Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Ф. Воронов, Исчисление Картана для дуальных форм, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 2, 211–212

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm387>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 16:27:33

ИСЧИСЛЕНИЕ КАРТАНА ДЛЯ ДУАЛЬНЫХ ФОРМ

Ф. Ф. Воронов

1. Дуальные и смешанные формы. Рассмотрим суперпространство $V = V_0 \oplus V_1$ размерности $\dim V = n|m$ (которое мы отождествляем с линейным супермногообразием). Пусть $\text{Vol } V$ обозначает пространство форм объема на V . Гладкое отображение

$$\mathcal{L}: \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_p \times \underbrace{V^* \Pi \times \cdots \times V^* \Pi}_q \rightarrow \text{Vol } V$$

есть *дуальная форма* на V костепени $p|q$, если выполнены условия: $\mathcal{L}(ph) = \mathcal{L}(p) \text{Ver } h$, для всех $h \in \text{GL}(p|q)$, и

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial p_A^K} \partial p_B^L + (-1)^{\tilde{A}\tilde{B} + (\tilde{A} + \tilde{B})\tilde{L}} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial p_B^K} \partial p_A^L = 0. \quad (1)$$

Аргументы $\mathcal{L}$ (ковекторы) пишутся в столбик, и они образуют матрицу $p = (p_A^K)$. В силу первого условия, нечетные ковекторы p^K , $\tilde{K} = 1$, должны быть линейно независимы, откуда $0 \leq q \leq m$.

Рассмотрим теперь $V \oplus \mathbb{R}^{r|s}$ для некоторой размерности $r|s$. Обозначим $W := V \oplus \mathbb{R}^{r|s}$. *Смешанная форма* [1] на V – это гладкое отображение

$$\mathcal{L}: \underbrace{W^* \times \cdots \times W^*}_p \times \underbrace{W^* \Pi \times \cdots \times W^* \Pi}_q \rightarrow \text{Vol } V,$$

удовлетворяющее условиям $\mathcal{L}(ph, wh) = \mathcal{L}(p, w) \text{Ver } h$ для всех $h \in \text{GL}(p|q)$, $\mathcal{L}(p + aw, gw) = \mathcal{L}(p, w) \text{Ver } g$, для всех $g \in \text{GL}(r|s)$ и всех $a \in \text{Mat}(r|s \times n|m)$, и уравнением, аналогичным (1), для всей совокупности переменных $p = (p_A^K)$, $w = (w_F^L)$; $p|q$ есть *костепень*, $r|s$ *дополнительная степень*. Для данного K матричные элементы p_A^K , w_F^K суть компоненты ковектора на $V \oplus \mathbb{R}^{r|s}$. Отметим, что $s \leq q \leq m + s$ из-за условий с березинианом. Примеры дуальных и смешанных форм строятся как и для “прямых” форм [1]–[3].

Введем обозначения $\Lambda_{p|q} = \Lambda_{p|q}(V)$ и $\Lambda_{p|q}^{r|s} = \Lambda_{p|q}^{r|s}(V)$ для пространств дуальных и смешанных форм соответственно. Заметим, что $\Lambda_{p|q} = \Lambda_{p|q}^{0|0}$. Имеет место изоморфизм $\tau: \Lambda^{r|s} \rightarrow \Lambda_{n|m}^{r|s}$ с пространством прямых форм [1]: $L = L(v) \mapsto \mathcal{L} = \mathcal{L}(p, w)$, где $\mathcal{L}(p, w) := L(wp^{-1}) \text{Ver } p$. Имеют место [1] *изоморфизмы стабильности*: $\sigma_{k|l}: \Lambda_{p|q}^{r|s} \rightarrow \Lambda_{p+k|q+l}^{r+k|s+l}$, где

$$(\sigma_{k|l} \mathcal{L}) \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} := \mathcal{L} \begin{pmatrix} p_1 - p_2 w_{22}^{-1} w_{21} \\ w_{11} - w_{12} w_{22}^{-1} w_{21} \end{pmatrix} \cdot \text{Ver } w_{22}.$$

Разбиение матрицы в аргументе на блоки отвечает выделению последних $k|l$ строчек и столбцов. Обратный изоморфизм $\sigma_{k|l}^{-1}$ задается подстановкой $p_1 := p$, $w_{11} := w$, $w_{22} := 1$, $p_2 := 0$, $w_{12} := 0$, $w_{21} := 0$. Можно говорить о прямом пределе $\Lambda^{r|s}(V) := \varinjlim_{N, M} \Lambda_{n+N|m+M}^{r+N|s+M}(V)$, где $-\infty < r < +\infty$, $0 \leq s \leq m$. В частности, для любого $r \geq 0$ $\Lambda^{r|s}(V) \cong \Lambda^{r|s}(V)$, и для любого $r \leq n$ $\Lambda^{r|s}(V) \cong \Lambda_{n-r|m-s}(V)$.

