Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Васильев, Топология наборов плоскостей и их дополнений, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 2, 167–203

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm384>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 15:45:43

УДК 514.14

ТОПОЛОГИЯ НАБОРОВ ПЛОСКОСТЕЙ И ИХ ДОПОЛНЕНИЙ

В. А. ВАСИЛЬЕВ

Статья представляет собой краткий толковый словарь понятий и методов, связанных с топологической теорией наборов аффинных плоскостей, включая группы кос, конфигурационные пространства, порядковые комплексы, стратифицированную теорию Морса, симплициальные разрешения, комплексы графов, кольца Орлика–Соломона, комплекс Сальветти, матроиды, двойственность Спеньера–Уайтхеда, подкрученные группы гомологий, теорию монодромии и многомерные гипергеометрические функции.

Делается упор на максимальную геометричность изложения, намечаются приложения и аналогии в дифференциальной топологии.

Приводятся некоторые недавние результаты теории.

Библиография: 96 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение	168
§ 2. Основные определения, обозначения и примеры	168
§ 3. Основной пример: кольцо когомологий группы крашенных кос	170
§ 4. Кольцо Орлика–Соломона и когомологии дополнения к набору комплексных гиперплоскостей	171
§ 5. В какой степени топология дополнения определяется размерностными данными: сводка результатов	172
§ 6. Порядковый комплекс частично упорядоченного множества. Формула Горески–Макферсона	173
§ 7. Симплициальные разрешения и формула включений-исключений. Спектральная последовательность Майера–Вьеториса и ее модификации	177
§ 8. Гомотопический тип объединения аффинных плоскостей и стабильный гомотопический тип его дополнения	178
§ 9. Примеры: разрешения важных наборов плоскостей. Комплексы связных графов и гиперграфов	181
§ 10. Комбинаторная реализация классов когомологий дополнений к наборам плоскостей	183
§ 11. Умножение в когомологиях	184
§ 12. Комплекс Сальветти для комплектифицированного набора вещественных гиперплоскостей	185
§ 13. Гомологии дополнений к наборам плоскостей с подкрученными коэффициентами. Резонансы	186

§ 14. Матроиды и пространства конфигураций	192
§ 15. Приложения в интегральной геометрии: общие гипергеометрические функции	193
§ 16. Что, если набор плоскостей бесконечен	196
§ 17. Приложения и аналогии в дифференциальной топологии	198
Список литературы	200

§ 1. Введение

Конечные наборы аффинных плоскостей в $\mathbb{R}^N$ или в $\mathbb{C}^N$ (в англоязычной литературе они называются *plane arrangements*) образуют замечательный класс алгебраических множеств. Действительно,

- 1) в их исследовании переплетаются топология, комбинаторика, линейная алгебра, теория представлений, алгебраическая геометрия, теория сложности вычислений, математическая физика и теория дифференциальных уравнений;
- 2) они являются прекрасным полигоном для методов и мотивировок, имеющих очень далекие обобщения в этих областях;
- 3) они дают удачную элементарную визуализацию абстрактных алгебраических и комбинаторных понятий и конструкций.

Формулы, конструкции и теоремы, однажды появившиеся в этой теории, возникают затем вновь и вновь в довольно далеких областях и проблемах.

Один из основных вопросов теории состоит в том, насколько топологические свойства объединения нескольких плоскостей (и дополнения к этому объединению) определяются формальными данными, т.е. информацией о размерностях всех поднаборов плоскостей.

Мы воспользуемся этой задачей, чтобы продемонстрировать такие понятия и методы, как группы кос, конфигурационные пространства, порядковые комплексы, стратифицированная теория Морса, симплициальные разрешения, комплексы графов, кольца Орлика–Соломона, матроиды, двойственность Спенсера–Уайтхеда, подкрученные группы гомологий, теория монодромии, гипергеометрические функции и т. д.

Имеется несколько хороших изложений теории наборов плоскостей или различных их аспектов, см., например, [37], [23], [60], [95], [73] и в особенности [14]. Исчерпывающий обзор алгебраических аспектов теории наборов комплексных гиперплоскостей дан в статье С. Юзвинского [90].

В настоящей короткой статье я старался дать элементарное введение в теорию, уделяя особое внимание а) наиболее геометрическим аспектам и мотивировкам этой теории, б) недавним результатам, не отраженным еще в популярных текстах, в) темам, которые традиционно описываются более формальным и абстрактным образом, чем это можно сделать, г) результатам, имеющим важные приложения и обобщения в знакомых мне областях: дифференциальной топологии, теории особенностей, интегральной геометрии, теории сложности . . .

§ 2. Основные определения, обозначения и примеры

Основной объект, рассматриваемый в статье, – это произвольный конечный набор аффинных плоскостей (произвольных, быть может различных, размерностей) в $\mathbb{R}^N$. Для краткости такой объект будет называться просто *набором плоскостей*.

Набор плоскостей называется *центральный*, если все его плоскости содержат начало координат в $\mathbb{R}^N$. В этом случае говорят также, что мы имеем *набор подпространств*.

Можно определить также *комплексные* наборы плоскостей или подпространств в $\mathbb{C}^N$: они являются частным случаем обычных наборов плоскостей в $\mathbb{R}^{2N}$.

Аналогичным образом определяются наборы плоскостей в $\mathbb{RP}^N$ или в $\mathbb{CP}^N$: они находятся в очевидном взаимно однозначном соответствии с центральными наборами нетривиальных плоскостей в $\mathbb{R}^{N+1}$ (соответственно, в $\mathbb{C}^{N+1}$).

Любая аффинная плоскость в $\mathbb{R}^N$ определяет комплексную плоскость той же размерности в $\mathbb{C}^N$ – свою *комплексификацию*. Тем самым корректно определена комплексификация любого вещественного набора плоскостей.

Пусть мы имеем набор плоскостей $\mathcal{L}$, состоящий из плоскостей $L_1, \dots, L_m$. Их объединение $L_1 \cup \dots \cup L_m$ называется *носителем* набора $\mathcal{L}$ и будет обозначаться через L . Для любого набора индексов $I \subset \{1, \dots, m\}$ положим

$$L_I \equiv \bigcap_{i \in I} L_i. \quad (1)$$

Простейший пример набора *гиперплоскостей* дается *координатным крестом* в $\mathbb{R}^N$, определенным уравнением $x_1 \cdots x_N = 0$.

Следующий знаменитый набор плоскостей – *диагональный* набор $A(N, 2) \subset \mathbb{C}^N$ – состоит из $\binom{N}{2}$ гиперплоскостей $V_{ij} \equiv V_{ji}, \{i \neq j\} \subset \{1, \dots, N\}$, заданных уравнениями $x_i = x_j$. Дополнение к этому набору в $\mathbb{C}^N$ можно рассматривать как N -е *упорядоченное конфигурационное пространство* многообразия $\mathbb{C}^1$, т.е. пространство всех упорядоченных наборов из N попарно различных точек в $\mathbb{C}^1$.

Более общим образом для любого $k \in [2, N]$ *набор k -совпадения* $A(N, k)$ состоит из $\binom{N}{k}$ плоскостей $V(i_1, \dots, i_k), 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N$, заданных условиями $x_{i_1} = \dots = x_{i_k}$. Такой набор можно определить как в $\mathbb{R}^N$, так и в $\mathbb{C}^N$.

Вот еще одно обобщение набора $A(N, 2)$ (см. [22]). Рассмотрим любую конечную группу W изометрий евклидова пространства $\mathbb{R}^N$, порожденную отражениями в нескольких гиперплоскостях (*зеркала*). (Такие группы хорошо известны, см. [21]: *неприводимые* группы этого типа образуют четыре бесконечные серии A_m ($m \geq 1$), C_m ($m \geq 2$), D_m ($m \geq 4$) и $I_2(p)$ и семь исключительных случаев $G_2, F_4, H_3, H_4, E_6, E_7$ и E_8 .) Почти все орбиты действия W в $\mathbb{R}^N$ имеют одну и ту же мощность. Объединение *нерегулярных* орбит меньшей мощности состоит из зеркал, порождающих группу, и их образов при действии этой группы. Все компоненты дополнения к этому объединению являются симплицальными конусами (*камерами Вейля*). Действие W в пространстве $\mathbb{R}^N$ продолжается очевидным образом до действия в его комплексификации $\mathbb{C}^N$. Объединение D_W нерегулярных орбит последнего действия состоит из комплексификаций зеркал и их орбит. Оно называется *диагональю* группы W .

Пусть, например, зеркала задаются уравнениями $x_i = x_j, i \neq j$. Тогда группа W изоморфна группе перестановок $S(N)$, и соответствующий диагональный набор плоскостей совпадает с $A(N, 2)$. Это – случай A_{N-1} из классификации групп, порожденных отражениями.

Набор гиперплоскостей в $\mathbb{R}^N$ или в $\mathbb{C}^N$, или в $\mathbb{RP}^N$, или в $\mathbb{CP}^N$ имеет *нормальные пересечения*, если для любого подмножества $I \subset \{1, \dots, m\}$ либо плоскость L_I пуста, либо ее *коразмерность* $N - \dim L_I$ равна мощности множества I .

Набор гиперплоскостей в $\mathbb{R}^N$ или в $\mathbb{C}^N$ — *типичный* (или, эквивалентно, *общего положения*), если, будучи дополнен несобственной гиперплоскостью, он становится набором гиперплоскостей с нормальными пересечениями в $\mathbb{RP}^N$ (соответственно, в $\mathbb{CP}^N$).

Легко видеть, что для всех типичных наборов из m гиперплоскостей в $\mathbb{C}^N$ соответствующие тройки $(\mathbb{CP}^N, \mathbb{C}^N, L)$ гомеоморфны. Типичные наборы образуют открытое плотное подмножество в пространстве всех упорядоченных наборов из m гиперплоскостей.

§ 3. Основной пример: кольцо когомологий группы крашенных кос

Обозначим открытое многообразие $\mathbb{C}^N \setminus A(N, k)$ через $M(N, k)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (см. [31], [4]). *Для любого N многообразие $M(N, 2)$ является пространством типа $K(\pi, 1)$, т.е. все его старшие гомотопические группы $\pi_2, \pi_3, \dots$ тривиальны.*

Действительно, забывание последней точки набора из N точек определяет расслоение

$$M(N, 2) \rightarrow M(N-1, 2), \quad (2)$$

слой которого равен $\mathbb{C}^1 \setminus \{N-1 \text{ точек}\}$. Предложение 1 доказывается по индукции с помощью точной гомотопической последовательности этого расслоения.

Группа $\pi_1(M(N, 2))$ называется *группой крашенных кос* с N нитями. Фундаментальная группа аналогичного пространства неупорядоченных наборов называется просто *группой кос* с N нитями, см. [8]. Об алгебраических и гомологических свойствах этих групп см., в частности, [50], [5], [41], [66].

Аналогичное утверждение справедливо для любой группы, порожденной отражениями.

ТЕОРЕМА 1 (см. [22], [26]). *Для любой конечной группы W , действующей отражениями в $\mathbb{R}^N$, соответствующее пространство $\mathbb{C}^N \setminus D_W$ (т.е. объединение регулярных орбит комплексифицированного действия в $\mathbb{C}^N$) является пространством типа $K(\pi, 1)$.*

Эта теорема была доказана Э. Брискорном для групп типа $C_m, D_m, G_2, F_4, I_2(p)$; П. Делинь доказал ее в общем виде. Группы $\pi_1(\mathbb{C}^N \setminus D_W)$ для этих наборов называются *группами кос Брискорна*, см. [22].

Из теоремы 1 следует, что кольца когомологий этих групп изоморфны кольцам когомологий пространств $\mathbb{C}^N \setminus D_W$. Эти кольца были вычислены в [4] для случая A_{N-1} (т.е. для набора гиперплоскостей $D_W \equiv A(N, 2)$) и в [22] для всех остальных групп, порожденных отражениями.

Более того, дополнение $M_{\mathbb{R}}(N, 3)$ к вещественному набору 3-совпадений также является пространством типа $K(\pi, 1)$ для любого N : это утверждение было высказано А. Бьёрнером в качестве гипотезы и доказано М. Ховановым [47].

Вычисление кольца когомологий в арнольдовском случае $M(N, 2)$ вновь основано на расслоении (2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 (см. [4]). *Кольцо $H^*(M(N, 2))$ не имеет кручения и изоморфно тензорному произведению $H^*(\varphi_{N-1}) \otimes H^*(\varphi_{N-2}) \otimes \dots \otimes H^*(\varphi_1)$, где φ_i —*

букет i окружностей. В частности, полином Пуанкаре кольца $H^*(M(N, 2))$ равен $(1 + t)(1 + 2t) \cdots (1 + (N - 1)t)$.

Действительно, легко видеть, что расслоение (2) гомологически просто, т.е. фундаментальная группа базы тривиально действует на гомологиях слоя (гомотопически эквивалентного φ_{N-1}). Спектральная последовательность этого расслоения стабилизируется в члене E_2 , и мы получаем кольцевой изоморфизм $H^*(M(N, 2)) \simeq H^*(M(N - 1, 2)) \otimes H^*(\varphi_{N-1})$.

Более симметричное описание этого кольца, также полученное в [4], состоит в следующем. Для каждой плоскости V_{jk} нашего набора обозначим через ω_{jk} логарифмическую форму с особенностью на этой плоскости: $\omega_{jk} \equiv \frac{1}{2\pi i} \frac{dz_j - dz_k}{z_j - z_k}$. Интеграл этой формы по любому замкнутому пути в $M(N, 2)$ равен индексу зацепления этого пути с плоскостью V_{jk} .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для любых трех различных индексов $i, j, k \in [1, N]$ равенство

$$\omega_{ij} \wedge \omega_{jk} + \omega_{jk} \wedge \omega_{ki} + \omega_{ki} \wedge \omega_{ij} = 0 \quad (3)$$

выполняется тождественно в $M(N, 2)$. В частности, выполнено аналогичное равенство для соответствующих классов когомологий в кольце $H^*(M(N, 2))$: если Ω_{jk} – когомологический класс формы ω_{jk} , то

$$\Omega_{ij} \smile \Omega_{jk} + \Omega_{jk} \smile \Omega_{ki} + \Omega_{ki} \smile \Omega_{ij} = 0. \quad (4)$$

Алгебра целочисленных когомологий $H^*(M(N, 2))$ канонически изоморфна факторалгебре внешней алгебры, формально порожденной $\binom{N}{2}$ элементами Ω_{jk} , по идеалу, мультипликативно порожденному левыми частями всевозможных выражений (4) с произвольными i, j и k .

§ 4. Кольцо Орлика–Соломона и когомологии дополнения к набору комплексных гиперплоскостей

Аналог предложения 3 имеет место и для произвольного центрального набора комплексных гиперплоскостей.

Пусть $L = \{L_1, \dots, L_m\}$ – такой набор в $\mathbb{C}^N$, плоскости L_i которого задаются линейными уравнениями $f_i = 0$. Набор индексов $I \subset \{1, \dots, m\}$ называется *зависимым*, если коразмерность плоскости L_I меньше, чем ожидаемое значение $|I|$ (т.е. соответствующие уравнения f_i линейно зависимы). Для любого зависимого множества $I = \{i_1 < \dots < i_k\}$ обозначим через $\rho(I)$ рациональную дифференциальную $(k - 1)$ -форму

$$\sum_{j=1}^k (-1)^j \frac{df_{i_1}}{f_{i_1}} \wedge \dots \wedge \widehat{\frac{df_{i_j}}{f_{i_j}}} \wedge \dots \wedge \frac{df_{i_k}}{f_{i_k}}. \quad (5)$$

Легко видеть, что эта форма равна нулю в $\mathbb{C}^N \setminus L$.

ТЕОРЕМА 2 (см. [59]). Для любого центрального набора комплексных гиперплоскостей $\mathcal{L}$ в $\mathbb{C}^N$ кольцо целочисленных когомологий $H^*(\mathbb{C}^N \setminus L)$ канонически изоморфно факторалгебре внешней алгебры с образующими α_j , соответствующими гиперплоскостям нашего набора $\mathcal{L}$, по идеалу, порожденному всевозможными элементами

$$\sum_{j=1}^k (-1)^j \alpha_{i_1} \smile \dots \smile \widehat{\alpha_{i_j}} \smile \dots \smile \alpha_{i_k}, \quad (6)$$

соответствующими зависимым наборам $I = (i_1, \dots, i_k)$. Более того, этот же идеал порождается выражениями (6), соответствующими только минимальным зависимым наборам I .

ПРИМЕР. Для набора $A(N, 2)$ минимальные зависимые наборы – это наборы плоскостей вида $V_{i_1 i_2}, V_{i_2 i_3}, \dots, V_{i_{q-1} i_q}, V_{i_q i_1}$, где $\{i_1, \dots, i_q\} \subset \{1, \dots, N\}$ – произвольный набор индексов, $q \geq 3$. Легко видеть, что любая форма (6), заданная таким набором, принадлежит идеалу, порожденному аналогичными формами с $q = 3$.

