements of hyperplanes and the Kac–Kazhdan conditions for singular vectors // *J. Pure Appl. Algebra.* 1995. V. 100. P. 93–102.
- [60] B. Shelton, S. Yuzvinsky. Koszul algebras from graphs and hyperplane arrangements // *J. London Math. Soc.* (2). 1997. V. 56. P. 477–490.
- [61] C. Simpson. Some families of local systems over smooth projective varieties // *Ann. of Math.* (2). 1993. V. 138. P. 337–425.
- [62] R. Stanley. Cohen–Macaulay rings and constructible polytopes // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1975. V. 87. P. 133–135.
- [63] A. Suciu. Translated tori in the characteristic varieties of complex hyperplane arrangements // Preprint, AG/9912227, 1999.
- [64] D. Sullivan. Infinitesimal computations in topology // *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 1977. V. 47. P. 269–331.
- [65] А. Н. Варченко. Бета-функция Эйлера, определитель Вандермонда, уравнения Лежандра и критические значения линейных функций на конфигурации гиперплоскостей. I; II // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1989. Т. 53. № 6. С. 1206–1235; 1990. Т. 54. № 1. С. 146–158.
- [66] M. Wachs, J. Walker. On geometric semilattices // *Order.* 1986. V. 2. P. 367–385.
- [67] S. Yuzvinsky. Cohomology of the Brieskorn–Orlik–Solomon algebras // *Comm. Algebra.* 1995. V. 23. P. 5339–5354.
- [68] G. Ziegler. Matroid representations and free arrangements // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1990. V. 320. P. 525–541.
- [69] G. Ziegler. Matroid shellability, β -systems, and affine arrangements // *J. Algebraic Combin.* 1992. V. 1. P. 283–300.

University of Oregon, USA

E-mail: yuz@math.uoregon.edu

Поступила в редакцию

25.09.2000