2. Операции $e(\alpha)$ и $e(u)$. Для $\alpha = e^A \alpha_A \in V^*$, $u = u^A e_A \in V$ определим $e(\alpha): \Lambda_{p|q}^{r|s} \rightarrow \Lambda_{p|q}^{r+1|s}$ и $e(u): \Lambda_{p|q}^{r|s} \rightarrow \Lambda_{p+1|q}^{r|s}$ формулами: $e(\alpha)\mathcal{L} := (-1)^r \alpha_A w_{r+1}^K (-1)^{\tilde{\alpha}\tilde{A}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_A^K}$, $e(u)\mathcal{L} := (-1)^r u^A \left(p_A^{p+1} - (-1)^{\tilde{B}\tilde{K}} p_A^K p_B^{p+1} \frac{\partial}{\partial p_B^K} - (-1)^{\tilde{F}\tilde{K}} p_A^K w_F^{p+1} \frac{\partial}{\partial w_F^K} \right) \mathcal{L}$.

ТЕОРЕМА 1. Операции $e(\alpha)$, $e(u)$ стабильны. Они удовлетворяют антикоммутационным соотношениям: $e(u)e(v) + (-1)^{\tilde{u}\tilde{v}} e(v)e(u) = 0$, $e(\alpha)e(\beta) + (-1)^{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} e(\beta)e(\alpha) = 0$, $e(u)e(\alpha) + (-1)^{\tilde{\alpha}\tilde{u}} e(\alpha)e(u) = \langle u, \alpha \rangle \sigma$, где $u, v \in V$, $\alpha, \beta \in V^*$, и $\sigma = \sigma_{1|0}: \Lambda_{p|q}^{r|s} \rightarrow \Lambda_{p+1|q}^{r+1|s}$. Для любого r при изоморфизме $\tau: e(\alpha)$ переходит на прямых формах во внешнее умножение на α , $e_\alpha: \Lambda_{p|q}^{r|s} \rightarrow \Lambda_{p+1|q}^{r+1|s}$. Для $r > 0$ операция $e(u)$ переходит в свертку с u : $\tau^{-1} \circ \sigma_{1|0}^{-1} \circ e(u) \circ \tau = i_u: \Lambda_{p|q}^{r|s} \rightarrow \Lambda_{p-1|q}^{r-1|s}$. Для $r = 0$ получаем отображение $\sigma_{0|s}^{-1} \circ e(u) \circ \tau: \Lambda_{n+1|m-s}^{0|s} \rightarrow \Lambda_{n+1|m-s}$, “исправляющее” операцию i_u . Подобное верно и для дуальных форм.

Из теоремы 1, в частности, вытекает, что смешанные формы образуют модуль над “четной” версией внешней алгебры, $\Lambda(V^*) := T(V^*)/(\alpha \otimes \beta + (-1)^{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} \beta \otimes \alpha)$.

3. Тождество гомотопии. Рассмотрим супермногообразие $M = M^{n|m}$ и пучки смешанных форм $\Omega_{p|q}^{r|s}$. “Вариационный” дифференциал действует на смешанные формы по формуле [1]: $d\mathcal{L} := (-1)^r w_{r+1}^K (-1)^{\tilde{A}\tilde{K}} \frac{\partial}{\partial x^A} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_A^K}$. Он увеличивает степень на единицу. Пусть u – векторное поле на M . Обычным образом определяется производная Ли. Дифференциал и производная Ли стабильны. Явная формула для производной Ли:

$$\delta_u \mathcal{L} = u^A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^A} - (-1)^{\tilde{A}\tilde{X}} \frac{\partial u^B}{\partial x^A} p_B^K \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_A^K} + (-1)^{\tilde{A}(\tilde{X}+1)} \frac{\partial u^A}{\partial x^A} \mathcal{L}. \quad (2)$$

ЛЕММА. $d(f\mathcal{L}) = f d\mathcal{L} + e(df)\mathcal{L}$, для любой функции f .

По теореме 1, определен оператор умножения форм из $\Omega_{p|q}^{r|s}$ на элементы $\Omega^* = \bigoplus \Omega^k$ (“наивный” комплекс де Рама с четным дифференциалом, см. [4]). Обозначаем его, как и выше, $e(\omega)$.

ТЕОРЕМА 2. Имеют место соотношения

$$de(\omega) - (-1)^k e(\omega)d = e(d\omega) \quad (\text{тождество Лейбница}), \quad (3)$$

$$de(u) + e(u)d = \sigma \delta_u \quad (\text{“тождество гомотопии”}), \quad (4)$$

для любой $\omega \in \Omega^k$ и любого векторного поля u .

В стабильном пределе из (4) вытекает обычная форма тождества гомотопии. Равенство (4) может быть доказано непосредственной выкладкой для композиции σ^{-1} с левой частью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Th. Voronov. Supermanifold forms and integration. A dual theory // Solitons, Geometry, and Topology: On the Crossroad / ed. V. M. Buchstaber, S. P. Novikov. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1997. P. 153–171. (Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. V. 179 (33).); dg-ga/9603009. [2] O. M. Khudaverdian. Batalin–Vilkovisky formalism and odd symplectic geometry // Proceedings of the Workshop “Geometry and Integrable Models”, Dubna, 4–8 Oct. 1994. Singapore: World Scientific, 1995; hep-th 9508174. [3] Th. Voronov. Geometric integration theory on supermanifolds. V. 9, 1992. [4] Ю. И. Манин. Калибровочные поля и комплексная геометрия. М.: Наука, 1984.

University of Manchester Institute
of Science and Technology (UMIST)
E-mail: theodore.voronov@umist.ac.uk

Принято редколлегией
02.04.2001