Основной шаг к теореме 2 был сделан в [22].

СЛЕДСТВИЕ 1 (см. [22]). Группа $H^*(\mathbb{C}^N \setminus L)$ не имеет кручения.

Случай нецентрального набора гиперплоскостей в $\mathbb{C}^N$ легко сводится к случаю центрального набора в $\mathbb{C}^{N+1}$.

§ 5. В какой степени топология дополнения определяется размерностными данными: сводка результатов

Пусть $\mathcal{L}$ – произвольный аффинный набор из m плоскостей в $\mathbb{R}^N$. Допустим, что для любого $I \subset \{1, \dots, m\}$ мы знаем размерность плоскости L_I (а также пуста эта плоскость или нет). Что тогда можно сказать о топологии пространства $\mathbb{R}^N \setminus L$? Верно ли, что тот или иной топологический инвариант этого пространства однозначно определяется этими данными?

Для групп гомологий и когомологий $\mathbb{R}^N \setminus L$ ответ на последний вопрос положителен, см. [40] и § 6 ниже.

Для стабильного гомотопического типа ответ также положителен, см. [76], [96] и § 8 ниже.

Для мультипликативной структуры в когомологиях, ответы таковы.

А. В наиболее общей ситуации ответ отрицателен, см. [94], [95].

В. Для комплексных наборов плоскостей произвольных размерностей ответ положителен. Для наборов гиперплоскостей это следует из предыдущей теоремы Орлика–Соломона. В случае произвольного комплексного набора это было доказано в [24] для рациональных когомологий. Затем С. Юзвинский [91] предложил явную формулу для этого умножения в рациональных когомологиях, и наконец было доказано [28], [29], что эта же формула описывает умножение и в кольце целочисленных когомологий, см. § 11 ниже.

С. Имеется более общий класс вещественных наборов плоскостей, для которых значительная часть мультипликативной структуры определяется размерностными данными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Набор плоскостей $\mathcal{L}$ в $\mathbb{R}^N$ называется ≥ 2 -набором, если для любых двух его инцидентных плоскостей $L_I \subsetneq L_J$ выполняется $\dim J - \dim I \geq 2$.

Например, любой комплексный набор удовлетворяет этому условию.

Для таких наборов в [28], [29] была доказана явная формула умножения в когомологиях. В частности, из нее вытекает следующее предложение.

Пусть две плоскости L_I, L_J нашего набора *трансверсальны*, т.е.

$$N - \dim(L_I \cap L_J) = (N - \dim L_I) + (N - \dim L_J). \quad (7)$$

Зафиксируем также ориентацию в $\mathbb{R}^N$. Тогда любой выбор ориентаций плоскостей L_I, L_J стандартным образом задает ориентацию плоскости $L_I \cap L_J \equiv L_{I \cup J}$. Если фиксированы ориентации всех плоскостей L_I нашего набора, то для каждой упорядоченной пары трансверсальных плоскостей L_I, L_J мы получаем знак $+$ или $-$, зависящий от того, совпадает ли фиксированная ориентация плоскости $L_{I \cup J}$ с ориентацией, индуцированной фиксированными ориентациями плоскостей L_I и L_J .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть мы имеем два ≥ 2 -набора плоскостей $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ в $\mathbb{R}^N$ таких, что $\dim L_I = \dim L'_I$ для всякого I , и имеются системы ориентаций всех этих плоскостей такие, что для любой пары мультииндексов I, J , удовлетворяющих условию (7), соответствующие знаки совпадают. Тогда кольца когомологий пространств $\mathbb{R}^N \setminus L, \mathbb{R}^N \setminus L'$ изоморфны.

Конечно, комплексные наборы с одинаковыми размерностными данными удовлетворяют условиям этого предложения: если мы выберем комплексные ориентации всех плоскостей, то все знаки будут равны $+$.

Д. С другой стороны, условие на согласование ориентаций нельзя отбросить: соответствующий контрпример см. в [94].

Е. Все же что-то можно сказать даже в наиболее общем случае произвольного вещественного набора аффинных плоскостей. Группа $H^*(\mathbb{R}^N \setminus L)$ всегда обладает естественной фильтрацией, см. §§ 6, 8 ниже. Соответствующее *градуированное кольцо* однозначно определяется размерностными данными и системой знаков как в п. **С** выше. Его описание также вытекает из результатов [28], [29], см. § 11.

Наиболее хрупким инвариантом оказывается фундаментальная группа дополнения к набору плоскостей.

ТЕОРЕМА 3 (см. [64]). *Существуют два набора комплексных прямых в $\mathbb{C}^2$ с одинаковыми размерностными данными (т.е. наборами прямых, проходящих через одну точку), но с неизоморфными фундаментальными группами дополнений до их носителей.*

Наконец, если мы рассмотрим топологию не дополнения к носителю L , а самого этого носителя или его одноточечной компактификации $\bar{L}$, то размерностная информация оказывается очень сильной.

ТЕОРЕМА 4 (см. § 8). *Гомотопические типы топологических пространств L и $\bar{L}$ полностью определяются размерностными данными.*

§ 6. Порядковый комплекс частично упорядоченного множества. Формула Горески–Макферсона

Для произвольного аффинного набора вещественных плоскостей группа когомологий его дополнения была вычислена М. Горески и Р. Макферсоном в качестве яркого приложения их *стратифицированной теории Морса* [40].

В нашем частном случае эта теория работает следующим образом. Зафиксируем типичную точку $X_0 \in \mathbb{R}^N \setminus L$ и положительную квадратичную функцию $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ с центром в этой точке (т.е. равную $x_1^2 + \dots + x_N^2$ в некоторых аффинных координатах с центром в X_0). Критические значения функции f – это критические значения ее ограничений на всевозможные непустые плоскости L_I нашего набора. Если X_0 и f действительно находятся в общем положении по отношению к $\mathcal{L}$, то все эти значения, соответствующие разным плоскостям L_I , различны. Далее, для любого положительного t рассмотрим шар $B_t \equiv \{x : f(x) \leq t\}$ в $\mathbb{R}^N$ и *многообразие меньших значений* $\Lambda(t) \equiv B_t \setminus L$. Если отрезок $[a, b]$ не содержит критических значений f , то $\Lambda(a)$ и $\Lambda(b)$ гомотопически эквивалентны (и даже гомеоморфны). Если t достаточно мало, то $\Lambda(t)$ – шарик; если t достаточно велико, то $\Lambda(t)$ является деформационным ретрактом исследуемого пространства $\mathbb{R}^N \setminus L$. Следовательно, $\mathbb{R}^N \setminus L$ строится из топологически тривиального пространства при помощи конечной последовательности локальных перестроек, соответствующих всевозможным критическим значениям f .

Рис. 1. Эволюция множеств меньших значений

Рассмотрим, например, набор прямых в $\mathbb{R}^2$, изображенный на рис. 1, и его комплексификацию $\mathcal{L}$ в $\mathbb{C}^2$. Имеется четыре существенно различных некритических значения $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$; пересечения соответствующих шаров B_{t_i} с $\mathbb{R}^2$ изображены на рис. 1. Пусть $\Lambda_i \equiv \Lambda(t_i)$ – соответствующие многообразия нашего индуктивного процесса.

Многообразие Λ_1 топологически тривиально. Переходы от Λ_1 к Λ_2 и от Λ_2 к Λ_3 гомотопически эквивалентны приклеиванию 1-мерных клеток, так что Λ_3 гомотопически эквивалентно букету двух окружностей. Наконец, переход от Λ_3 к Λ_4 эквивалентен приклеиванию 2-мерной клетки. И действительно, легко видеть, что полученное многообразие Λ_4 гомотопически эквивалентно двумерному тору.

Вообще, для любого набора плоскостей индуктивное вычисление групп гомологий пространства $\mathbb{R}^N \setminus L$ включает локальные проблемы следующего типа. Допустим, что значения a, b некритичны и отрезок $[a, b]$ содержит ровно одно критическое значение функции f , а именно, критическое значение ограничения f на некоторую плоскость L_I . Топологические типы многообразий Λ_a, Λ_b различаются перестройкой, локализованной в малой окрестности соответствующей критической точки на L_I . Как связывает она группы когомологий этих многообразий?

Эта задача решена в [40] в комбинаторных терминах нашего набора плоскостей. Ответ формулируется в терминах *порядкового комплекса* частично упорядоченного множества.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть дано частично упорядоченное множество $(A, <)$, тогда соответствующий порядковый комплекс $\Upsilon(A)$ – это симплициальный комплекс, вершинами которого являются точки множества A , а симплексы натянуты на всевозможные последовательности таких точек, монотонные относительно частичного порядка.

Любой набор плоскостей $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_m\}$ определяет частично упорядоченное множество всех его непустых плоскостей L_I , $I \subset \{1, \dots, m\}$, а следовательно, и порядковый комплекс $\Upsilon(\mathcal{L})$.

Например, для трех наборов прямых, изображенных в нижнем ряду рис. 2, соответствующие порядковые комплексы показаны на рис. 3. Для диагонального набора $A(4, 2)$ (см. § 2) порядковый комплекс изображен на рис. 4.

С каждым множеством I таким, что $L_I \neq \emptyset$, связан порядковый подкомплекс $\Upsilon(I) \subset \Upsilon(\mathcal{L})$: это объединение всех симплексов в $\Upsilon(\mathcal{L})$ таких, что все их вершины соответствуют плоскостям L_J , содержащим L_I . Любой такой подкомплекс $\Upsilon(I)$ стягиваем: действительно, все его максимальные симплексы имеют общую вершину, соответствующую самой плоскости $\Upsilon(I)$. Обозначим через $\partial\Upsilon(I)$ линк этого подкомплекса, т.е. объединение всех его симплексов, не содержащих его максимальную вершину $\{\Upsilon(I)\}$.

ТЕОРЕМА 5 (см. [40]). *Допустим, что отрезок $[a, b]$ содержит ровно одно критическое значение f ; пусть L_I – соответствующая плоскость. Тогда*

- 1) $H^i(\Lambda(b), \Lambda(a)) \simeq H_{N-i-\dim L_I-1}(\Upsilon(I), \partial\Upsilon(I))$;
- 2) *точная гомологическая последовательность пары $(\Lambda(b), \Lambda(a))$ расщепляется, т.е. $\tilde{H}^*(\Lambda(b)) \simeq H^*(\Lambda(b), \Lambda(a)) \oplus \tilde{H}^*(\Lambda(a))$; здесь $\tilde{H}^*$ обозначает группу когомологий, приведенную по модулю точки.*

СЛЕДСТВИЕ 2 (см. [40]). *Для произвольного аффинного набора плоскостей $\mathcal{L}$ в $\mathbb{R}^N$*

$$\tilde{H}^i(\mathbb{R}^N \setminus L) \simeq \bigoplus_I H_{N-i-\dim L_I-1}(\Upsilon(I), \partial\Upsilon(I)), \quad (8)$$

суммирование – по всем непустым плоскостям L_I набора.

В § 8 мы объясним эту формулу и докажем ее гомотопический вариант.

Рис. 2. Симплициальные разрешения наборов прямых

ПРИМЕР. Допустим, что мы имеем набор комплексных гиперплоскостей с нормальными пересечениями в $\mathbb{C}^N$. Тогда группа $H^r(\mathbb{C}^N \setminus L)$ изоморфна $\mathbb{Z}^{\lambda(r)}$, где $\lambda(r)$ – число наборов индексов $I = \{i_1, \dots, i_r\}$ мощности r таких, что $L_I \neq \emptyset$. Действительно, для любого такого множества I соответствующий порядковый подкомплекс $\Upsilon(I)$ совпадает с первым барицентрическим подразбиением $(r-1)$ -мерного симплекса, линк его совпадает с границей этого симплекса, группа $H_*(\Upsilon(I), \partial\Upsilon(I))$ имеет единственный нетривиальный член $\mathbb{Z}$ в размерности $r-1$, и $\dim_{\mathbb{R}} L_I = 2N-2r$. В частности, для

Рис. 3. Порядковые комплексы для наборов прямых

Рис. 4. Частично упорядоченное множество и порядковый комплекс для диагонального набора $A(4, 2)$

типичного набора из m гиперплоскостей в $\mathbb{C}^N$ мы имеем $H^r(\mathbb{C}^N \setminus L) \sim \mathbb{Z}^{\binom{m}{r}}$ для любого $r = 0, 1, \dots, N$. В последнем случае верно более сильное утверждение: пространство $\mathbb{C}^N \setminus L$ гомотопически эквивалентно N -мерному остову стандартного клеточного разложения m -мерного тора. Действительно, рассмотрим *универсальный* набор из m гиперплоскостей $\dagger^m$, т.е. координатный крест в $\mathbb{C}^m$. Существует аффинное вложение $\varphi: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^m$ такое, что плоскости нашего типичного набора в $\mathbb{C}^N$ являются прообразами пересечений $\varphi(\mathbb{C}^N)$ с координатными плоскостями в $\mathbb{C}^m$. Группу когомологий пространства $\mathbb{C}^m \setminus \dagger^m \sim T^m$ можно вычислять, как выше, с помощью произвольной типичной вещественной квадратичной функции $f: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Она имеет ровно $2^m - 1$ критических значений, соответствующих всевозможным плоскостям $\dagger_I^m$, а перестройки, соответствующие переходам через эти критические значения, гомотопически эквивалентны добавлению клеток *стандартного* клеточного разложения тора. Но мы можем выбрать нашу функцию f так, чтобы ее нулевая точка лежала на вложенной плоскости $\varphi(\mathbb{C}^N) \subset \mathbb{C}^m$, и чтобы она росла очень медленно вдоль $\varphi(\mathbb{C}^N)$ и очень быстро в направлениях, трансверсальных к ней. “Шары” $\{x : f(x) \leq t\}$ будут выглядеть как блины, размазанные вдоль $\varphi(\mathbb{C}^N)$. Для некоторого t такой шар будет пересекать все плоскости L_I с $|I| \leq N$, но не пересекать плоскостей меньшей размерности. Соответствующее многообразие $\Lambda(t)$ гомотопически эквивалентно $\mathbb{C}^N \setminus L$, с другой стороны, оно гомотопически эквивалентно N -мерному остову тора $T^m \sim \mathbb{C}^m \setminus \dagger^m$.

Изоморфизм (8), как он возникает из его доказательства в [40], неканоничен: его реализация зависит от некоторого произвола. Однако он позволяет определить важную возрастающую фильтрацию в группе $H^*(\mathbb{R}^N \setminus L)$: для произвольной реализации этого изоморфизма член F_i этой фильтрации соответствует сумме членов $H_*(Y(I), \partial Y(I))$ по всем плоскостям L_I коразмерностей $\leq i$. Это определение уже не зависит от произвола, см. §§ 8, 10.

§ 7. Симплициальные разрешения и формула включений-исключений. Спектральная последовательность Майера–Вьеториса и ее модификации

Симплициальные разрешения являются далеким обобщением комбинаторной формулы включений-исключений. Они позволяют эффективно изучать топологию пространств, представленных как объединения нескольких подпространств, пересечения которых (в том числе кратные) устроены гораздо проще, чем их симметрические разности.

Вначале продемонстрируем этот метод в простейшей дискретной ситуации. Допустим, что конечное множество S представлено как объединение конечного набора конечных подмножеств S_i , $i = 1, \dots, m$, и нам требуется найти мощность S . Для этого построим симплициальное разрешение S . Вначале мы возьмем все множества S_i по отдельности. Если два множества S_i, S_j имеют общую точку, то проведем отрезок, соединяющий соответствующие точки в разделенных экземплярах S_i и S_j . Если некоторая точка принадлежит тройному пересечению $S_i \cap S_j \cap S_k$, то мы получаем три разделенные точки, соединенные тремя отрезками. На следующем шаге мы добавляем “внутреннюю часть” этого треугольника, затем строим тетраэдры над четырехкратными точками и т. д. Полученный комплекс S' гомотопически эквивалентен исходному множеству S : каждой точке из S соответствует симплекс в S' . В частности, S и S' имеют одинаковые эйлеровы характеристики. Но эйлерова характеристика конечного множества S — это его мощность, а таковая множества S' — это число его вершин (т. е. точек во всех множествах S_i , взятых по отдельности) минус число ребер (т. е. сумма мощностей всех множеств $S_i \cap S_j$ по всем парам $(i \neq j) \subset \{1, \dots, m\}$) плюс число треугольников и т. д. Результат есть не что иное, как формула включений-исключений.

Этот же метод работает в “непрерывном” случае, скажем, если множество $S = \bigcup S_i$ является CW -комплексом, а все множества S_i и все их пересечения S_I являются его клеточными подкомплексами. Именно, мы рассматриваем $(m - 1)$ -мерный симплекс Δ , вершины которого находятся во взаимно однозначном соответствии с индексами $1, \dots, m$, нумерующими наши множества S_i . Симплициальное разрешение можно построить как подмножество прямого произведения $\Delta \times S$. Для любого набора индексов I мы берем симплекс $\Delta(I)$, вершины которого соответствуют точкам множества I . Симплициальное разрешение S' определяется как объединение всех произведений $\Delta(I) \times S_I$ по всем множествам I . Очевидное проектирование $\Delta \times S \rightarrow S$ индуцирует отображение $S' \rightarrow S$. Легко видеть, что это отображение собственно и является гомотопической эквивалентностью. Часто случается, что изучать это пространство S' гораздо проще, чем исходное пространство S .

