Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Пунинская, Модули с малым числом типов над полуцепными кольцами,
УМН, 2001, том 56, выпуск 2, 209–210

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm386>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 18:33:40

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

МОДУЛИ С МАЛЫМ ЧИСЛОМ ТИПОВ
НАД ПОЛУЦЕПНЫМИ КОЛЬЦАМИ

В. А. ПУНИНСКАЯ

Гипотеза Воота доказана для ω -стабильных теорий [1], поэтому доказательство импликации “мало моделей $\Rightarrow \omega$ -стабильность” для некоторого класса теорий T означала бы справедливость гипотезы для этого класса. Эта импликация выполняется для любой полной теории модулей над R для широкого класса счетных колец R . Например, она доказана в [2] для модулей над счетными полуцепными кольцами и в [3] для модулей над счетными коммутативными прюферовыми кольцами.

Полным n -типом в теории T ($n < \omega$) называется совместное с T полное множество формул от n свободных переменных без параметров. Все кольца, рассматриваемые в этой статье, предполагаются счетными. Модуль M над кольцом R называется *модулем с малым числом типов*, если для любого натурального n его (полная) теория $\text{Th}(M)$ имеет только счетное число n -типов. Модуль M называется *модулем с малым числом моделей*, если его теория $\text{Th}(M)$ имеет менее чем 2^ω неизоморфных счетных моделей.

R -модуль M называется *цепным*, если решетка его подмодулей есть цепь. Модуль, являющийся прямой суммой цепных модулей, называется *полуцепным*. Кольцо R называется *полуцепным*, если R_R и ${}_R R$ являются полуцепными модулями. Коммутативное кольцо R называется *прюферовым*, если его решетка идеалов дистрибутивна.

В этой статье мы усиливаем упомянутые выше результаты из [2] и [3] следующими теоремами.

ТЕОРЕМА 1. Пусть M – правый модуль над счетным полуцепным кольцом R . Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) M имеет малое число моделей;
- 2) M имеет малое число типов;
- 3) M является Σ -чисто-инъективным (или, эквивалентно, ω -стабильным).

Заметим, что существует полное описание Σ -чисто-инъективных модулей над полуцепным кольцом [4]. Следовательно, теорема 1 дает нам аналогичное описание модулей с малым числом моделей над полуцепным кольцом.

ТЕОРЕМА 2. Пусть M – правый модуль над счетным коммутативным прюферовым кольцом R . Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) M имеет малое число типов;
- 2) M является Σ -чисто-инъективным (или, эквивалентно, ω -стабильным).

Так как существует полное описание Σ -чисто-инъективных модулей над коммутативными прюферовыми кольцами [5], то теорема 2 дает нам аналогичное описание модулей с малым числом типов над счетным коммутативным прюферовым кольцом.

ПРИМЕР. Пусть $R := k[x]$ – кольцо многочленов над алгебраически замкнутым полем k . Рассмотрим простые R -модули $S_\alpha := R/M_\alpha$, где $M_\alpha := (x - \alpha)R$, $\alpha \in k$. Тогда $M := \bigoplus_{\alpha \in k} E_R(S_\alpha)$ является ω -стабильным как R -модуль, но имеет много моделей. (Каждая счетная модель теории $\text{Th}(M)$ имеет вид

$$\bigoplus_{\alpha \in k} E_R(S_\alpha)^{(n_\alpha)} \oplus Q(R)^{(n)},$$

где $0 < n_\alpha \leq \omega$, $0 \leq n \leq \omega$.)

Заметим, что импликация “мало моделей $\Rightarrow$ мало типов” верна для любой теории. В теореме 1 доказано, что для счетных полуцепных колец эта импликация становится эквивалентностью. Предыдущий пример показывает, что импликация “мало типов $\Rightarrow$ мало моделей” не выполняется для счетных коммутативных прюферовых колец и для счетных наследственных нетеровых первичных колец.

Автор пользуется случаем поблагодарить профессора А. В. Михалева за помощь и интерес к данной работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Shelah, L. A. Harrington, M. Makkai // Israel J. Math. 1984. V. 49. P. 259–280.
 [2] V. Puninskaya // J. Symbolic Logic. 2000. V. 65. № 1. P. 155–163. [3] М. Прест, В. А. Пунинская // Алгебра и логика. 1999. Т. 38. № 4. С. 419–435. [4] A. Facchini, G. Puninski // Abelian Groups and Modules / ed. A. Facchini, C. Menini. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1995. P. 145–162. [5] M. Prest, G. Puninski // Comm. Algebra. 1999. V. 27. № 2. P. 961–971.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
01.02.2001