ПРИМЕР. Если имеется только два множества S_1, S_2 и $S = S_1 \cup S_2$, то мы получаем точную последовательность Майера–Вьеториса

$$\cdots \rightarrow H_i(S_1 \sqcup S_2) \rightarrow H_i(S) \rightarrow H_{i-1}(S_1 \cap S_2) \rightarrow H_{i-1}(S_1 \sqcup S_2) \rightarrow \cdots \quad (9)$$

Действительно, соответствующий симплекс Δ – это отрезок $[1, 2]$. Несвязное объединение $S_1 \sqcup S_2$ можно реализовать как подмножество $(\{1\} \times S_1) \cup (\{2\} \times S_2) \subset [1, 2] \times (S_1 \cup S_2)$, и мы можем рассмотреть точную последовательность пары $(S', (\{1\} \times S_1) \cup (\{2\} \times S_2))$.

Более общим образом, для любого количества m множеств S_i разрешенный комплекс S' также имеет стандартную фильтрацию $\varphi_1 \subset \dots \subset \varphi_m$: ее множество φ_k – это объединение по $l = 1, \dots, k$ всевозможных множеств $\Delta(I) \times S_I$ с l -элементными подмножествами $I \in \{1, \dots, m\}$. Соответствующая спектральная последовательность, вычисляющая гомологии пространства $S' \sim S$, называется *спектральной последовательностью Майера–Вьеториса* составного множества $S = \bigcup S_i$. Она бывает полезна в некоторых топологических задачах, однако при изучении наборов плоскостей она довольно бесполезна: в этом случае нужно рассматривать другую фильтрацию на пространстве разрешения, см. следующий параграф.

§ 8. Гомотопический тип объединения аффинных плоскостей и стабильный гомотопический тип его дополнения

Пусть наши пространства S_i – это аффинные плоскости в $\mathbb{R}^N$, составляющие набор $\mathcal{L}$. В нижней части рис. 2 изображены три примера наборов прямых в $\mathbb{R}^N$, в верхней части указаны их симплициальные разрешения. Над правой картинкой мы имеем два разных разрешения. Левое из них построено точно как ранее: прообраз центральной точки – это весь симплекс Δ , вершины которого соответствуют всем прямым L_i .

В общем случае обозначим через $\Delta(\mathcal{L})$ объединение всех граней $\Delta(I) \subset \Delta$ таких, что плоскость L_I непуста. Симплициальное разрешение набора плоскостей $\mathcal{L}$, построенное выше, является подмножеством в $\Delta(\mathcal{L}) \times L$. Другое, более экономное разрешение строится следующим образом. Вместо комплекса $\Delta(\mathcal{L}) \subset \Delta$ мы можем рассмотреть порядковый комплекс $\Upsilon(\mathcal{L})$ и определить симплициальное разрешение как подпространство в $\Upsilon(\mathcal{L}) \times L$: именно, как объединение всех произведений $\Upsilon(I) \times L_I$ по всем непустым плоскостям L_I нашего набора. Порядковые комплексы трех наборов с рис. 2 показаны на рис. 3.

Для двух левых наборов с рис. 2 обе конструкции дают одно и то же пространство, но для правого набора вторая конструкция дает другое пространство, см. самую правую верхнюю картинку.

Эти две конструкции гомотопически эквивалентны. Действительно, порядковый комплекс $\Upsilon(\mathcal{L})$ можно отождествить с некоторым подкомплексом первого барицентрического подразделения комплекса $\Delta(\mathcal{L})$. При этом вершина $\{L_I\}$ комплекса $\Upsilon(\mathcal{L})$ переходит в центр симплекса из $\Delta(\mathcal{L})$, натянутого на все вершины $\{L_i\}$ такие, что $L_i \supset L_I$. Это отождествление определяет вложение второй конструкции в первую. Обратно, для любого набора индексов I с непустым L_I мы можем отобразить центр симплекса $\Delta(I)$ в вершину $\{L_I\} \in \Upsilon(\mathcal{L}) \subset \Delta(\mathcal{L})$; продолжая это отображение по линейности, мы получим отображение, гомотопически обратное к нашему вложению. Мы будем называть эти две конструкции симплициальных разрешений, использующие комплексы $\Delta(\mathcal{L})$ и $\Upsilon(\mathcal{L})$, соответственно *наивным* и *экономным* симплициальными разрешениями.

Почти все последующие рассуждения в этом параграфе годятся одинаково для обеих конструкций. В частности, верно следующее утверждение (см. предложение 5). Допустим, что $L_I \neq \emptyset$. Назовем грань $\Delta(J)$ симплекса $\Delta(I)$ *маргинальной*, если соответствующая плоскость L_J строго больше, чем L_I . Обозначим через $\partial\Delta(I)$ подкомплекс в $\Delta(I)$, состоящий из всех маргинальных граней.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.

1. Имеется гомотопическая эквивалентность $\Delta(\mathcal{L}) \sim \Upsilon(\mathcal{L})$.
2. Для любой непустой плоскости L_I пары $(\Delta(I), \partial\Delta(I))$ и $(\Upsilon(I), \partial\Upsilon(I))$ гомотопически эквивалентны.

В частности, формулу Горески–Макферсона (8) можно переписать в следующем виде:

$$\tilde{H}^i(\mathbb{R}^N \setminus L) \simeq \bigoplus_I H_{N-i-\dim L_I-1}(\Delta(I), \partial\Delta(I)). \quad (10)$$

Обозначим через L' пространство разрешения нашего набора плоскостей с носителем L , а его одноточечную компактификацию через $\overline{L}'$. Следующий хорошо известный факт, базисный для всей теории симплициальных разрешений, легко вытекает из леммы Борсука, см., например, [84] (к сожалению, я не знаю самой ранней ссылки).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Очевидная проекция $\pi: L' \rightarrow L$ является собственным отображением и гомотопической эквивалентностью. Ее продолжение до отображения одноточечных компактификаций, $\overline{\pi}: \overline{L}' \rightarrow \overline{L}$, также является гомотопической эквивалентностью.

ТЕОРЕМА 6. Для любого конечного набора аффинных плоскостей с носителем L имеются гомотопические эквивалентности

$$L' \sim L \sim \Upsilon(\mathcal{L}) \sim \Delta(\mathcal{L}), \quad (11)$$

$$\overline{L}' \sim \overline{L} \sim \bigvee_I^{\Sigma^{\dim L_I}} (\Upsilon(I)/\partial\Upsilon(I)) \sim \bigvee_I^{\Sigma^{\dim L_I}} (\Delta(I)/\partial\Delta(I)), \quad (12)$$

где Σ^k означает k -кратную надстройку; букеты в (12) берутся по всем непустым плоскостям L_I нашего набора.

Средняя эквивалентность в (11) была найдена в [40], см. также [19].

Средняя эквивалентность $\overline{L} \sim \bigvee_I^{\Sigma^{\dim L_I}} (\Upsilon(I)/\partial\Upsilon(I))$ в (12) была доказана в [96]; одновременно была доказана сквозная эквивалентность $\overline{L}' \sim \bigvee_I^{\Sigma^{\dim L_I}} (\Delta(I)/\partial\Delta(I))$ этого же равенства, см. [76]. В силу предложений 5 и 6 эти два соотношения, участвующие в формуле (12), эквивалентны друг другу и всей этой формуле.

Другие утверждения этого типа см. в [58], [45].

СЛЕДСТВИЕ 3. Формула Горески–Макферсона (8), (10).

Действительно, эта формула следует из (12) и двойственности Александра

$$\tilde{H}^i(\mathbb{R}^N \setminus L) \simeq \overline{H}_{N-i-1}(L), \quad (13)$$

где $\overline{H}_*$ – это группа гомологий Бореля–Мура, т.е. группа гомологий одноточечной компактификации, приведенная по модулю добавленной точки; ср. [5]. (Эквивалентное определение: группа гомологий Бореля–Мура – это группа гомологий комплекса локально конечных сингулярных цепей в X .)

Пространство разрешения L' обладает очень полезной фильтрацией: ее член $F_i(L)$ определяется как объединение всех произведений $\Delta(I) \times L_I$ (соответственно, $\Upsilon(I) \times L_I$) по всем непустым плоскостям L_I коразмерности $\leq i$. В частности, $L' = F_N(L)$. Эта фильтрация продолжается до фильтрации на $\overline{L}'$: член $\overline{F}_0$ последней – это добавленная точка, а $\overline{F}_i, i \geq 1$, – это замыкание F_i . Соответствующая фильтрация в гомологиях $\overline{L}' \sim \overline{L}$ двойственна по Александру фильтрации, упоминавшейся в конце § 6.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Стабильный гомотопический тип дополнения к произвольному набору аффинных плоскостей $\mathcal{L}$ определяется размерностями всех его плоскостей L_I , в частности, то же верно для всех экстраординарных групп гомологий и когомологий.*

Это следствие основано на следующем понятии.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Два топологических пространства, имеющих гомотопические типы CW -комплексов, взаимно двойственны по Спеньеру–Уайтхеду, если они гомотопически эквивалентны двум дополнительным подмножествам X и $Y \equiv S^N \setminus X$ некоторой сферы S^N .

Группы гомологий и когомологий таких пространств связаны двойственностью Александера.

Например, наши пространства $\bar{L}$ и $\mathbb{R}^N \setminus L$ двойственны по Спеньеру–Уайтхеду.

Важный факт (см., например, [89]) состоит в том, что двойственность Спеньера–Уайтхеда определяет инволюцию на множестве стабильных гомотопических типов: все пространства, двойственные по Спеньеру–Уайтхеду стабильно гомотопически эквивалентным между собой пространствам, стабильно гомотопически эквивалентны между собой. Это сводит следствие 4 к теореме 6.

Использование симплициальных разрешений делает доказательство теоремы 6 особенно наглядным.

Действительно, рассмотрим проекцию $L' \rightarrow \Upsilon(\mathcal{L})$, индуцированную стандартной проекцией пространства $\Upsilon(\mathcal{L}) \times L \supset L'$. Все слои этого отображения являются плоскостями L_I для подходящих множеств I . Гомотопическая эквивалентность $L' \sim \Upsilon(\mathcal{L})$ доказывается индукцией по последовательному стягиванию этих слоев над стратами $\Upsilon(\mathcal{L})$, ср. с леммой 1 в § III.3.4 [84]; на каждом шаге гомотопическая эквивалентность следует из леммы Борсука.

Чтобы доказать (12), используем разновидность индукции из § 6. Для любого $t > 0$ обозначим через $\bar{L}(t)$ факторпространство $L/(L \cap \{x : f(x) \geq t\})$. Тогда для достаточно малых t имеем $\bar{L}(t) = \{\text{точка}\}$; для достаточно больших t $\bar{L}(t)$ гомотопически эквивалентно $\bar{L}$. Если отрезок $[a, b]$ не содержит критических значений, то $\bar{L}(a)$ гомотопически эквивалентно $\bar{L}(b)$, поэтому нам остается лишь доказать следующую лемму.

ЛЕММА 1. *Если отрезок $[a, b]$ содержит лишь одно критическое значение функции f , а именно, критическое значение ее ограничения на плоскость L_I , то имеется гомотопическая эквивалентность*

$$\bar{L}(b) \sim \bar{L}(a) \vee \Sigma^{\dim L_I}(\Upsilon(I)/\partial\Upsilon(I)). \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим также пространства $\bar{L}'(t) = L'/(L' \cap \pi^{-1}(\{x : f(x) \geq t\}))$. Проекция π индуцирует гомотопические эквивалентности $\bar{L}'(t) \sim \bar{L}(t)$, и нам достаточно доказать вариант леммы 1, в котором $\bar{L}(b)$ и $\bar{L}(a)$ заменены соответственно на $\bar{L}'(b)$ и $\bar{L}'(a)$. В этом доказательстве используем топологическую операцию приклеивания топологических пространств по отображениям. Именно, если даны два топологических пространства X, Y , подпространство $A \subset X$ и непрерывное отображение $\varphi: A \rightarrow Y$, то пространство $Y \cup_{\varphi} X$ определяется как факторпространство несвязного объединения $X \sqcup Y$ по отношению $a \sim \varphi(a)$ для всех $a \in A$. В частности, если $Z = X \cup Y$, то Z можно рассматривать как X , приклеенное к Y

по тождественному вложению $X \cap Y \rightarrow Y$. Важное свойство этой операции состоит в ее *гомотопической инвариантности*: любая гомотопическая эквивалентность $f: Y \rightarrow Y'$ индуцирует гомотопическую эквивалентность

$$Y \cup_{\varphi} X \sim Y' \cup_{f \circ \varphi} X. \quad (15)$$

Для любой плоскости L_J нашего набора определим L'_J как ее *собственный прообраз*, т.е. множество $\Upsilon(J) \times L_J \subset \Upsilon(\mathcal{L}) \times L$. Пусть $L!a \subset L'$ – это объединение собственных прообразов всех плоскостей L_J таких, что $L_J \cap \{x : f(x) < a\} \neq \emptyset$. В частности, $L!b = L'_I \cup L!a$.

Для любого подмножества $X \subset L'$, обозначим через X/t его приведение по модулю множества таких точек x , что $f \circ \pi(x) \geq t$. Тогда

$$\overline{L}'(b) = (L!b)_{/b} = (L'_I)_{/b} \cup (L!a)_{/b} \equiv (L'_I)_{/b} \cup_{\text{id}} (L!a)_{/b}, \quad (16)$$

где id – это тождественное вложение $(L'_I)_{/b} \cap (L!a)_{/b} \rightarrow \cup (L!a)_{/b}$.

ЛЕММА 2. *Имеется гомотопическая эквивалентность $(L!a)_{/b} \rightarrow (L!a)_{/a} \equiv \overline{L}'(a)$, индуцированная приведением по модулю слоя $\{x : f \circ \pi(x) \in [a, b]\}$.*

Эта гомотопическая эквивалентность отображает все множество $(L'_I)_{/b} \cap (L!a)_{/b}$ в одну точку (полученную при факторизации из этого слоя). Следовательно, в силу (15) пространство (16) гомотопически эквивалентно букету $\overline{L}'(a)$ и факторпространства $(L'_I)_{/b} / ((L'_I)_{/b} \cap (L!a)_{/b})$.

Но последнее пространство $(L'_I)_{/b} / ((L'_I)_{/b} \cap (L!a)_{/b})$ гомотопически эквивалентно $(\Upsilon(I) \times L_I) / ((\Upsilon(I) \times (L_I))_{/b} \cup (\partial \Upsilon(I) \times L_I)) \sim \Sigma^{\dim L_I} (\Upsilon(I) / \partial \Upsilon(I))$ (ср. [76]); лемма 1 и теорема 6 доказаны.

§ 9. Примеры: разрешения важных наборов плоскостей. Комплексы связных графов и гиперграфов

Рассмотрим вновь диагональный набор плоскостей $A(N, 2)$ в $\mathbb{C}^N$ или $\mathbb{R}^N$, см. § 2, и его наивное симплициальное разрешение $L' \subset \Delta(\mathcal{L}) \times L$. Наименьшая плоскость L_I этого набора – это прямая $\{x_1 = \dots = x_N\}$. Прообраз любой ее точки – это весь симплекс $\Delta \equiv \Delta(\mathcal{L})$, $\binom{N}{2}$ вершин которого соответствуют всем возможным гиперплоскостям $V_{ij} \equiv \{x_i = x_j\}$.

Нарисуем где-нибудь N точек, помеченных номерами $1, \dots, N$. Удобно изображать любую гиперплоскость V_{ij} отрезком, соединяющим точки i и j . Любая грань симплекса Δ определяет граф, состоящий из отрезков, соответствующих всем вершинам этого симплекса. Легко видеть, что подкомплекс маргинальных граней $\partial \Delta(\mathcal{L})$ симплекса $\Delta(\mathcal{L})$ состоит из всех граней, соответствующих несвязным графам. Поэтому гомологии диагонального набора связаны с группой гомологий *комплекса связных графов*, определяемого как факторкомплекс стандартной (ациклической) триангуляции симплекса Δ по подкомплексу, натянутому на все грани, соответствующие несвязным графам.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7 (см. [76]). *Комплекс связных графов с N вершинами ацикличесок во всех размерностях кроме $N - 2$. Его группа $(N - 2)$ -мерных гомологий изоморфна $\mathbb{Z}^{(N-1)!}$ и свободно порождена классами всех змеевидных (т.е. гомеоморфных отрезку) деревьев, один из концов которых фиксирован.*

Первое утверждение этого предложения является частным случаем теоремы Фолкмана о гомологиях геометрических решеток [32].

ЗАМЕЧАНИЕ. Число $(N-1)!$ уже возникало в этой работе. Действительно, в силу предложения 2 группа $H^{N-1}(M(N, 2))$ $(N-1)!$ -мерна. В формуле Горески–Макферсона эта группа соответствует слагаемому $H_{N-1}(\Upsilon(I), \partial\Upsilon(I)) \equiv H_{N-1}(\Delta(I), \partial\Delta(I))$, где I – все множество $\{1, \dots, N\}$.

Красивое описание группы когомологий этого же комплекса дано в [69].

Естественное обобщение этого комплекса дают *комплексы i -связных графов*, см. [78], [9], [70], [71]. Они также имеют важные приложения в дифференциальной и гомотопической топологии.

Аналогично, если мы рассмотрим набор k -совпадений $A(N, k)$ в $\mathbb{R}^N$ или в $\mathbb{C}^N$ (см. §2), то наименьшей плоскостью L_I вновь будет прямая $\{x_1 = \dots = x_N\}$. Соответствующий симплекс Δ имеет $\binom{N}{k}$ вершин, его грани соответствуют k -гиперграфам с N вершинами $1, \dots, N$, а маргинальный подкомплекс $\partial\Delta \subset \Delta$ – это комплекс *несвязных гиперграфов*. Группа гомологий этого комплекса (и дополнения $M(N, k)$ к этому набору) изучалась А. Бьёрнером и Ф. Велкером [17], см. также [16], [19].

В частности, они доказали следующее.

ТЕОРЕМА 7 (см. [17]). *Для любого $k \geq 2$ симплекс с $\binom{N}{k}$ вершинами, приведенный по модулю объединения граней, соответствующих несвязным k -гиперграфам, гомотопически эквивалентен букету сфер, в частности, все его группы гомологий не имеют кручения. Более того, эти группы могут быть нетривиальными только в размерностях вида $N - (k-2)t - 2$, $1 \leq t \leq N/k$. Ранги этих групп кратны $\binom{N-1}{k-1}$, а в старшей возможной размерности $d = N - k$ ранг H_{N-k} равен $\binom{N-1}{k-1}$.*

Общая формула для этих рангов также была найдена в [17] (см. там теорему 4.5), но она намного сложнее.

ЗАМЕЧАНИЕ (см. [19]). Топология вещественного множества $M(N, k) \subset \mathbb{R}^N$ дает хорошие оценки в следующей олимпиадной задаче. Пусть у нас есть N монет, некоторые из которых фальшивы, и чашечные весы. Естественно предположить, что все подлинные монеты весят одинаково, а веса всех фальшивых отличны друг от друга и от веса подлинных монет. Для данного $k \geq 2$ сколько взвешиваний достаточно сделать, чтобы убедиться, что хотя бы k из наших монет – настоящие?

Действительно, каждое взвешивание разделяет пространство $\mathbb{R}^N$ всех возможных наборов весов на три выпуклых множества: два полупространства и разделяющую их гиперплоскость. Любая последовательность взвешиваний вместе с их результатами выделяет некоторую клетку (быть может, пустую) в $\mathbb{R}^N$. Правильная стратегия решения нашей задачи (такие стратегии называются деревьями принятия решения – *decision trees*) должна разбить наше пространство $\mathbb{R}^N$ на такие клетки, каждая из которых принадлежит либо набору $A(N, k)$, либо его дополнению $M(N, k)$. Следовательно, число образующих полной группы гомологий любого из этих пространств дает нижнюю оценку числа клеток, а следовательно, и сложности решающего дерева.

Среди истоков теории наборов плоскостей есть еще один класс олимпиадных задач – задачи о разрезании пирога, см. [93].

§ 10. Комбинаторная реализация классов когомологий дополнений к наборам плоскостей

Формула Горески–Макферсона (8) имеет следующую явную реализацию (найденную по существу в [96], приводимую здесь интерпретацию см. в [55]). Допустим, что в $\mathbb{R}^N$ задана евклидова метрика.

Рассмотрим постоянное векторное поле V (“силу”) в $\mathbb{R}^N$. Для любого r -мерного симплекса порядкового подкомплекса $\Upsilon(I)/\partial\Upsilon(I)$ (т.е. для строго убывающей последовательности из $r + 1$ плоскостей $L_{I_1} \supset L_{I_2} \supset \dots \supset L_{I_r} \supset L_I$) и любой точки $x \in L_I$ рассмотрим последовательность из $r + 1$ лучей в $\mathbb{R}^N$, вытекающих из x , а именно, траектории точки x в плоскостях $\mathbb{R}^N, L_{I_1}, \dots, L_{I_r}$ под действием этой силы. (Мы можем рассматривать V как градиентное поле линейной функции $\theta: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, тогда эти лучи будут траекториями градиентов ограничений θ на эти плоскости.)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Постоянное векторное поле V – *типичное* по отношению к набору плоскостей L , если для любого I и любого симплекса в $\Upsilon(I)/\partial\Upsilon(I)$ эти лучи линейно независимы в $\mathbb{R}^N$.

Легко видеть, что такие векторные поля образуют открытое плотное подмножество в пространстве $\mathbb{R}^N$ всех постоянных полей. Пусть наше поле V типично. Тогда для любого I и симплекса как выше выпуклая оболочка наших $r + 1$ лучей линейно гомеоморфна $(r + 1)$ -мерному октанту с вершиной в точке x . Такие октанты, соответствующие всем точкам $x \in L_I$, заматают $(r + 1 + \dim L_I)$ -мерный клин в $\mathbb{R}^N$.

Если мы имеем r -мерный цикл α комплекса $\Delta(I)/\partial\Delta(I)$, то сумма (единообразно ориентированных) соответствующих клиньев является относительным циклом в $\mathbb{R}^N \pmod{L}$, и относительный гомологический класс $\nabla\alpha \in H_{r+1+\dim L_I}(\mathbb{R}^N, L)$ последнего цикла зависит только от класса α в $H_*(\Delta(I), \partial\Delta(I))$ (с точностью до знака, зависящего от выбора ориентации плоскости L_I).

Наконец, мы берем класс в $H^*(\mathbb{R}^N \setminus L)$, двойственный по Пуанкаре–Лефшецу к $\nabla\alpha$ в многообразии $\mathbb{R}^N \setminus L$, т.е. определенный индексами пересечения с относительным циклом $\nabla\alpha$.

Эта реализация формулы (8) зависит от выбора направления V , но не очень сильно. Два элемента в $\overline{H}_*(\mathbb{R}^N, L)$, соответствующих таким образом одному и тому же классу $\alpha \in H_*(\Delta(I), \partial\Delta(I))$ при помощи разных векторных полей, могут различаться только на элементы меньшей фильтрации: точнее, на суммы аналогичных классов, приходящих из слагаемых $H_*(\Delta(J), \partial\Delta(J))$, соответствующих плоскостям L_J , *строго содержащим* L_I .

Более того, если коразмерности всех плоскостей L_I во всех бóльших плоскостях L_J не меньше двойки, то изоморфизм (8) каноничен (с точностью до выбора ориентаций всех плоскостей L_I): действительно, в этом случае пространство типичных векторных полей V линейно связно.

По аналогии с теорией узлов (ср. [63], [81]), такие реализации элементов группы $H^*(\mathbb{R}^N \setminus L)$ можно назвать их *комбинаторными представлениями*.

Эта конструкция позволяет исследовать мультипликативную структуру в кольце $H^*(\mathbb{R}^N \setminus L)$, в частности полностью описать эту структуру в присоединенном градуированном кольце.

§ 11. Умножение в когомологиях

Перепишем равенство (8) как равенство для ассоциированных градуированных групп:

$$GrH^*(\mathbb{R}^N \setminus L) \cong \bigoplus H_{k-* - 1 - \dim L_I}(\Upsilon(I), \partial\Upsilon(I)). \quad (17)$$

Этот изоморфизм каноничен (с точностью до выбора ориентаций плоскостей L_I), а умножение в присоединенном градуированном *кольце* устроено следующим образом.

Рассмотрим две плоскости $L_I, L_J \subset L$ и два цикла A, B факторкомплексов $\Upsilon(I)/\partial\Upsilon(I)$ и $\Upsilon(J)/\partial\Upsilon(J)$, $\dim A = u$, $\dim B = v$, представленных цепями (= линейными комбинациями симплексов) подкомплексов $\Upsilon(I)$, $\Upsilon(J)$ с границами в $\partial\Upsilon(I)$ и $\partial\Upsilon(J)$. *Тасовочное произведение* $A \diamond B$ этих циклов определяется следующим образом (см. [91]).

Если L_I и L_J не трансверсальны (т.е. принадлежат некоторой собственной плоскости в $\mathbb{R}^N$) или не пересекаются, то $A \diamond B = 0$. Допустим теперь, что L_I и L_J трансверсальны и $L_K = L_I \cap L_J \neq \emptyset$ (мы можем положить $K = I \cup J$). Пусть $a \subset A$ и $b \subset B$ – некоторые два симплекса с $u + 1$ и $v + 1$ вершинами соответственно, т.е. некоторые убывающие последовательности плоскостей пересечения набора L , оканчивающиеся элементами $\{L_I\}$ и $\{L_J\}$. Рассмотрим все $\binom{u+v+2}{u+1}$ возможных *тасовок* этих последовательностей, т.е. всех (немонотонных) последовательностей из $u + v + 2$ плоскостей, в которых встречаются все элементы последовательностей a и b , сохраняя порядок, который они имели в этих последовательностях a и b . Любой такой тасовке соответствует некоторая монотонная последовательность: любой элемент λ тасовки, приходящий из последовательности a (соответственно, b) заменяется на пересечение соответствующей плоскости с последней плоскостью, приходящей из последовательности b (соответственно, a) и стоящей раньше, чем λ в тасовке. Полученная монотонная последовательность по определению является $(u + v + 1)$ -мерным симплексом порядкового комплекса $\Upsilon(K)$. Тасовочное произведение наших симплексов a и b определяется как сумма всех таких симплексов, взятых со знаками, равными четностям соответствующих тасовок (т.е. числам перестановок, сводящих их к последовательной записи последовательностей a и b), и умноженных еще на один знак, который зависит только от мультииндексов I, J и K и определяется сравнением фиксированной коориентации плоскости L_K в $\mathbb{R}^N$ с упорядоченной парой коориентаций плоскостей L_I и L_J . Тасовочное произведение циклов A и B определяется по линейности. Оно является относительным циклом, определяющим некоторый элемент слагаемого в правой части (17), соответствующего плоскости L_K ; этот элемент зависит только от классов гомологий циклов A и B в слагаемых, соответствующих L_I и L_J .

ТЕОРЕМА 8 (см. [91], [92], [28], [29]). *Изоморфизм (17) сопрягает тасовочное произведение в его правой части и умножение в его левой части, полученное из обычного когомологического умножения. Если все плоскости L_I имеют коразмерности ≥ 2 во всех больших плоскостях L_I , то это же верно для изоморфизма (8) и умножения в самом кольце $H^*(\mathbb{R}^m \setminus L)$, а не только в его градуированном кольце.*

Это следует из описанной в предыдущем параграфе явной реализации классов относительных гомологий. Действительно, умножение в когомологиях ориентированного многообразия M можно реализовать следующим образом. Пусть даны два класса $\alpha, \beta \in H^*(M)$. Возьмем циклы Бореля–Мура $[\alpha], [\beta]$, двойственные к ним по Пуанкаре и пересекающиеся трансверсально. Возьмем их пересечение $[\alpha] \cap [\beta]$, снабженное

естественной ориентацией, и рассмотрим класс когомологий, двойственный по Пуанкаре к этому пересечению.

Если даны плоскости L_I, L_J и классы $\alpha \in H_*(Y(I), \partial Y(I)), \beta \in H_*(Y(J), \partial Y(J))$, то мы можем реализовать соответствующие элементы в левых частях (8) с помощью разных постоянных векторных полей V_I, V_J в $\mathbb{R}^N$, находящихся в общем положении друг к другу, если L_I и L_J пересекаются трансверсально; если же нет, то эти направления должны быть противоположны друг другу и трансверсальны гиперплоскости, разделяющей или содержащей эти плоскости.

Предложение 4 немедленно вытекает из теоремы 8.

УПРАЖНЕНИЕ. Вывести теорему 2 (Орлика–Соломона) из этой теоремы.

§ 12. Комплекс Сальветти для комплексифицированного набора вещественных гиперплоскостей

Рассмотрим комплексификацию набора аффинных вещественных гиперплоскостей, т.е. набор комплексных гиперплоскостей $L_j \subset \mathbb{C}^N, j = 1, \dots, m$, выделенных теми же самыми линейными уравнениями $f_j(x) = 0, f_j(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}$. Его дополнение $\mathbb{C}^N \setminus L$ является N -мерным многообразием Штейна, в частности, гомотопически эквивалентно клеточному комплексу размерности $\leq N$. М. Сальветти [65], следуя некоторым идеям из [26], явно построил N -мерный симплициальный комплекс, вложенный в пространство $\mathbb{C}^N \setminus S$ как его деформационный ретракт. Здесь мы дадим простое описание этой конструкции в терминах двойственного комплекса.

Для каждой из наших плоскостей L_j ее дополнение $\mathbb{C}^N \setminus L_j$ разделяется на четыре клетки $+_j, -_j, \uparrow_j$ и $\downarrow_j$, заданные, соответственно, условиями $\operatorname{Re} f_j > 0, \operatorname{Re} f_j < 0, \{\operatorname{Re} f_j = 0, \operatorname{Im} f_j > 0\}$ и $\{\operatorname{Re} f_j = 0, \operatorname{Im} f_j < 0\}$. Каждой из 4^m возможных последовательностей m знаков $+, -, \uparrow$ и $\downarrow$ поставим в соответствие пересечение соответствующих клеток (например, $(+_1) \cap (\uparrow_2) \cap (-_3) \cap \dots \cap (\uparrow_m)$). Это пересечение нескольких вещественных аффинных плоскостей и открытых полупространств в $\mathbb{C}^N$ гомеоморфно клетке. По определению оно лежит в $\mathbb{C}^N \setminus L$, и любая точка множества $\mathbb{C}^N \setminus L$ принадлежит ровно одной из этих клеток.

ЛЕММА 3. *Разбиение многообразия $\mathbb{C}^N \setminus L$ на клетки, соответствующие всевозможным последовательностям знаков $+, -, \uparrow$ и $\downarrow$, дополненное одной 0-мерной клеткой, определяет клеточную структуру на одноточечной компактификации этого многообразия.*

Доказательство элементарно, ср. [33].

Комплекс Сальветти (как топологическое пространство) – это просто комплекс, двойственный к этому клеточному разбиению. Как комбинаторный объект он определяется некоторым подразбиением этого двойственного комплекса.

Эта конструкция была использована в [36] для построения топологических инвариантов абстрактных *ориентированных матроидов* (см. § 14 и [13]). См. также [18].

Описанное выше клеточное разбиение многообразия $\mathbb{C}^N \setminus L$ можно сильно упростить, если наш набор гиперплоскостей имеет только нормальные пересечения. В этом случае каждой плоскости L_I , выделенной несколькими уравнениями $f_i = 0, i \in I, f_i(\mathbb{R}^N) \subset \mathbb{R}$, сопоставим *мнимый конус* в $\mathbb{C}^N$, выделенный условиями $\{\operatorname{Re} f_i = 0, \operatorname{Im} f_i > 0\}, i \in I$. Обозначим через ∇_I этот конус, из которого выброшены его пересечения с L и со всеми меньшими конусами $\nabla_J, J \supsetneq I$.

ЛЕММА 4 (см. [88]). Если L – комплексификация набора вещественных гиперплоскостей с нормальными пересечениями, то любое непустое множество ∇_I гомеоморфно клетке размерности $2N - \#I$, и все эти множества вместе образуют клеточное разбиение одноточечной компактификации многообразия $\mathbb{C}^N \setminus L$.

Все коэффициенты инцидентности соответствующего клеточного комплекса тривиальны, следовательно, группа гомологий Бореля–Мура $\overline{H}_*(\mathbb{C}^N \setminus L)$ свободная абелева, причем ранг группы $\overline{H}_{2N-p}$ равен числу непустых плоскостей L_I с $\#I = p$. Конечно, последнее утверждение вытекает также из формулы Горески–Макферсона, но конусы ∇_I дают особенно простую ее реализацию.

О комбинаторных и топологических свойствах наборов гиперплоскостей см. также [14]–[18], [34]–[39], [43], [57]–[60], [72], [73], [87], [88], [93]–[96].

§ 13. Гомологии дополнений к наборам плоскостей с подкрученными коэффициентами. Резонансы

Ситуация немного усложняется, если мы рассматриваем группы гомологий с коэффициентами в локальных системах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Линейная локальная система* на (локально односвязном) топологическом пространстве X (например, на $X = \mathbb{C}^N \setminus L$) – это векторное расслоение $\pi: M \rightarrow X$ со слоем $\mathbb{C}^1$, снабженное плоской связностью, уважающей структуру $\mathbb{C}$ -модуля в слоях.

Иными словами, для любой точки $x \in X$, любой достаточно малой окрестности U точки x в X и любой точки $a \in \pi^{-1}(x)$ мы имеем выделенное сечение нашего расслоения над всем U , равное a в x ; это сечение будет тем же самым, если мы начнем с любой другой точки $x' \in U$ и точки пересечения a' старого сечения со слоем $\pi^{-1}(x')$. Для любых двух точек a_1, a_2 слоя $\pi^{-1}(x)$ выделенное сечение, равное $a_1 + a_2$ в точке x , состоит из послойных сумм образов сечений, равных a_1 и a_2 в точке x , а для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ сечение, равное λa в точке x , состоит из умноженных на λ образов сечения, равного a в x .

i -мерный *сингулярный симплекс* локальной системы Θ – это непрерывное отображение стандартного симплекса Δ^i в тотальное пространство M расслоения, уважающее плоскую связность: если точка ξ симплекса переходит в некоторую точку $a \in \pi^{-1}(x)$, $x \in X$, то некоторая малая окрестность ξ переходит в образ соответствующего сечения над малой окрестностью точки x . Группа i -мерных сингулярных цепей с коэффициентами в локальной системе Θ определяется как факторгруппа абелевой группы, порожденной всеми такими локально горизонтальными отображениями $\Delta^i \rightarrow M$, по следующим соотношениям:

а) если имеются два сингулярных симплекса $\varphi_1, \varphi_2: \Delta^i \rightarrow M$ с одной и той же проекцией (т.е. $\pi \circ \varphi_1 \equiv \pi \circ \varphi_2$), то их сумма $\varphi_1 + \varphi_2$ равна третьему сингулярному симплексу φ_3 такому, что $\varphi_3(\xi) = \varphi_1(\xi) + \varphi_2(\xi)$ для любого $\xi \in \Delta^i$;

б) для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ сингулярный симплекс φ , взятый с коэффициентом λ , равен сингулярному симплексу, отображающему любую точку ξ в $\lambda\varphi(\xi)$.

Граница такого симплекса определяется очевидным образом и является суммой сингулярных симплексов (меньшей размерности) этой же локальной системы. Мы можем рассматривать комплекс конечных цепей (т.е. конечных линейных комбинаций сингулярных симплексов) или локально конечных цепей (т.е., вообще говоря, бесконечных линейных комбинаций, проекции которых в X образуют там локально конеч-

ные цепи). Соответствующие группы гомологий будут обозначаться, соответственно, через $H_i(X, \Theta)$ и $H_i^{\text{lf}}(X, \Theta)$; они называются группами гомологий X с коэффициентами в локальной системе Θ или просто гомологиями локальной системы Θ .

Эти группы связаны каноническим гомоморфизмом

$$H_i(X, \Theta) \rightarrow H_i^{\text{lf}}(X, \Theta). \quad (18)$$

В частности, если наше расслоение M – это прямое произведение $X \times \mathbb{C}^1$ с очевидным плоским сечением, то мы получаем, соответственно, обычную группу гомологий $H_i(X, \mathbb{C})$ и группу гомологий Бореля–Мура $\overline{H}_i(X, \mathbb{C})$. Группы когомологий $H^i(X, \Theta)$, $H_{\text{lf}}^i(X, \Theta)$ определяются стандартным образом как группы гомологий сопряженных комплексов.

Любая линейная локальная система очевидным образом определяет гомоморфизм монодромии фундаментальной группы $\pi_1(X)$ (или, эквивалентно, группы $H_1(X)$) в группу $\text{Aut}(\mathbb{C}^1) \equiv \mathbb{C}^*$: продолжая наши сечения над замкнутой петлей в X , мы действуем в слоях умножением на коэффициент монодромии, соответствующий этой петле.

Любой локальной системе Θ соответствует ее двойственная система Θ^* , слои которой отождествлены с пространствами $\mathbb{C}$ -линейных функций на слоях исходной системы, и это отождествление согласовано с плоскими сечениями в обеих. Коэффициенты монодромии, заданные одним и тем же элементом группы $\pi_1(X)$ во взаимно двойственных системах, обратны друг другу (т.е. их произведение равно 1). Если пространство X является d -мерным ориентированным многообразием, то его группы гомологий и когомологий с коэффициентами в двойственных локальных системах связаны изоморфизмами Пуанкаре

$$H_i^{\text{lf}}(X, \Theta) \simeq H^{d-i}(X, \Theta^*), \quad H_{\text{lf}}^i(X, \Theta) \simeq H_{d-i}(X, \Theta^*). \quad (19)$$

(Более того, замечательная локальная система Or , называемая *ориентирующим пучком*, позволяет задать изоморфизмы Пуанкаре на неориентированных многообразиях: это верно, даже если Θ и Θ^* – постоянные локальные системы. А именно, в любом из двух уравнений (19) правую часть надо заменить на аналогичное выражение, в котором коэффициентная локальная система – не Θ^* , а $\Theta^* \otimes \text{Or}$: ее коэффициенты монодромии совпадают с такими же коэффициентами для Θ^* с точностью до знака, равного + или – в зависимости от того, сохраняет ли соответствующая петля ориентацию многообразия X или нет.)

Локальные системы и их группы гомологий являются адекватным инструментом при анализе ветвящихся дифференциальных форм и их интегралов, см. [25]. Пусть у нас есть замкнутая аналитическая i -форма на X такая, что аналитическое продолжение вдоль любого замкнутого пути c в X умножает ее на комплексное число, причем это число $\tau(c)$ зависит только от класса нашего пути c в группе $H_1(X)$. (Важный класс таких форм будет рассмотрен в §15.) Тогда контуры интегрирования этих дифференциальных форм являются корректно определенными элементами группы i -мерных гомологий X с коэффициентами в некоторой локальной системе, коэффициент монодромии которой на любом пути c равен $1/\tau(c)$.

Теперь пусть имеется набор гиперплоскостей $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_m\}$ в $\mathbb{C}^N$, $m \geq N$, $X = \mathbb{C}^N \setminus L$ и линейная локальная система Θ на X ; обозначим через $\tau_1, \dots, \tau_m$ коэффициенты монодромии этой системы, соответствующие маленьким окружностям, обходящим вокруг этих гиперплоскостей в положительном направлении.

ТЕОРЕМА 9 (см. [88], [7], [86]). Пусть $\mathcal{L}$ – набор гиперплоскостей общего положения в $\mathbb{C}^N$. Тогда справедливы следующие утверждения.

А. Если хотя бы один из коэффициентов τ_i не равен 1, то группы $H_i(X, \Theta)$, $H_i^{\text{lf}}(X, \Theta)$ нетривиальны только при $i = N$, и их размерности равны $\binom{m-1}{N}$.

Б. Отображение (18) между этими группами является изоморфизмом тогда и только тогда, когда все числа τ_i ($i = 1, \dots, m$) и их произведение $\tau_0 \equiv \tau_1 \cdots \tau_m$ не равны 1.

В. Если все эти числа отличны от 1 и набор $\mathcal{L}$ является комплексификацией вещественного, то группа $H_N^{\text{lf}}(\mathbb{C}^N \setminus L, \Theta)$ свободно порождена классами всех ограниченных компонент множества $\mathbb{R}^N \setminus L$.

В последнем случае комплексифицированного типичного вещественного набора гиперплоскостей эти факты (размерности обеих групп, биективность отображения (18) и утверждение пункта В) были вначале доказаны К. Аомото [2] при гораздо более сильных ограничениях на коэффициенты τ_j .

Для нетипичных наборов плоскостей множество исключительных значений вектора $\tau \equiv (\tau_1, \dots, \tau_m)$, для которых отображение (18) не биективно, устроено более сложно, см., например, теорему 10 ниже. Начиная с [88] такие значения называются *резонансами* нашей локальной системы.

ПРИМЕР. Пусть $N = 1$, а $\mathcal{L}$ – набор из m различных точек $L_1, \dots, L_m$. Если хотя бы один из соответствующих коэффициентов τ_i отличен от 1, то группа $H_1^{\text{lf}}(\mathbb{C}^1 \setminus L, \Theta)$ порождена классами любых $m - 1$ из m параллельных лучей ∇_j , соединяющих эти точки с бесконечностью, см. рис. 5. Действительно, все эти m лучей и дополнение к их объединению являются клетками, покрывающими все множество $\mathbb{C}^1 \setminus L$. Мы можем вычислять группу $H_*^{\text{lf}}(\mathbb{C}^1 \setminus L, \Theta)$ с помощью этой клеточной структуры. Легко видеть, что при некотором естественном выборе образующих этого клеточного комплекса (т.е. пар вида {клетка, допустимое сечение локальной системы над ней}) коэффициенты инцидентности единственной 2-мерной клетки со всеми одномерными равны $\tau_1 - 1, \dots, \tau_m - 1$. Это дает группу $H_*^{\text{lf}}(\mathbb{C}^1 \setminus L, \Theta)$; структура “абсолютной” группы $H_*(\mathbb{C}^1 \setminus L, \Theta)$ получается при помощи двойственности Пуанкаре из аналогичного утверждения о группе $H_*(\mathbb{C}^1 \setminus L, \Theta^*)$.

Рис. 5. Разбиение дополнения к набору точек в $\mathbb{C}^1$

Рис. 6. Цикл “двойная петля”

Если $\tau_j = 1$, то маленькая окружность вокруг точки L_j является нетривиальным элементом группы $H_1(\mathbb{C}^1 \setminus L)$ (поскольку ее индекс пересечения с лучом ∇_j не равен

нулю). С другой стороны, она, очевидно, гомологична нулю посредством локально конечной 2-цепи, ограниченной ею, следовательно, ядро отображения (18) нетривиально. Если $\tau_1 \cdots \tau_m = 1$, то это же верно для большой окружности, охватывающей все точки L_j .

Если все числа $\tau_1, \dots, \tau_m$ и их произведение $\tau_0 \equiv \tau_1 \cdots \tau_m$ отличны от 1, то оператор, обратный к (18), задается *двойными петлями*, т.е. циклами, изображенными на рис. 6а). Такой цикл в $\mathbb{C}^1 \setminus L$ обходит дважды (и в противоположных направлениях) вокруг каждой из наших двух особых точек L_i, L_j , поэтому он поднимается до цикла нашей локальной системы Θ и определяет элемент группы $H_1(\mathbb{C}^1 \setminus L)$. Поскольку $(1 - \tau_i)(1 - \tau_j) \neq 0$, то образ этого цикла в $H_1^{\text{lf}}(\mathbb{C}^1 \setminus L)$ равен классу интервала (L_i, L_j) , взятому с ненулевым коэффициентом.

Теперь докажем теорему 9 в случае произвольного N .

А. Рассмотрим вновь универсальный m -набор гиперплоскостей, т.е. координатный крест $\dagger^m \subset \mathbb{C}^m$, и локальную систему $\tilde{\Theta}$ на $\mathbb{C}^m \setminus \dagger^m$ с теми же коэффициентами монодромии τ_j . Если $\tau_j \neq 1$ для хотя бы одного j , то группа $H_*(\mathbb{C}^m \setminus \dagger^m, \tilde{\Theta})$ тривиальна во всех размерностях в силу теоремы Кюннета в $(\mathbb{C}^m \setminus \dagger^m) = (\mathbb{C}^*)^m$. Наш типичный набор $L \subset \mathbb{C}^N$ можно реализовать как прообраз $\dagger^m$ при некотором типичном аффинном вложении $\mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^m$; наша локальная система Θ совпадает с системой, индуцированной из $\tilde{\Theta}$ при этом вложении. В силу теоремы Лефшеца (см. [40]), наше вложение $\mathbb{C}^N \setminus L \rightarrow \mathbb{C}^m \setminus \dagger^m$ N -связно, в частности, индуцирует изоморфизм групп гомологий во всех размерностях, меньших N . Следовательно, группа $H_i(\mathbb{C}^N \setminus L, \Theta)$ тривиальна при $i < N$. В силу изоморфизма Пуанкаре (19), это же верно для всех групп $H_i^{\text{lf}}(\mathbb{C}^N \setminus L, \Theta)$ с $i > N$. Размерность этих групп в единственной оставшейся размерности N получается из изучения эйлеровой характеристики (которая не зависит от выбора системы Θ).

Б. Если хотя бы одно из чисел τ_j равно 1, то, так же как в одномерном примере, маленькая окружность, обходящая соответствующую плоскость L_j , задает нетривиальный элемент ядра отображения (18). Если все числа τ_j и их произведение τ_0 отличны от 1, то биективность (18) вытекает из гораздо более общего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть W – компактное N -мерное комплексное алгебраическое многообразие и $\tilde{L}$ – конечный набор гладких гиперповерхностей в нем, имеющих только нормальные пересечения. Пусть θ – линейная локальная система на $W \setminus \tilde{L}$ такая, что все коэффициенты монодромии, соответствующие маленьким окружностям, обходящим вокруг компонент $\tilde{L}$, отличны от 1. Тогда каноническое отображение $H_*(W \setminus \tilde{L}, \theta) \rightarrow H_*^{\text{lf}}(W \setminus \tilde{L}, \theta)$ является изоморфизмом во всех размерностях.

В частности, если $W \setminus \tilde{L}$ – многообразие Штейна, то обе группы могут быть нетривиальны только в размерности N . Это предложение легко вытекает из *спектральной последовательности Лерэ* для когомологий пучков, см., например, [7], [86].

Наше утверждение о биективности (18) вытекает из этого предложения, если взять $W = \mathbb{CP}^N$ и $\tilde{L}$ – объединение L и несобственной плоскости.

В. Если наш набор гиперплоскостей является комплексификацией вещественного, то обращение отображения (18) визуализируется “многомерными двойными петлями”, обобщающими рис. 6а). Их конструкция была анонсирована в [88] и описана в [86]. А именно, пусть $\Delta \subset \mathbb{R}^N$ – ограниченная связная компонента множества $\mathbb{R}^N \setminus L$. Соответствующая “двойная петля” – это N -мерное многообразие $\kappa(\Delta)$ вместе с некоторой его иммерсией $K: \kappa(\Delta) \rightarrow \mathbb{C}^N \setminus L$ такие, что

а) эта иммерсия поднимается до отображения в пространство M нашей локальной системы Θ , локально плоского относительно ее связности; в частности, она определяет (с точностью до скалярного множителя, зависящего от выбора этого поднятия) элемент группы $H_N(\mathbb{C}^N \setminus L, \Theta)$;

б) отображение (18) переводит этот элемент в гомологический класс компоненты Δ , взятый с некоторым коэффициентом, который отличен от нуля тогда и только тогда, когда все коэффициенты монодромии τ_j , соответствующие всем стенкам многогранника Δ , отличны от 1.

Этот цикл строится с помощью вложения пары $(\mathbb{C}^N, L)$ в пространство $(\mathbb{C}^p, \dagger^p)$ универсального p -набора гиперплоскостей, где p – число стенок Δ . Вначале мы строим иммерсию $\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{C}^1 \setminus \{0\}$, изображенную на рис. 6б): она совпадает с тождественным отображением на интервале $[+\varepsilon, +\infty)$, с отображением $\{x \rightarrow -x\}$ на интервале $(-\infty, -\varepsilon]$ и отображает отрезок $[-\varepsilon, +\varepsilon]$ в маленькую окружность, обходящую начало координат. Прямое произведение p экземпляров таких иммерсий определяет иммерсию $\Xi_p: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{C}^p \setminus \dagger^p$, накрывающую положительный октант в $\mathbb{R}^p \subset \mathbb{C}^p$ с кратностью 2^p .

Пусть $\psi_i, i = 1, \dots, p$, – линейные функции $\mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$, выделяющие гиперплоскости L_j , ограничивающие компоненту Δ ; их можно нормировать так, чтобы все они принимали положительные значения в Δ . Эти функции $(\psi_1, \dots, \psi_p)$ определяют вложение $\Psi: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^p$. Искомый цикл $\kappa(\Delta)$ индуцируется этим отображением из универсальной иммерсии Ξ_p . А именно, $\kappa(\Delta)$ определяется как подмножество прямого произведения $\mathbb{R}^p \times (\mathbb{C}^N \setminus L)$, состоящее из таких пар (t, x) , что $\Xi_p(t) = \Psi(x)$. Иммерсия K – это ограничение очевидной проекции $\mathbb{R}^p \times (\mathbb{C}^N \setminus L) \rightarrow \mathbb{C}^N \setminus L$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогичные “двойные петли” обращают отображение (18) также и в наиболее общей ситуации, описанной в предложении 8, но их конструкция гораздо более сложна, см. §1.10 в [86]. (Прямое построение таких циклов в некоторых интересных частных случаях было дано в [61].) В математическом анализе это обращение называется *регуляризацией несобственных интегралов*, см. также §15 ниже.

Рассмотрим линейную функцию $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ общего положения, значения которой на всех нульмерных плоскостях L_J различны, и поставим в соответствие каждой ограниченной компоненте Δ ее вершину $L(\Delta)$, в которой достигается верхняя грань функции $f|_\Delta$. Пусть $\nabla(\Delta)$ – N -мерный мнимый конус ∇_J в $\mathbb{C}^N \setminus L$ с вершиной в $L(\Delta)$, см. последний абзац §12. Легко показать, что число ограниченных связных компонент Δ равно $\dim H_*(\mathbb{C}^N \setminus L, \Theta)$ (доказательство более общего утверждения см. после теоремы 10 ниже). Утверждение В теоремы 9 является следствием следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9 (см. [88]). *Если все коэффициенты монодромии τ_j , $j = 1, \dots, t$, отличны от 1, то*

а) *группа $H_N(\mathbb{C}^N \setminus L, \Theta)$ свободно порождена классами “двойных петель” $\kappa(\Delta)$, соответствующих всем ограниченным компонентам Δ ;*

б) *группа $H_N^{\text{lf}}(\mathbb{C}^N \setminus L, \Theta)$ свободно порождена классами мнимых конусов $\nabla(\Delta)$, соответствующих этим компонентам.*

Мы докажем одновременно утверждение а) для нашей локальной системы Θ и утверждение б) для двойственной системы Θ^* . Именно, поднимем конусы $\nabla(\Delta)$ в тотальное пространство M^* последней системы. Тогда индексы пересечения

$\langle \kappa(\Delta_1), \nabla(\Delta_2) \rangle$ корректно определены для всех пар компонент Δ_1, Δ_2 . Легко вычисляется, что матрица, состоящая из всех таких индексов пересечения, треугольна с ненулевыми значениями на диагонали; в частности, она невырождена.

Большинство утверждений теоремы 9 и предложения 9 продолжают на более общие ситуации. Однако в этих случаях множество резонансных значений $T = (\tau_1, \dots, \tau_m)$ становится более сложным.

А именно, рассмотрим множество $\hat{L} \subset \mathbb{CP}^N$, состоящее из носителя $L \subset \mathbb{C}^N$ нашего набора и из несобственной плоскости. Если это множество не является дивизором с нормальными пересечениями, построим его разрешение $(W, \tilde{L}) \rightarrow (\mathbb{CP}^N, \hat{L})$ в смысле [44]. Пространства $W \setminus \tilde{L}$, $\mathbb{CP}^N \setminus \tilde{L}$ и $\mathbb{C}^N \setminus L$ диффеоморфны, следовательно, мы можем поднять локальную систему Θ на $W \setminus \tilde{L}$. Для любой неприводимой компоненты $\tilde{L}_j$ алгебраического множества $\tilde{L}$ коэффициент монодромии, соответствующий маленькой охватывающей ее окружности, является мономом от исходных коэффициентов $\tau_1, \dots, \tau_m$. Наш набор $T = (\tau_1, \dots, \tau_m)$ называется *резонансным*, если значение какого-нибудь из этих мономов равно 1 при *любом* выборе разрешения множества $\hat{L}$. Тривиальные мономы $\tau_1, \dots, \tau_m$ и $\tau_0^{-1} \equiv (\tau_1 \cdots \tau_m)^{-1}$ всегда возникают среди этих мономов: они соответствуют собственным прообразами исходных плоскостей L_j и несобственной плоскости. Из предложения 8 немедленно следует, что если множество T нерезонансно, то отображение (18) является изоморфизмом.

ТЕОРЕМА 10 (см. [88]). *Допустим, что наш набор гиперплоскостей $L \subset \mathbb{C}^N$ является комплексификацией вещественного, имеет только нормальные пересечения в $\mathbb{C}^N$ и все числа $\tau_1, \dots, \tau_m$ отличны от 1. Тогда справедливы следующие утверждения.*

А. *Обе группы $H_i(\mathbb{C}^N \setminus L, \Theta)$, $H_i^{\text{lf}}(\mathbb{C}^N \setminus L, \Theta)$ нетривиальны только при $i = N$, и их размерности равны числу ограниченных компонент множества $\mathbb{R}^N \setminus L$.*

Б. *Группа $H_i(\mathbb{C}^N \setminus L, \Theta)$ свободно порождена классами двойных петель, соответствующих всем этим компонентам, а группа $H_i^{\text{lf}}(\mathbb{C}^N \setminus L, \Theta)$ свободно порождена классами соответствующих мнимых конусов $\nabla(\Delta)$.*

В. *Если, более того, набор чисел $T = (\tau_1, \dots, \tau_m)$ нерезонансный, то группа $H_i^{\text{lf}}(\mathbb{C}^N \setminus L, \Theta)$ свободно порождена также классами этих ограниченных компонент.*

Доказательство утверждения А вытекает из клеточного разбиения, рассмотренного в конце § 12. Действительно, соответствующий клеточный комплекс, вычисляющий группу $H_i^{\text{lf}}(\mathbb{C}^N \setminus L, \Theta)$, после некоторой нормировки его канонических образующих оказывается изоморфным порядковому комплексу нашего набора плоскостей $\mathcal{L}$ или, эквивалентно, его вещественной части $\mathcal{L} \cap \mathbb{R}^N \equiv \{L_j \cap \mathbb{R}^N\}$. В силу формулы (11), последний комплекс гомотопически эквивалентен носителю $L \cap \mathbb{R}^N$, который очевидным образом гомотопически эквивалентен букету сфер, соответствующих всем этим ограниченным компонентам. Доказательство утверждений Б и В – то же самое, что в случае типичных наборов.

ЗАМЕЧАНИЕ. В [25] был развит аналог теории де Рама, вычисляющий гомологии комплексных многообразий (например, пространств $\mathbb{C}^N \setminus L$) с коэффициентами в локальных системах, см. также [30], [2] и §8 в [90].

§ 14. Матроиды и пространства конфигураций

Простейший пример конфигурационного пространства – это пространство $M(N, 2)$ наборов из N различных точек в $\mathbb{C}^1$, см. § 2. В более сложных примерах мы можем рассматривать наборы алгебраических подмножеств в многообразиях; конфигурационное пространство – это семейство всех наборов таких, что пара (многообразие, объединение этих подмножеств) имеет фиксированный топологический тип. Такие конфигурационные пространства часто возникают в интегральной геометрии и теории специальных функций, см. [62], [34], [87], [86]. Важный класс таких функций, называемых *общими гипергеометрическими функциями*, возникает, если все наши множества являются гиперплоскостями в $\mathbb{C}^N$ или в $\mathbb{CP}^N$, см. [34], [73]. В этом случае топология конфигурационных пространств имеет особенно глубокие связи с алгебраической геометрией. Удобно формулировать эти связи в терминах теории *матроидов*.

Понятие матроида является формализацией размерностных свойств центрального набора гиперплоскостей, см. [51] и [37].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Матроид* – это конечное множество U , снабженное натуральнозначной функцией r на множестве $2^U \setminus \{\emptyset\}$ всех непустых подмножеств U такой, что

- 1) для любого такого подмножества $I \in U$ имеем $1 \leq r(I) \leq$ (мощность множества I);
- 2) если $I \subset J$, то $r(I) \leq r(J)$;
- 3) для любых I, J имеем $r(I \cap J) + r(I \cup J) \leq r(I) + r(J)$.

Любой центральный набор гиперплоскостей $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_m\}$ определяет матроид, элементы которого соответствуют плоскостям L_i , и для любого набора I этих элементов $r(I)$ – это коразмерность пересечения L_I всех плоскостей из этого набора.

В этом случае набор гиперплоскостей $\mathcal{L}$ называется *реализацией* соответствующего матроида.

Существуют матроиды, имеющие *комплексные* реализации (т.е. реализации наборами комплексных гиперплоскостей в $\mathbb{C}^N$), но не имеющие вещественных, и матроиды, имеющие реализации над конечными полями, но не имеющие комплексных, и т. д. (С другой стороны, любая реализация матроида над некоторым полем определяет также его реализацию над любым расширением этого поля: в частности, комплексификация вещественной реализации доставляет комплексную реализацию.)

Специфические свойства наборов аффинных вещественных гиперплоскостей (грубо говоря, то, что пара 0-мерных плоскостей $L_I, L_{I'}$ может лежать либо по одну сторону от любой не содержащей их гиперплоскости, либо по разные) формализованы в понятии *ориентированного матроида*, см. [13].

Следующий важный вопрос таков: пусть дан матроид, как выглядит множество всех его реализаций над данным полем F ?

Изучение реализаций центральными наборами гиперплоскостей в $\mathbb{C}^3$ (или, эквивалентно, произвольными наборами прямых в $\mathbb{CP}^2$) тесно связано с теорией целочисленных алгебраических множеств (т.е. комплексных алгебраических множеств, заданных уравнениями с целочисленными коэффициентами), см. [56], [57].

Согласно [56], [57], любому целочисленному алгебраическому подмножеству в некотором пространстве $\mathbb{C}^n$ соответствует такой матроид, что пространство его реализаций наборами плоскостей в $\mathbb{C}^3$ гомотопически эквивалентно этому подмножеству.

Эта связь позволяет построить пространства реализаций с весьма экзотическими свойствами: эти свойства отражают аналогичные свойства соответствующих алгебраических множеств.

Например, уравнение $x^2 = -1$ связано с матроидом, имеющим комплексные реализации, но не имеющим вещественных. Уравнение $x^2 + y^2 = 0$ связано с таким матроидом, что вещественная размерность пространства его вещественных реализаций меньше комплексной размерности пространства его комплексных реализаций (в частности, последнее пространство негладко, см. [87]).

Первый из этих примеров (соответствующий уравнению $x^2 = -1$) строится следующим образом.

Первые четыре элемента $L_1, \dots, L_4$ находятся *в общем положении* (т.е. $r(\{I\})$ равно 1 для любого 1-элементного множества $I \subset \{1, 2, 3, 4\}$, 2 для любого 2-элементного множества и 3 для 3- и 4-элементных множеств). В терминах возможных реализаций прямыми в $\mathbb{CP}^2$ или в $\mathbb{RP}^2$ это означает, что эти прямые пересекаются общим образом в обычном смысле: никакие три из них не пересекаются в одной точке. Если имеется реализация нашего матроида, включающего эти четыре элемента, то они фиксируют систему координат в $\mathbb{P}^2$: мы можем взять L_1 в качестве прямой “на бесконечности”, L_2 в качестве прямой $\{x = 0\}$, L_3 в качестве прямой $\{y = 0\}$ и выбрать масштаб координат так, чтобы точки $L_2 \cap L_4$ и $L_3 \cap L_4$ имели, соответственно, координаты $(0, 1)$ и $(1, 0)$.

Далее, добавим элемент L_5 с единственным условием необщего положения $r(L_3, L_4, L_5) = 2$, т.е. соответствующие три прямые любой реализации в $\mathbb{P}^2$ должны пересекаться в одной точке. Точка пересечения этой прямой L_5 с L_2 будет иметь координаты $(0, \alpha)$, где α – какое-то число. Следующая прямая L_6 должна проходить через эту точку пересечения и быть параллельной к L_4 (в терминах матроида эти условия задаются так: $r(L_2, L_5, L_6) = 2$ и $r(L_1, L_4, L_6) = 2$). Координаты точки $L_6 \cap L_3$ будут равны $(\alpha, 0)$. Следующая прямая L_7 проходит через эту точку и параллельна к L_5 , т.е. мы имеем условия $r(L_3, L_6, L_7) = 2$ и $r(L_1, L_5, L_7) = 2$. Ее точка пересечения с прямой L_2 имеет координаты $(0, \alpha^2)$. Следующая прямая L_8 проходит через последнюю точку и параллельна к L_6 и L_4 , т.е. имеем условия $r(L_2, L_7, L_8) = 2$ и $r(L_1, L_4, L_6, L_8) = 2$. Координаты точки ее пересечения с прямой L_3 равны $(\alpha^2, 0)$. Следующая прямая L_9 должна проходить через точки $(1, 0)$ и $(0, \alpha^2)$, т.е. $r(L_3, L_4, L_5, L_9) = 2$ и $r(L_2, L_7, L_8, L_9) = 2$. Прямая L_{10} должна проходить через точки $(0, 1)$ и $(\alpha^2, 0)$, т.е. $r(L_2, L_4, L_{10}) = 2$ и $r(L_3, L_8, L_{10}) = 2$.

Наконец, потребуем, чтобы прямые L_9 и L_{10} были параллельны (т.е. $r(L_1, L_9, L_{10}) = 2$): точка пересечения, покрытая “черной дырой” на рис. 7, должна лежать на бесконечности. Это возможно, только если $\alpha^4 = 1$. Но $\alpha \neq 1$ (поскольку $L_5 \neq L_4$) и $\alpha^2 \neq 1$ (поскольку $L_8 \neq L_4$). Следовательно, любая комплексная реализация этого матроида соответствует числу α такому, что $\alpha^2 = -1$.

§ 15. Приложения в интегральной геометрии: общие гипергеометрические функции

Теория *общих* (или *многомерных*) *гипергеометрических функций* была инициирована К. Аомото [1], [2] и И.М. Гельфандом [34]. Эти функции образуют широкий класс функций, обладающих интегральными представлениями: они представляют все такие функции в той же мере, в какой наборы плоскостей представляют класс всех алгебраических множеств.

Рис. 7. Минимальный набор прямых

Исходная точка этой теории – это гипергеометрический интеграл Гаусса

$$\Gamma(a; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \equiv \int_0^1 z^{\alpha_1} (z-1)^{\alpha_2} (z-a)^{\alpha_3} dz, \quad (20)$$

где α_j и a – комплексные числа, $a \notin [0, 1]$.¹

Этот интеграл абсолютно сходится при $\operatorname{Re} \alpha_1 > -1$, $\operatorname{Re} \alpha_2 > -1$. Для любого фиксированного a он является голоморфной функцией в области пространства $\mathbb{C}^3$ показателей $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, выделенной этими неравенствами. Аналитическое продолжение этой функции на пространство всех $\alpha \in \mathbb{C}^3$ является однозначной мероморфной функцией, полюса которой лежат на гиперплоскостях, на которых либо α_1 , либо α_2 является отрицательным целым числом.

С другой стороны, зафиксировав α и меняя a , мы получаем аналитическую функцию от a с ветвлением в точках 0 и 1, удовлетворяющую знаменитым гипергеометрическим уравнениям, см. [11]. Если показатели α – общего положения, то пространство решений этих уравнений в окрестности каждой точки a двумерно и линейно порождено разными ветвями аналитического продолжения этой функции.

Гораздо более общим образом, можно рассмотреть интеграл

$$\Gamma(\lambda; \alpha) = \int_{\Delta} f_1^{\alpha_1} \cdots f_k^{\alpha_k} dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n, \quad (21)$$

где f_j – некоторые полиномиальные функции $\mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$, аналитически зависящие от параметров $\lambda \in \mathbb{C}^m$, α_j – комплексные показатели, а интегрирование ведется по некоторым относительно замкнутым (т.е. локально конечным) но, вообще говоря, не компактным (т.е. не конечным) n -мерным циклам в пространстве ненулевых значений подынтегральной функции (или, точнее, в пространстве некоторого накрытия над этим пространством, в котором наша функция становится однозначной).

Вот один важный класс таких задач. Зафиксируем некоторый матроид и разрешим функциям f_j быть любыми линейными функциями $\mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$, множества нулей которых образуют всевозможные комплексные реализации этого матроида.

¹Сам Гаусс писал этот интеграл в совсем другом, но эквивалентном виде.

Интеграл (21) также задает мероморфную функцию от α (при фиксированных a), ср. [12], и ветвящуюся аналитическую функцию от λ при фиксированных α ; множество ее ветвления – это множество таких значений параметра λ , при которых соответствующие функции f_j имеют в совокупности “нетипичные” множества нулей (т.е. функция ранга r набора плоскостей “подскакивает”).

Вновь основные задачи здесь – следующие:

- 1) описать множество полюсов этих интегралов, рассматриваемых как мероморфные функции от α ;
- 2) описать ветвление этих интегралов при фиксированных α и меняющихся параметрах λ множества функций f_j ;
- 3) найти число линейно независимых функций на пространстве параметров $\mathbb{C}^m$, заданных такими интегралами.

Решение этих аналитических проблем тесно связано со следующими топологическими:

- А) вычисление групп гомологий, связанных с нашими наборами функций f_j и содержащих все возможные контуры интегрирования Δ ;
- Б) изучение отображений типа (18) для таких групп;
- В) изучение топологии (в особенности фундаментальной группы) конфигурационного пространства всех реализаций нашего матроида;
- Г) изучение *гомологического векторного расслоения* над этим конфигурационным пространством, слоем которого над набором гиперплоскостей является соответствующая группа гомологий, рассмотренная в А); в особенности изучение *представления монодромии* фундаментальной группы из В) в слоях этого расслоения.

Рассмотрим все эти задачи (и их приложения) для классического интеграла (20). В этом случае решение задачи 1) вытекает из рис. 6а): если α_1 и α_2 не целые, то наш несобственный интеграл по интервалу $(0, 1)$ можно заменить на аналогичный интеграл по “двойной петле”, взятый с коэффициентом $1/(1 - e^{2\pi i \alpha_1})(1 - e^{2\pi i \alpha_2})$, а следовательно, неособый.

Аналогично в общем случае интеграла (21), если набор показателей $\tau_j \equiv e^{2\pi i \alpha_j}$ нерезонансный в смысле § 13, то любой контур интегрирования можно *регуляризовать* при помощи “многомерной двойной петли”, см. [86].

ЗАМЕЧАНИЕ. Последнее утверждение не является формальным следствием предложения 8, т.е. обратимости отображения (18) для нерезонансных показателей. Действительно, при изучении интегралов как функций от этих показателей контуры интегрирования нельзя рассматривать как элементы группы

$$H_N^{\text{lf}}(\mathbb{C}^N \setminus L, \Theta), \quad (22)$$

поскольку определение этой группы включает факторизацию, зависящую от этих показателей. Тем не менее, геометрическая конструкция “двойных петель” работает и в этом случае и позволяет нам регуляризовать интегралы.

Напротив, если мы фиксируем показатели α_j , то мы можем рассматривать контуры интегрирования как элементы группы (22). Размерность пространства разных интегральных функций (рассматриваемых как функции только от параметров λ функций f_j) не превосходит размерность этой группы. Эта оценка может не достигаться в некоторых экзотических примерах, однако для многих важных матроидов она точна. В частности, это так для матроидов, соответствующих типичным наборам $\mathbf{i}$, более

того, всем наборам с нормальными пересечениями в $\mathbb{C}^N$, но, вообще говоря, не в $\mathbb{CP}^N$, см. [88].

Доказательство (см. [86]) основано на изучении действия монодромии в гомологическом расслоении: начиная с единственного контура интегрирования и действуя на него всеми элементами группы монодромии, мы можем получить набор циклов, порождающих всю группу (22).

Рис. 8. Монодромия гипергеометрического интеграла

ПРИМЕР. В случае интеграла (20) конфигурационное пространство – это проколота плоскость $\mathbb{C}^1 \setminus \{0, 1\}$ всех допустимых значений параметра a . Протащим это значение вдоль замкнутой петли в этом пространстве, обходящей вокруг некоторой особой точки, скажем, вокруг точки 1. Деформируя одновременно контур интегрирования $(0, 1)$ таким образом, чтобы ни в какой момент он не пересекал особых значений 0, 1 и текущего значения a , мы получим цикл, указанный на рис. 8 справа. Интеграл типа (20) вдоль этого цикла равен аналитическому продолжению исходного интеграла (20) вдоль нашей петли в пространстве параметров. Разность между этим циклом и исходным равна интервалу $(1, a)$, пройденному в двух противоположных направлениях на разных листах римановой поверхности, на которой наша форма интегрирования однозначна. Если число α_3 не целое, то интеграл вдоль этого цикла не равен тождественно нулю, и мы получаем вторую интегральную функцию, независимую от первой. Поскольку размерность группы $H_1^{\text{lf}}(\mathbb{C}^1 \setminus \{0, 1, a\}, \Theta)$ равна 2, верхняя и нижняя оценки числа линейно независимых интегральных функций совпали и задача 3) решена в этом частном случае.

Об алгебраических свойствах аналитических функций этого типа см., в частности, [27], [39].

Аналогичные (хотя и гораздо более сложные) методы позволяют доказывать сходные результаты в многомерных ситуациях, см. [88], [86]. В частности, если множества $\{x \mid f_j(x) = 0\}$ образуют наборы гиперплоскостей с нормальными пересечениями в $\mathbb{C}^N$ и набор показателей $\tau_j \equiv e^{2\pi i \alpha_j}$ нерезонансный, то гомологическая оценка точна, т.е. мы имеем максимально возможное число линейно независимых интегральных функций.

Эти и подобные им функции имеют замечательные приложения в математической физике, см. например [67], [73].

§ 16. Что, если набор плоскостей бесконечен?

Многие важные топологические пространства в $\mathbb{R}^N$ представимы в виде непрерывных семейств плоскостей. Неисчерпаемым источником таких пространств является теория дискриминантов, см. [74], [84]. Описанная выше стратегия топологического исследования объединений плоскостей (и дополнений к таким объединениям), основанная на симплицальных разрешениях, работает и в этих случаях (после подходя-

щей модификации). В частности, нам приходится рассматривать *непрерывные порядковые комплексы* и строить *конические разрешения* таких пространств. Здесь мы опишем простой пример: детерминантное множество.

Пусть $\mathbb{K}$ – поле $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ или тело кватернионов $\mathbb{H}$. *Детерминантное* множество $\text{Det}(\mathbb{K}^n) \subset \text{End}(\mathbb{K}^n) \sim \mathbb{K}^{n^2}$ состоит из всех вырожденных операторов $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$.

Мы построим разрешение этого множества, дающее вычисление их групп гомологий Бореля–Мура, а также, при посредстве двойственности Александера, и *самое сложное вычисление* групп когомологий дополнительных к ним пространств $GL(\mathbb{K}, n)$.

Тавтологическое разрешение множества $\text{Det}(\mathbb{K}^n)$ задается исключением кванторов (которое является аналогом “взятия множеств S_j по отдельности” в обосновании формулы включений–исключений). А именно, оператор A принадлежит $\text{Det}(\mathbb{K}^n)$, если существует точка $x \in \mathbb{K}\mathbb{P}^{n-1}$ такая, что $\{x\} \subset \ker A$. Определим пространство разрешения $\text{det}_1(\mathbb{K}^n)$ как пространство всех пар $(x, A) \in \mathbb{K}\mathbb{P}^{n-1} \times \text{End}(\mathbb{K}^n)$ таких, что $\{x\} \in \ker A$. Это пространство обладает (тавтологической) структурой $(n^2 - n)$ -мерного $\mathbb{K}$ -векторного расслоения над $\mathbb{K}\mathbb{P}^{n-1}$, слой $L(x)$ которого состоит из всех A таких, что $\{x\} \in \ker A$. Очевидная проекция $\pi: \text{det}_1(\mathbb{K}^n) \rightarrow \text{Det}(\mathbb{K}^n)$ регулярна над операторами с одномерными ядрами, а прообраз оператора с $\dim \ker = l$ изоморфен $\mathbb{K}\mathbb{P}^{l-1}$.

Эта ситуация аналогична тому, что мы имели выше: множество $\text{Det}(\mathbb{K}, n)$ является объединением пространств $L(x)$, подобно тому как пространство L было объединением плоскостей L_i . Сохраняя аналогию, мы построим порядковый комплекс всех пересечений этих пространств $L(x)$. Это делается не непосредственно, поскольку семейство плоскостей $L(x)$ не дискретно, и, более того, множество таких плоскостей, проходящих через одну и ту же точку множества $\text{Det}(\mathbb{K}^n)$, может быть непрерывным. Действительно, возможные пересечения нескольких плоскостей $L(x_j) \subset \text{End}(\mathbb{K}^n)$ – это просто плоскости вида $L(X)$, где X – это подпространство некоторой размерности в $\mathbb{K}^n$ (т.е. точка некоторого многообразия Грассмана $G_i(\mathbb{K}^n)$, $i \in [1, n]$), а $L(X)$ состоит из всех операторов, ядра которых содержат X .

Поэтому наше частично упорядоченное множество всех плоскостей и их пересечений – это *несвязное объединение всех грассмановых многообразий* $G_1(\mathbb{K}^n), \dots, G_{n-1}(\mathbb{K}^n), G_n(\mathbb{K}^n)$. *Непрерывный порядковый комплекс* всех этих грассманианов определяется следующим образом. Рассмотрим джойн $G_1(\mathbb{K}^n) * \dots * G_n(\mathbb{K}^n)$, т.е., грубо говоря, естественным образом топологизированное объединение симплексов, вершины которых соответствуют точкам разных грассманианов. Такой симплекс назовем *когерентным*, если плоскости, соответствующие его вершинам, образуют флаг. Искомый порядковый комплекс $\Xi(\mathbb{K}^n)$ является объединением всех когерентных симплексов, с топологией, индуцированной из топологии джойна. Он является конусом с вершиной $\{\mathbb{K}^n\} \in G_n(\mathbb{K}^n)$. Его *линк* $\partial\Xi(\mathbb{K}^n)$ – это объединение когерентных симплексов, не содержащих вершины $\{\mathbb{K}^n\}$.

Этот линк $\partial\Xi(\mathbb{K}^n)$ гомеоморфен сфере S^M , $M = \frac{1}{2}n(n-1)(\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}) + n - 2$. (Вероятно, этот факт подразумевается в замечании 1.4 работы [20], см. также [85], [84].) Поэтому $\Xi(\mathbb{K}^n)$ гомеоморфно шару.

Коническое разрешение множества $\text{Det}(\mathbb{K}^n)$ строится как подмножество прямого произведения $\Xi(\mathbb{K}^n) \times \text{Det}(\mathbb{K}^n)$. Любой плоскости $X \subset \mathbb{K}^n$ соответствует подпространство $\Xi(X) \subset \Xi(\mathbb{K}^n)$, именно, объединение всех когерентных симплексов, все вершины которых соответствуют плоскостям, лежащим в X . Оно является конусом с вершиной $\{X\}$ и гомеоморфно замкнутому шару. Определим коническое раз-

решение $\delta(\mathbb{K}^n) \subset \Xi(\mathbb{K}^n) \times \text{Det}(\mathbb{K}^n)$ как объединение произведений $\Xi(X) \times L(X)$ по всем плоскостям X размерностей $1, \dots, n$. Легко видеть, что очевидная проекция $\delta(\mathbb{K}^n) \rightarrow \text{Det}(\mathbb{K}^n)$ индуцирует гомотопическую эквивалентность одноточечных компактификаций этих пространств (действительно, это проектирование собственное и полуалгебраично, и все его слои являются стягиваемыми конусами вида $\Xi(X)$). С другой стороны, пространство $\delta(\mathbb{K}^n)$ обладает удобной фильтрацией: член F_i ее – это объединение произведений $\Xi(X) \times L(X)$ по всем плоскостям X размерностей $\leq i$. Член $F_i \setminus F_{i-1}$ этой фильтрации является тотальным пространством расслоения над $G_i(\mathbb{K}^n)$. Его слой над точкой $\{X\}$ – это пространство $(\Xi(X) \setminus \partial\Xi(X)) \times L(X)$, оно гомеоморфно евклидову пространству. Следовательно, группа гомологий Бореля–Мура этого члена сводится к аналогичной группе базы. Спектральная последовательность, порожденная этой фильтрацией и сходящаяся к группе гомологий Бореля–Мура множества $\text{Det}(\mathbb{K}^n)$ (или, эквивалентно, к группе когомологий дополненного пространства $GL(\mathbb{K}^n)$), стабилизируется в первом члене (т.е. $E_1^{p,q} \equiv E_\infty^{p,q}$) и дает, в частности, доказательство гомологического *расщепления Миллера*

$$H_m(GL(\mathbb{C}^n)) = \bigoplus_{k=0}^n H_{m-k^2}(G_k(\mathbb{C}^n)) \quad (23)$$

и аналогичных расщеплений для $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ и $\mathbb{H}$.

Имеется множество других проблем, в которых работает технология конических разрешений, см. [80], [82]. Среди них – теория узлов и типичных плоских кривых (см. следующий параграф), топологическое исследование пространств непрерывных отображений, гладких функций без сложных особенностей, операторов с простыми спектрами, неособых проективных гиперповерхностей...

§ 17. Приложения и аналогии в дифференциальной топологии

Пространство $M(N, 2)$ (см. § 2) можно рассматривать как пространство всех вложений в $\mathbb{C}^1$ конечного множества мощности N . Аналогичным образом мы можем рассмотреть пространство всех гладких вложений $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, т.е. ручных узлов в $\mathbb{R}^n$; если $n = 3$, то 0-мерные классы когомологий этого пространства – это инварианты узлов. Мы можем изучать эти и прочие классы когомологий (в случае произвольного $n \geq 3$) по существу теми же методами, что в §§ 7, 8 (забавно, что в действительности это было сделано раньше, см. [75]). Мы рассматриваем пространство $\mathcal{H}$ всех гладких отображений $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, определяем дискриминант $\Sigma \subset \mathcal{H}$ как пространство всех отображений, не являющихся гладкими вложениями, и изучаем группу $H^*(\mathcal{H} \setminus \Sigma)$. Для этого мы строим коническое разрешение дискриминантного множества Σ . Это возможно, поскольку это множество заматается разумным семейством подпространств в $\mathcal{H}$. Эти подпространства параметризуются всеми неупорядоченными парами точек $(x, y) \in S^1$. В силу очевидных причин эти пары называются *хордами*, они пробегают двумерное многообразие $\overline{B}(S^1, 2)$.

Для любой такой пары соответствующее пространство $L(x, y)$ состоит из всех отображений $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ таких, что $f(x) = f(y)$, если $x \neq y$, или $f'(x) = 0$, если $x = y$. Такие пространства образуют тавтологическое разрешение множества Σ . Затем мы берем порядковый комплекс всех возможных пересечений

$$L(x_1, y_1) \cap L(x_2, y_2) \cap \dots \quad (24)$$

Таблица 1. Аналогия между теорией наборов плоскостей и теорией узлов

Теория наборов плоскостей	Теория узлов
Пространство $\mathbb{R}^N$	Пространство $\mathcal{K} = C^\infty(S^1, \mathbb{R}^n)$
Носитель набора $L = \bigcup L_i \subset \mathbb{R}^N$	Дискриминант $\Sigma \subset \mathcal{K}$
Множество индексов $\{1, \dots, m\}$	Пространство хорд $\overline{B(S^1, 2)}$
Плоскость L_i	Подпространство $L(x, y), x, y \in S^1$
Несвязное объединение $\bigsqcup L_i$	Тавтологическое разрешение множества Σ
Симплициальное разрешение L'	Коническое разрешение σ дискриминанта Σ
Подмножества $I \subset \{1, \dots, m\}$ с $\text{codim } L_I = p$	Комбинаторные типы хордовых конфигураций J с $\text{codim } L(J) = pn$
Призма L'_I	J -блок в σ
Формула тасовочного произведения из § 11	Формулы умножения Концевича (для инвариантов) и Турчина (для старших когомологий)
Дерамовские представления из §§ 3, 4	Интеграл Концевича
Расщепление (12)	Теорема Концевича о стабилизации
Комбинаторная реализация из § 10	Комбинаторные формулы для инвариантов [63], [42] и прочих классов когомологий [81]

и предельных положений таких пересечений (все они суть подпространства в $\mathcal{K}$, коразмерности которых кратны n), снабжаем его подходящей топологией и определяем коническое разрешение точно так же, как раньше, т.е. как подмножество прямого произведения этого порядкового комплекса на пространство $\mathcal{K}$. Затем мы определяем фильтрацию на этом разрешении в соответствии с коразмерностями (деленными на n) этих плоскостей и рассматриваем возникающую спектральную последовательность.

Гомологическое изучение получающегося разрешения известно как *теория инвариантов конечного порядка для узлов*, см. [10], и различные ее обобщения, включая (столь же интересное) вычисление старших когомологий пространств узлов, см. [75], [83], [69]. В таблице 1 дан краткий список параллельных понятий и объектов в обеих теориях. Конечно, значительная часть ее правой половины не может быть здесь объяснена: эта таблица скорее представляет собой разновидность Розеттского камня для комбинаторщиков, которые захотели бы изучить теорию инвариантов узлов, см. [10].

Необходимо отметить также исключительное значение тождества Арнольда (3) для конструкции интеграла Концевича [48], [49].

Конечно, пространство $\mathcal{K}$ бесконечномерно, и формально мы не можем применять двойственность Александра в нем: обычные (т.е. конечномерные) классы когомологий пространства узлов $\mathcal{K} \setminus \Sigma$ должны соответствовать “бесконечномерным циклам” в Σ , определение которых требует дополнительных усилий. Строгое построение таких циклов, соответствующих классам когомологий конечного типа, использует технику конечномерных аппроксимаций, см. [75].

Аналогично, мы можем рассмотреть пространство гладких вложений конечного набора окружностей в $\mathbb{R}^n$, это дает теорию классов когомологий конечного типа в пространстве зацеплений.

Еще одно пространство этого типа – пространство всех плоских кривых без тройных точек, см. [3], [6], [76], [77], [52]–[55], [68], [46], [79]. Оно тесно связано с наборами плоскостей $A(N, 3)$, см. [17] и §2.

Я благодарю всех, кому я обязан познаниями в описанной области, в том числе В. И. Арнольда, А. Бьёрнера, Ф. Велкера, А. М. Вершика, И. М. Гельфанда, Р. Т. Живалевича, А. В. Зелевинского, М. М. Капранова, А. Б. Меркова, Н. Е. Мнёва, С. А. Юзвинского, Г. Л. Рыбникова, В. В. Серганову, В. Э. Турчина, Г. Циглера, Б. З. Шапиро и К. Шульц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] К. Аомото. Les équations aux différences linéaires et les intégrales des fonctions multiformes // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 1975. V. 22. P. 271–297.
- [2] К. Аомото. On the structure of integrals of power products of linear functions // Sci. Papers College Gen. Ed. Univ. Tokyo. 1977. V. 27. P. 49–61.
- [3] V. I. Arnold. Plane curves, their invariants, perestroikas and classifications // Singularities and Bifurcations / ed. V. I. Arnold. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994. P. 33–91.
- [4] В. И. Арнольд. Кольцо когомологий группы крашенных кос // Матем. заметки. 1969. Т. 5. №2. С. 227–231.
- [5] В. И. Арнольд. О некоторых топологических инвариантах алгебраических функций // Труды ММО. 1970. Т. 21. С. 27–46.
- [6] В. И. Арнольд. Инварианты и перестройки фронтов на плоскости // Труды МИАН. 1995. Т. 209. С. 14–64.
- [7] В. И. Арнольд, В. А. Васильев, В. В. Горюнов, О. В. Ляшко. Особенности. II. Приложения // Итоги науки и техн. Фундам. напр. Т. 6. М.: ВИНТИ, 1989.
- [8] E. Artin. Theorie der Zöpfe // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1925. V. 4. P. 47–72. (English transl.: Theory of braids. Ann. of Math. (2). 1947. V. 48. №1. P. 101–126.)
- [9] E. Babson, A. Björner, S. Linusson, J. Shareshian, V. Welker. The complexes of not i -connected graphs // Topology. 1999. V. 38. №2. P. 271–299.
- [10] D. Bar-Natan. Bibliography of Vassiliev Invariants // <http://www.ma.huji.ac.il/~drorbn/VasBib/VasBib.html>.
- [11] Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1965.
- [12] И. Н. Бернштейн, С. И. Гельфанд. Мероморфность функции P^λ // Функц. анализ и его прил. 1969. Т. 3. №4. С. 84–85.
- [13] A. Björner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White, G. M. Ziegler. Oriented Matroids. London: Cambridge Univ. Press, 1992.
- [14] A. Björner. Subspace arrangements // Proceedings of the 1-st European Congress of Mathematicians (Paris, 1992). V. 1 / ed. A. Joseph et al. Basel: Birkhäuser, 1994. P. 321–370. (Progr. Math. V. 119.)
- [15] A. Björner. Topological methods // Handbook of Combinatorics / ed. R. Graham, M. Grötschel, L. Lovasz. Amsterdam: North-Holland, 1995. P. 1819–1872.
- [16] A. Björner. Nonpure shellability, f -vectors, subspace arrangements and complexity // Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (New Brunswick, NJ, 1994) / ed. L. Billera et al. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1996. P. 25–53. (DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci. V. 24.)
- [17] A. Björner, V. Welker. The homology of “ k -equal” manifolds and related partition lattices // Adv. Math. 1995. V. 110. №2. P. 277–313.
- [18] A. Björner, G. M. Ziegler. Combinatorial stratification of complex arrangements // J. Amer. Math. Soc. 1992. V. 5. №1. P. 105–149.
- [19] A. Björner, L. Lovász, A. Yao. Linear decision trees: volume estimates and topological bounds // Proceedings of the 24-th Annual ACM Symposium on Theory of Computing. New York: ACM Press, 1992. P. 170–177.

- [20] A. Borel, J.-P. Serre. Cohomologie d'immeubles et de groupes S -arithmétiques // Topology. 1976. V. 15. P. 211–231.
- [21] Н. Бурбаки. Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1972.
- [22] Э. Брискорн. О группах кос (по В.И. Арнольду) // Математика. 1974. Т. 18. №3. С. 46–59.
- [23] P. Cartier. Les arrangements d'hyperplans: un chapitre de géométrie combinatoire // Séminaire Bourbaki 1980/81. Berlin: Springer-Verlag, 1981. P. 1–22. (Lecture Notes in Math. V. 901.)
- [24] C. De Concini, C. Procesi. Wonderful models of subspace arrangements // Selecta Math. (N.S.). 1995. V. 1. №3. P. 459–494.
- [25] P. Deligne. Equations différentielles à points singuliers réguliers. Berlin: Springer-Verlag, 1970. (Lect. Notes in Math. V. 163.)
- [26] P. Deligne. Les immeubles des groupes de tresses généralisés // Invent. Math. 1972. V. 17. P. 273–302.
- [27] P. Deligne, G. Mostow. Monodromy of hypergeometric functions and nonlattice integral monodromy // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 1986. V. 63. P. 5–89.
- [28] P. Deligne, M. Goresky, R. MacPherson. L'algèbre de cohomologie du complément, dans un espace affine, d'une famille finie de sous-espaces affines // Michigan J. Math. 2000. V. 48.
- [29] M. de Longueville, C. Schultz. The cohomology rings of complements of subspace arrangements // <http://www.math.fu-berlin.de/~cschultz/arrangements.html>; (to appear).
- [30] H. Esnault, V. Shechtman, E. Viehweg. Cohomology of local systems on the complement of hyperplanes // Invent. Math. 1992. V. 109. №3. P. 557–561; 1993. V. 112. №2. P. 447.
- [31] E. Fadell, L. Neuwirth. Configuration spaces // Math. Scand. 1962. V. 10. №1. P. 111–118.
- [32] J. Folkman. The homology groups of a lattice // J. Math. Mech. 1966. V. 15. P. 631–636.
- [33] Д. Б. Фукс. Когомологии группы кос mod 2 // Функц. анализ и его прил. 1970. Т. 4. №2. С. 62–73.
- [34] И. М. Гельфанд. Общая теория гипергеометрических функций // Докл. АН СССР. 1986. Т. 288. №1. С. 14–18.
- [35] И. М. Гельфанд, С. И. Гельфанд. Обобщенные гипергеометрические уравнения // Докл. АН СССР. 1986. Т. 288. №2. С. 279–283.
- [36] И. М. Гельфанд, Г. Л. Рыбников. Алгебраические и топологические инварианты ориентированных матроидов // Докл. АН СССР. 1989. Т. 307. №4. С. 791–795.
- [37] И. М. Гельфанд, В. В. Серганова. Комбинаторные геометрии и страты тора на однородных компактных многообразиях // УМН. 1987. Т. 42. №2. С. 107–134.
- [38] И. М. Гельфанд, А. В. Зелевинский. Алгебраические и комбинаторные аспекты общей теории гипергеометрических функций // Функц. анализ и его прил. 1986. Т. 20. №3. С. 17–34.
- [39] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinskii. Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants. Boston, MA: Birkhäuser, 1994; И. М. Гельфанд, М. М. Капранов, А. В. Зелевинский. Дискриминанты, результаты и многомерные детерминанты. М.: Фазис (в печати).
- [40] М. Горески, Р. Макферсон. Стратифицированная теория Морса. М.: Мир, 1991.
- [41] В. В. Горюнов. Когомологии групп кос серий C и D // Труды ММО. 1981. Т. 42. С. 234–242.
- [42] M. Goussarov, M. Polyak, O. Viro. Finite type invariants of classical and virtual knots // Topology. 2000. V. 39. №5. P. 1045–1068.
- [43] A. Hattori. Topology of $\mathbf{C}^n$ minus a finite number of affine hyperplanes in general position // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 1975. V. 22. P. 205–219.
- [44] Х. Хиронака. Разрешение особенностей алгебраических многообразий над полями характеристики нуль // Математика. 1965. Т. 9. №6. С. 2–70; 1966. Т. 10. №1. С. 3–89; Т. 10. №2. С. 3–58.
- [45] K. Jewell, P. Orlik, B. Z. Shapiro. On the complement of affine subspace arrangements // Topology Appl. 1994. V. 56. P. 215–233.
- [46] M. Khovanov. Doodle groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1996. V. 349. P. 2297–2315.

- [47] М. Khovanov. Real $K(\pi, 1)$ arrangements from finite root systems // *Math. Res. Lett.* 1996. V. 3. P. 261–274.
- [48] М. Kontsevich. Vassiliev's knot invariants // *Adv. Soviet Math.* 1993. V. 16, part 2. P. 137–150.
- [49] М. Kontsevich. Formal (non-)commutative symplectic geometry // *The I.M. Gel'fand Mathematical Seminars 1990–1992* / ed. L. Corwin et al. Basel: Birkhäuser, 1993. P. 173–187.
- [50] В. Я. Лин. Косы Артина и связанные с ними группы и пространства // *Итоги науки и техн. Алгебра, Топология, Геометрия.* Т. 17. М.: ВИНТИ, 1979. С. 159–227.
- [51] S. MacLane. Some interpretations of abstract linear dependence in terms of projective geometry // *Amer. J. Math.* 1936. V. 58. P. 236–240.
- [52] А. В. Мерков. Finite order invariants of ornaments // *J. Math. Sci.* 1998. V. 90. № 4. P. 2215–2273.
- [53] А. В. Мерков. Vassiliev invariants classify flat braids // *Differential and Symplectic Topology of Knots and Curves* / ed. S. L. Tabachnikov. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1999. P. 83–102. (Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. V. 190.)
- [54] А. В. Мерков. Vassiliev invariants classify plane curves and doodles // Preprint, 1998, <http://www.botik.ru/~duzhin/as-papers/finv-dvi.zip>.
- [55] А. В. Мерков. Сегментно–стрелочные диаграммы и инварианты орнаментов // *Матем. сб.* 2000. Т. 191. № 11. С. 47–78.
- [56] Н. Е. Мнёв. О многообразиях комбинаторных типов проективных конфигураций и выпуклых многогранников // *Докл. АН СССР.* 1985. Т. 283. № 6. С. 1312–1314.
- [57] N. E. Mnev. The universality theorems on the classification problem of configuration varieties and convex polytopes varieties // *Topology and Geometry – Rohlin Seminar* / ed. O. Viro. Berlin: Springer-Verlag, 1988. P. 527–544. (Lecture Notes in Math. V. 1346.)
- [58] Т. Nakamura. The topology of the configuration of projective subspaces in a projective space. I; II // *Sci. Papers College Arts Sci. Univ. Tokyo.* 1987. V. 37. P. 13–35; 1991. V. 41. № 2. P. 59–81.
- [59] P. Orlik, L. Solomon. Combinatorics and topology of complements of hyperplanes // *Invent. Math.* 1980. V. 56. № 2. P. 167–189.
- [60] P. Orlik, H. Terao. Arrangements of Hyperplanes. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
- [61] Ф. Фам. Обобщенные формулы Пикара–Лефшеца и ветвление интегралов // *Математика.* 1969. Т. 13. № 4. С. 61–93.
- [62] Ф. Фам. Введение в топологическое исследование особенностей Ландау. М.: Мир, 1970.
- [63] М. Polyak, O. Viro. Gauss diagram formulas for Vassiliev invariants // *Internat. Math. Res. Notices.* 1994. V. 11. P. 445–453.
- [64] G. L. Rybnikov. On the fundamental group of the complex hyperplane arrangement // *math.AG/9805056*, 1998.
- [65] M. Salvetti. Topology of the complement of real hyperplanes in $\mathbb{C}^N$ // *Invent. Math.* 1987. V. 88. P. 603–618.
- [66] M. Salvetti. The homotopy type of Artin groups // *Math. Res. Lett.* 1994. V. 1. № 5. P. 565–577.
- [67] V. Schechtman, A. Varchenko. Arrangements of hyperplanes and Lie algebra homology // *Invent. Math.* 1991. V. 106. P. 139–194.
- [68] А. Шумакович. Явные формулы для странности плоской кривой // *Алгебра и анализ.* 1995. Т. 7. № 3. С. 165–199.
- [69] V. Tourtchine. Sur l'homologie des espaces des nœuds non-compacts // Preprint, 2000; [arXiv:math.QA/0010017](http://arxiv.org/abs/math.QA/0010017).
- [70] В. Э. Турчин. Группы гомологий комплексов двусвязных графов // *УМН.* 1997. Т. 52. № 2. С. 189–190.
- [71] V. E. Turchin. Homology isomorphism of the complex of 2-connected graphs and the graph complex of trees // *Topics in Quantum Groups and Finite-Type Invariants. Mathematics at the Independent University of Moscow* / ed. B. Feigin, V. Vassiliev. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1998. P. 145–153. (Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. V. 185.)
- [72] А. Н. Варченко. Комбинаторика и расположение аффинных гиперплоскостей в вещественном пространстве // *Функц. анализ и его прил.* 1987. Т. 21. № 1. С. 11–22.
- [73] А. Н. Варченко. Многомерные гипергеометрические функции в конформной теории поля, алгебраической K -теории, алгебраической геометрии // *Международный конгресс математиков в Киото, 1990.* М.: Мир, 1996. С. 401–428.

- [74] V. A. Vassiliev. Complements of Discriminants of Smooth Maps: Topology and Applications. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994. (Transl. Math. Monographs. V. 98.)
- [75] V. A. Vassiliev. Cohomology of knot spaces // Theory of Singularities and its Applications / ed. V.I. Arnold. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1990. P. 23–69. (Adv. Soviet Math. V. 1.)
- [76] V. A. Vassiliev. Complexes of connected graphs // The I.M. Gel'fand Mathematical Seminars 1990–1992 / ed. L. Corvin et al. Basel: Birkhäuser, 1993. P. 223–235.
- [77] V. A. Vassiliev. Invariants of ornaments // Singularities and Bifurcations / ed. V.I. Arnold. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994. P. 225–262. (Adv. Soviet Math. V. 21.)
- [78] V. A. Vassiliev. Topology of two-connected graphs and homology of spaces of knots // Differential and Symplectic Topology of Knots and Curves / ed. S.L. Tabachnikov. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1999. P. 253–286. (Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. V. 190.)
- [79] V. A. Vassiliev. On finite-order invariants of triple points free plane curves // D. B. Fuchs Anniversary Volume / ed. A. Astashkevich, S. Tabachnikov. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1999. P. 275–300. (Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. V. 194.)
- [80] V. A. Vassiliev. Topological order complexes and resolutions of discriminant sets // Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.). 1999. V. 66 (80). P. 165–185.
- [81] V. A. Vassiliev. On combinatorial formulas for cohomology of spaces of knots // Moscow Math. J. 2001. V. 1. №1. P. 91–123.
- [82] V. A. Vassiliev. Resolutions of discriminants and topology of their complements // Proceedings of the Advanced Summer Institute on Singularity Theory / ed. D. Siersma et al. Dordrecht: Kluwer, 2001.
- [83] V. A. Vassiliev. Homology of spaces of knots in any dimensions // London Roy. Soc. Philos. Trans. A. Proceedings of the Discussion Meeting of the London Royal Society “Topological Methods in the Physical Sciences”, 2001.
- [84] В. А. Васильев. Топология дополнений к дискриминантам. М.: Фазис, 1997.
- [85] В. А. Васильев. Геометрическая реализация гомологий классических групп Ли и комплексы, S -двойственные флаговому многообразию // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3. №4. С. 113–120.
- [86] В. А. Васильев. Ветвящиеся интегралы. М.: МЦНМО, 2000.
- [87] В. А. Васильев, В. В. Серганова. О числе вещественных и комплексных модулей особенностей гладких функций и реализаций матроидов // Матем. заметки. 1991. Т. 49. №1. С. 19–27.
- [88] В. А. Васильев, И. М. Гельфанд, А. В. Зелевинский. Общие гипергеометрические функции на комплексных грассманианах // Функц. анализ и его прил. 1987. Т. 21. №1. С. 23–38.
- [89] Дж. Уайтхед. Новейшие достижения в теории гомотопий. М.: Мир, 1974.
- [90] С. Юзвинский. Алгебры Орлика–Соломона в алгебре и топологии // УМН. 2001. Т. 56. №2. С. 87–166.
- [91] S. Yuzvinsky. Small rational model of subspace complement // <http://xxx.lanl.gov/abs/math.CO/9806143>; (to appear).
- [92] S. Yuzvinsky. Rational model of subspace complement on atomic complex // Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.). 1999. V. 66 (80). P. 157–164.
- [93] T. Zaslavsky. Facing up to Arrangements: Face-Count Formulas for Partitions of Space by Hyperplanes. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1975. (Mem. Amer. Math. Soc. V. 154.)
- [94] G. M. Ziegler. On the difference between real and complex arrangements // Math. Z. 1993. V. 212. P. 1–11.
- [95] G. M. Ziegler. Combinatorial models for subspace arrangements. Habilitation-Schrift. Berlin: Techn. Univ. Berlin, 1992.
- [96] G. M. Ziegler, R. T. Živaljević. Homotopy type of arrangements via diagrams of spaces // Math. Ann. 1993. V. 295. P. 527–548.

Математический институт

им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: vassil@vassil.mccme.rssi.ru

Поступила в редакцию

06.03.2001